T. 264

A és B egy kör rögzített pontjai (AB nem átmérő). E kör minden XY átmérőjére ($X \neq A$, $Y \neq B$) bejelöljük az AX és a BY egyenesek metszéspontját. Mit alkotnak az így bejelölt pontok?

Megoldás. Legyen P az eredeti k kör középpontja. Megmutatjuk, hogy a kapott M pontok egy Q középpontú, QA sugarú m körön vannak, és azt, hogy Q az A-ban és B-ben k-hoz húzható érintők metszéspontja.

Használjuk fel a kerületi és középponti szögek tételét, illetve annak megfordítását! Előjeles szögekkel dolgozva:

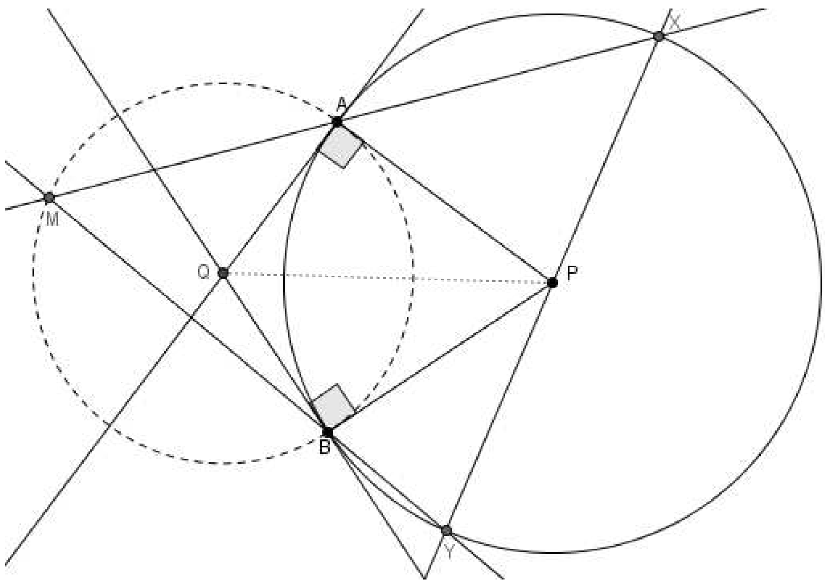
$$2\cdot AMB\angle = 2\cdot\left(180° - \left(YXA\angle + BYX\angle\right)\right) = 360° - 2\cdot\left(YXB\angle + BXA\angle + BYA\angle + AYX\angle\right) =$$

$$360° - YPB\angle - BPA\angle - BPA\angle - APX\angle = 360° - \left(YPB\angle + BPA\angle + APX\angle\right) - BPA\angle = 180° - BPA\angle .$$

Mivel ez egy állandó érték, ezért a kapott M pontok rajta vannak az AB szakasz egy látókörén. Azért vettük az $AMB\angle$ kétszeresét, mert ez így az $AQB\angle$ középponti szöggel egyenlő. A húrnégyszögek tételének megfordítása miatt PAQB négyszög köré kör írható. Mivel ez a négyszög PQ-ra szimmetrikus, ezért körének átmérője PQ, tehát a Thálesz-tétel szerint valóban, Q az A-ban és B-ben húzható érintők metszéspontja.

(Az m kör minden pontját ténylegesen kijelöltük valamely XY átmérő esetén, kivéve az A-val átellenes és a B-vel átellenes pontját. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges M pontot m-en, amely nincs A-val vagy B-vel szemben. Ekkor az MA egyenes metszi k-t egy X pontban, az MB egyenes pedig egy Y pontban metszi azt. Tudjuk, hogy ha Z olyan pont, amelyre XZ átmérője k-nak, akkor AX és BZ metszéspontja rajta van m-en, holott mivel ez a pont AX és m közös pontja, azaz M, így YB és ZB is átmegy M ponton. Ebből következik, hogy Y és Z megegyezik, vagyis XY átmérője k-nak: tehát valóban kijelöltük az említett pontokat.)

Tehát a kijelölt pontok éppen az m kör A-val és B-vel sem átellenes pontjai.



Megjegyzés. Említettük, hogy előjeles szögekkel (irányított szögekkel, forgásszögekkel) dolgoztunk, ez a megszokottól eltérő szögfogalom. Ilyenkor az O-ból kiinduló e és f félegyenesek szöge az a szögmennyiség, amellyel az e félegyenest O körül az óramutató járásával ellentétesen elforgatva f félegyenest kapjuk. Látható, hogy ilyen szögmennyiségből többféle is van, hisz ha 360 fokkal körbeforgatunk valamit, akkor az helyben marad, és ennek megfelelően egy előjeles szöggel egyenlőnek vesszük mindazokat a szögeket, amik 360 fok többszörösével térnek el tőle (innen az elnevezés). A fenti képletsorban történt átalakítások egyenként ellenőrizhetők a definíció alapján. A levont következtetéseket pedig a kerületi szögek tételkörének előjeles szögekre történő átfogalmazása teszi lehetővé. Az előjeles szögek, mint itt is, esetfelbontások elkerülésére alkalmasak.