Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny 2018-19

Javítási útmutató

1. feladat Egy családban a négy gyerek életkorának összege most 20 év.
a) Hány év lesz az életkoruk összege 4 év múlva? (3 pont)
b) Két évvel ezelőtt az életkoruk összege 13 év volt. Hány éves most a legfiatalabb gyerek? (3 pont)

Megoldás:
a) 4 év múlva minden gyerek 4 évvel idősebb lesz, *1 pont*
tehát életkoruk összege 4·4-gyel lesz több, *1 pont*
azaz életkoruk összege 20 + 4·4 = 36 év lesz *1 pont*

b) Ha 2 évvel ezelőtt minden gyerek élt már, akkor mindegyikük 2 évvel fiatalabb volt, tehát életkoruk összege 4·2-vel volt kevesebb, azaz életkoruk összege 20–4·2=12 év lette volna. *1 pont*
Viszont tudjuk, hogy ez az érték 13. Az 1 év eltérést csak az okozhatja, hogy a legfiatalabb gyermek még nem élt 2 évvel ezelőtt, hanem 1 éve született. *1 pont*
Így ő most 1 éves. *1 pont*
Összesen: 6 pont

2. feladat Egy focilabda készítésekor 12 db szabályos ötszög és 20 db szabályos hatszög alakú bőrdarabot varrnak össze. A sokszögek egy-egy oldalán a varrás 4,5 cm hosszú. Összesen hány cm hosszú varrás szükséges egy focilabda összevarrásához? (8 pont)

Megoldás:
Az ötszögeknek összesen 60 éle van. *2 pont*
A hatszögeknek összesen 120 éle van *2 pont*
Minden élet kétszer számoltunk, *1 pont*
így a focilabdának 180/2 = 90 éle van. *1 pont*
Ez 4,5·90 = 405 cm varrást jelent összesen. *2 pont*
Összesen: 8 pont

3. feladat Egy háromjegyű pozitív egész számot *palindrom* számnak hívunk, ha visszafelé olvasva ugyanazt a számot kapjuk. (Például a 121 *palindrom* szám.)
a) Hány háromjegyű palindrom szám van? (3 pont)
b) Mennyi a háromjegyű palindrom számok összege? (7 pont)

Megoldás:
a) Az első számjegy meghatározza a harmadikat. *1 pont*
Az első két számjegyet annyiféleképpen választhatjuk meg, ahány kétjegyű szám van. *1 pont*
Ezért 90 db háromjegyű *palindrom* szám van. *1 pont*

b) Nézzük meg, hogy az egyes számjegyek melyik helyiértéken hányszor szerepelnek! *1 pont*
1-től 9-ig mindegyik számjegy 10-szer szerepel a százasok helyén, ezek összege 45·10·100=45000. *2 pont*
Az egyes helyiértéken ugyanezek a számjegyek állhatnak, mindegyik 10 esetben, ezért összegük 450. *1 pont*
A tízes helyiértéken a 0 is állhat, ezért az egyes számjegyek csak kilencszer fordulnak elő, így

összegük 45·9·10=4050. *2 pont*
Tehát a háromjegyű *palindrom* számok összege 45000+4050+450=49500. *1 pont*
Összesen: 10 pont

4. feladat Egy családi ebéd közben az alábbi beszélgetés hangzott el:

– **Csengett a mobiltelefonod.** – mondta Pál a nővérének, Ilonának.
– **Nem is csengett.** – csattant fel Ilona.
– **Valamelyikőtöknek igaza van.** – foglalt állást édesanyjuk.

Édesapjuk megnyugtatta őket:

– **Mindhármatoknak igaza van.**

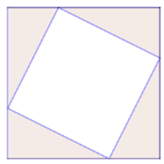
A nagymama a szokásos mondatával zárta a vitát:

– **Édesanyátoknak igaza van.**

Hány hamis állítás van az öt vastaggal szedett kijelentés között? (10 pont)

Megoldás:
(1) Pál és Ilona állítása közül pontosan egy igaz, és pontosan egy hamis. *2 pont*
mivel egymás tagadásai. *2 pont*
Ez eddig egy hamis, és egy igaz állítás. *1 pont*
(2) Az (1) megállapításból adódik, hogy édesanya állítása igaz, hiszen Pál és Ilona közül pontosan az egyik igazat mond. *1 pont*
Ugyancsak az (1) megállapításból adódik, hogy édesapa állítása hamis, hiszen Pál és Ilona közül pontosan az egyik valótlant állít. *1 pont*
Ez egy újabb hamis állítás. *1 pont*
A (2) megállapításból adódik, hogy a nagymama állítása igaz, hiszen édesanya állítása is igaz. *1 pont*
Tehát a vastagon szedett állítások között két hamis található. *1 pont*
Összesen: 10 pont

5. feladat Egy négyzet sarkaiból egyforma háromszögeket vágunk le az ábra szerint. A háromszögek két rövidebb oldala 6, illetve 8 cm hosszú.



a) Mekkora az eredeti négyzet **területe**? (2 pont)
b) Mekkora a megmaradó négyzet **oldala**? (10 pont)

Megoldás:
a) Az eredeti négyzet oldala 6 + 8 = 14 cm, *1 pont*
területe $14 \cdot 14 = 196$ cm^2 *1 pont*

b) Két levágott háromszöget összeillesztve egy téglalapot kapunk, *2 pont*
melynek oldalai 6 illetve 8 cm hosszúak. *1 pont*
Egy téglalap területe $6 \cdot 8 = 48$ cm^2. *2 pont*
A levágott terület $2 \cdot 48 = 96$ cm^2. *1 pont*
A megmaradt terület 196 – 96 = 100 cm^2. *2 pont*
A megmaradt négyzet oldala 10 cm. *2 pont*
Összesen: 12 pont

6. feladat: Van öt dobozunk (nagy méretűek), amelyekben sorban 1; 2; 3; 4; 5 babszem található. Minden egyes lépésben tetszőleges három dobozt kiválasztunk, és azok mindegyikébe pontosan egy babszemet helyezünk. (Ezt a lépést akárhányszor végre tudjuk hajtani.)

a) Írd le, milyen lépésekkel érhetjük el, hogy mindegyik dobozban 6 db babszem legyen! (4 pont)

b) Elérhető-e valahány lépéssel, hogy mindegyik dobozban 2019 db babszem legyen? (5 pont)

c) Elérhető-e valahány lépéssel, hogy mindegyik dobozban 2018 db babszem legyen? (5 pont)

Megoldás:

a) Egy lehetséges eljárás a kezdeti 1 – 2 – 3 – 4 – 5 állapotból indulva:
Első lépés után: 2 – 3 – 3 – 5 – 5
Második lépés után: 3 – 4 – 4 – 5 – 5
Harmadik lépés után: 4 – 5 – 5 – 5 – 5
Negyedik lépés után: 5 – 6 – 6 – 5 – 5
Ötödik lépés után: 6 – 6 – 6 – 6 – 6

4 pont

b) A 6 – 6 – 6 – 6 – 6 állapot után folytatva a babszemek elhelyezését, vizsgáljuk meg, mikor érhető el ismét, hogy minden dobozban ugyanannyi babszem legyen. *1 pont*
Hatodik lépés után: 7 – 7 – 7 – 6 – 6
Hetedik lépés után: 7 – 7 – 8 – 7 – 7
Nyolcadik lépés után: 8 – 8 – 8 – 8 – 7
Kilencedik lépés után: 9 – 9 – 8 – 8 – 8
Tizedik lépés után: 9 – 9 – 9 – 9 – 9

2 pont

Tehát öt lépéssel elérhető, hogy minden dobozban hárommal nő a babszemek száma.
A dobozokban most a babszemek száma kilenc. Mivel $2019 = 9 + 670 \cdot 3$, *1 pont*
ezért ha még 670-szer megcsináljuk az előző lépéssorozatot, elérjük, hogy minden dobozban 2019 db babszem legyen. *1 pont*

c) Eredetileg a dobozokban összesen 1+2+3+4+5=15 db babszem volt, ez az összeg osztható hárommal. *1 pont*
Az összeget minden lépés után 3-mal növeljük, tehát mindig osztható marad hárommal.
2 pont
Az $5 \cdot 2018$ viszont nem osztható hárommal, mivel sem az 5, sem a 2018 nem osztható 3-mal.
1 pont
Tehát, nem érhető el, hogy minden dobozban pontosan 2018 db babszem legyen. *1 pont*

Összesen: 14 pont

Maximális pontszám: 60 pont

Budapest, 2019. január 7.