T. 275

Van-e olyan csupa különböző számjegyből álló 111-gyel osztható pozitív egész szám, amelyben a számjegyek csökkenő sorrendben következnek egymás után?

Megoldás. Ilyen többszörös nem létezik.

Tegyük fel, hogy mégis van olyan többszöröse a 111-nek, melyben a számjegyek csökkenő sorrendben következnek egymás után, és vegyük a legeslegkisebbet, a $111\cdot k$ számot.

1. eset. Ha $111\cdot k$ nullára végződik, akkor 10-zel osztható, így mivel a 10 relatív prím a 111-hez, következik, hogy k is 10-zel osztható, $k=10\cdot n$. Ekkor $111\cdot n$ az a szám, melyet megkaphatunk, ha $111\cdot k$ utolsó nullás számjegyét eltöröljük, így rá is igaz, hogy számjegyei csökkenő sorrendben következnek, habár kisebb többszörös. Ez ellentmond annak, hogy $111\cdot k$-val a lehető legkisebb többszöröst vettük.

2. eset. Ha pedig $111\cdot k$ nem nullára végződik, akkor vonjunk ki belőle 111-et! Mivel 111 pozitív többszörösei legalább háromjegyűek, így $111\cdot k$ utolsó három számjegye: $a>b>c>0$. A kapott szám úgy adódott, hogy a, b, c helyére rendre az a-1, b-1, c-1 számjegyeket írtuk, melyek ténylegesen számjegyek lesznek, hisz $a,b,c>0$. Világos, hogy a kapott számban is csökkenő sorrendben lesznek a számjegyek, így $111\cdot(k-1)$ többszörös is megfelel a feltételeknek. Ez ismét ellentmond annak, hogy a lehető legkisebb többszöröst vettük.

Mindkettő lehetséges esetben ellentmondáshoz jutva, kapjuk, hogy nem lehet a 111-nek csökkenő számjegyű többszöröse.