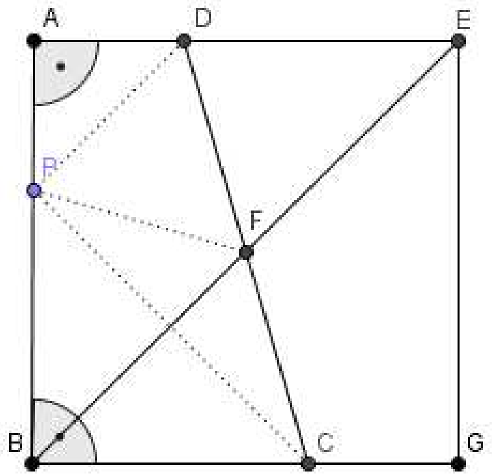
T. 243

Az ABCD derékszögű trapéz AB magasságának hossza egyenlő a AD, BC alapok hosszának összegével. Bizonyítsd be, hogy az ABC szög szögfelezője megfelezi a CD oldalt!

I. megoldás. Legyen CD felezőpontja F. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy BF felezi az ABC szöget, ami elegendő, hisz ekkor a szögfelező csakis az F pontban metszheti CD-t.

Tekintve, hogy $AB=AD+BC$, és F felezőpont, kínálja magát, hogy tükrözzünk F-re. Ugyanis ekkor C és D egymás képe lesz, és B képe emiatt olyan E pont, melyre $BC=ED$. Mivel ED párhuzamos BC-vel, ezért E rajta van az AD egyenesen is. Hasonlóan, A képe G, ahol G rajta van a BC egyenesen. A tükrözés miatt $AB=AD+BC=AD+DE=AE$ és ugyanígy $AB=BG$. Mivel a trapéz derékszögű, ezért $ABGE$ négyzet, és BF egyenes a négyzet BE átlója. Ebből pedig nyilván adódik, hogy BF felezi az ABC szöget, ezért készen is vagyunk.



II. megoldás. Legyen P az a pont az AB oldalon, melyre $AP=AD$ és $BP=BC$, ilyen pont az $AB=AD+BC$ feltétel miatt létezik. Ekkor mivel CBP és DAP egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért APD és BPC szög egyaránt 45 fokos, vagyis CPD háromszög derékszögű.

Messe az ABC szögfelezője CD-t F pontban! Ekkor két-két oldal és az azok által közrefogott szög egyenlőségéből BCF és BPF egybevágó háromszögek, tehát $FC=FP$. De ekkor Thálesz tétele szerint F kell legyen a CPD derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, avagy $FC=FD$.