

T. 267

*Adott a síkon néhány (de legalább két) pont. Egy szakaszt, melynek végpontjai az adott pontok közül valók párosnak (illetve páratlannak) nevezünk, ha páros (illetve ha páratlan) sok adott pont van rajta. Bizonyítsd be, hogy több páros szakasz van, mint páratlan!*

**Megoldás.** Először azt az esetet nézzük meg, melyben minden pont egy egyenesen van. Sorszámozzuk a pontokat balról jobbra haladva. Az első két pont között világos, hogy több páros szakasz van, mint páratlan. Ha az első  $2k$  darab ponthoz hozzáveszünk még egyet, akkor ugyanannyi új páros és páratlan szakasz jön létre, hisz az újonnan létrejött  $2k$  darab szakasz rendre  $0, 1, \dots, 2k-1$  darab pontot tartalmaz a kijelöltek közül. Ha pedig az első  $2k+1$  ponthoz vettük hozzá a következőt, akkor eggyel több páros szakasz képződik, mint páratlan. Tehát összességében egy egyenesen több páros szakasz lesz, mint páratlan.

Nézzük ezután az általános esetet! Vegyük a pontok által meghatározott összes egyenest! A pontok által közrefogott szakaszok mind ezeken az egyeneseken lesznek. Azt már tudjuk, hogy egy egyenesen lévő pontok körében több páros szakasz van, mint páratlan. Ebből következik, hogy a pontok által megadott egyeneseken együttvéve is több páros szakasz van. Ezzel a kívánt állítást igazoltuk.

**Megjegyzés.** Érdeemes megfigyelni, hogy a bizonyításban még azt sem használtuk ki, hogy a pontok egy síkon vannak!