T. 252

A számegyenesen megjelöltük az 1, 2, 3, …, 99, 100 számokat. Egy szöcske az 1-ről indulva 99-et ugrott, minden megjelölt számjegyet pontosan egyszer keresett föl és legvégül 100-ra érkezett. Lehetséges-e, hogy ugrásai hosszának összege épp 1996?

Megoldás. Hogyha a szöcske az 1, 2, …, 100 sorrendben ugrott a számokra, akkor 99 az ugrások hosszösszege. Be fogjuk bizonyítani, hogy akármelyik ugrássorozatban az ugrások hosszainak összege páratlan lesz.

Tegyük fel, hogy a szöcske egymás után került az *a*, *b*, *c*, és *d* számokra. Cseréljük most meg a *b* és *c* számok sorrendjét. Eredetileg az *a* és *d* közötti ugrások hossza összesen $|b-a|+|c-b|+|d-c|$ volt, ez a cserével $|c-a|+|b-c|+|d-b|$-re változott. Vegyük észre, hogy az első kifejezés $(b-a)+(c-b)+(d-c)$ -val azonos paritású, hiszen egy pozitív egész és az ellentettjének paritása azonos. A második kifejezés pedig $(c-a)+(b-c)+(d-b)$ -val azonos paritású. Mivel $(b-a)+(c-b)+(d-c)=d-a=(c-a)+(b-c)+(d-b)$, ezért egymással is azonos paritásúak lesznek. Tehát egy ilyen cserével az ugrások hosszösszege paritásban nem változik.

Tekintsünk tetszőleges ugrássorozatot. Ha ebben a szöcske valamikor egymás után *b* és *c*-re ugrott úgy, hogy $b>c$, cseréljük meg *b*-t és *c*-t. Hajtsunk végre ilyen cseréket, amíg lehet! Elegendően sok csere után már elértük, hogy bármely $b<c$ esetén a szöcske előbb ugorjon *b*-re, mint *c*-re. A cserék végén tehát az 1, 2, …, 100 sorrendben ugrál a szöcske, vagyis összesen páratlan hosszút ugrott. De a cserék során nem változott az ugrások összegének paritása, amiért bármely ugrássorozatra ez az összeg páratlan lesz. Ezért nem lehet ugrásainak összege 1996.