

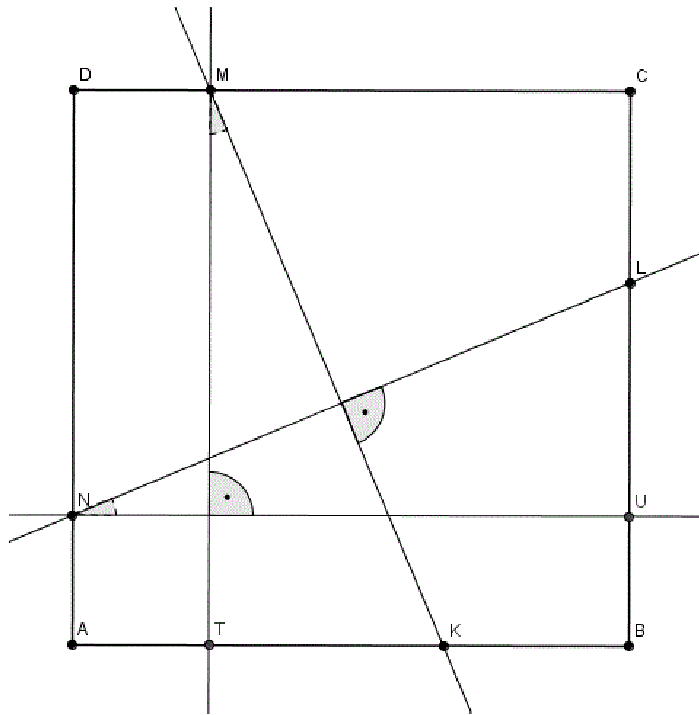
Adott az egységnyi oldalhosszúságú ABCD négyzet, és az AB, BC, CD, DA oldalakon a K, L, M, N pontok úgy, hogy $AK + AN + CL + CM = 2$. Bizonyítsd be, hogy a KM és az LN szakaszok merőlegesek egymásra!

Megoldás. Állítsunk merőleget M-ből AB-re és N-ből BC-re rendre T és U talpponttal! Mivel $CM=BT$ és $AN=BU$, ezért

$$0 = AK + NA + CL + MC - 2 = (AK + MC - AB) + (NA + CL - BC) = \\ = (AK + TB - AB) + (UB + CL - AB) = TK - LU. \quad (1)$$

Vagyis $KT=LU$.

Mivel két-két oldaluk egyenlő, és ezek ugyanakkora szöveget (derékszöveget) zárnak közre, ezért KTM és LUN egybevágó derékszögű háromszögek. Mivel TM és NU merőleges, ezért egyik háromszöveget 90 fokkal elforgatva a másikkal azonos állású háromszöget kapunk, vagyis KM és LN szöge is 90 fokos. Ezzel beláttuk a kívánt merőlegességet.



Megjegyzés. Az ábrától függ, hogy milyen állásban van egymáshoz képest K és T , L és U , ezért a fent vázolt megoldás nem pontos. A precíz megoldáshoz több, lényegében nem különböző esetet kellene megvizsgálnunk.

A pontosításnak a másik lehetséges módszere az előjeles szakaszok bevezetése. Ennek lényege, hogy a négyzet oldalegyeneseseinek egy-egy kitüntetett irányát vesszük, például AB és CD egyeneseken az AB , a BC és DA egyeneseken a CB irányt. Ezeken az egyeneseken szereplő szakaszaink pedig + vagy - előjelűek legyenek attól függően, hogy az első végpontból a második végpont felé milyen irányban kell haladnunk, például az ábrán TK pozitív, míg UL negatív szakasznak számít. Ekkor viszont az (1) egyenlet minden körülmények között érvényes lesz, így esetvizsgálat nélkül kapjuk a két derékszögű háromszög egybevágóságát, majd a merőlegességet.