

Pálmai Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny

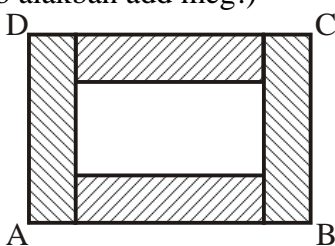
2016. január 8.

Fontos információk: Az alábbi feladatok megoldására 90 perced van. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg. A megoldásokat indokold, a végeredmény közlése csak 1 pont, a többi a magyarázatra kapod. Számológépet, mobiltelefont nem használhatsz (még időmérésre sem).

1. feladat: Jancsi, aki kacsákat tenyészt, szeretne lovat vásárolni. A piacon 1 kacsáért annyiba kerül, mint 2 csirke. 6 csirke árértékűen vásárolhatunk 1 pulykát. 20 pulykát eladva annyi pénzhez jutunk, amennyiért 1 lovat és még 20 csirkét kapunk. Hány kacsát kell eladnia Jancsinak, hogy az árukból meg tudjon venni egy lovat?

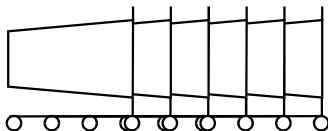
(6 pont)

2. feladat: Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos vágásokkal öt egyforma (egybevágó) téglalagra daraboltunk. A téglalapokból négyet az ábra szerint összeillesztettünk. Hányszorosa az $ABCD$ téglalap területe az eredeti négyzet területének? (Az ábra nem méretarányos. A végeredményt a lehető legegyszerűbb alakban add meg!)



(8 pont)

3. feladat: Egy bevásárlóközpont parkolójában az ábrán látható módon tolják egybe a vásárlók által nem használt bevásárlókocsikat. Ha egymásba tolván 11 kocsi összesen 310 cm, 21 kocsi összesen 510 cm, akkor hány cm hosszú egy bevásárlókocsi?



(10 pont)

4. feladat: Karácsonyi ajándékaink csomagolásához szalagot vásároltunk, melynek hossza 10 méter 20 centiméter. A szalagot 150 és 120 cm hosszú darabokra vágtuk, örömmünkre hulladék nem maradt. Hogy vághattuk fel a szalagot, hány darab 150 illetve 120 cm-es lehet a részek között?

(11 pont)

5. feladat: Albert, Barna, Csongor, Dénes és Eduárd lovagolni indulnak. Az istállóban öt ló áll rendelkezésükre: Fekete, Kése, Pej, Tarka és Sárga. Albert csak Sárgán lovagolhat, Pejt csak Barna, Csongor és Dénes, Kesét pedig csak Barna és Csongor tudja megülni. Hányféleképpen tud az öt fiú együtt kilovagolni?

(11 pont)

6. feladat: 125 db 1 cm élű kockából egy nagy kockát építünk. Hogyan vegyünk el 3 db kis kockát, hogy a nagy kocka felszíne 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12 cm^2 -rel növekedjen? (Elég, ha mindegyik lehetőségre csak egy példát írsz.)

(14 pont)

Jó munkát, jó versenyzést kívánunk!

Megoldások

1. feladat: Jancsi, aki kacsákat tenyészt, szeretne lovat vásárolni. A piacon 1 kacsá annyiba kerül, mint 2 csirke. 6 csirke árért vásárolhatunk 1 pulykát. 20 pulykát eladva annyi pénzhez jutunk, amennyiért 1 lovat és még 20 csirkét kapunk. Hány kacsát kell eladnia Jancsinak, hogy az áruból meg tudjon venni egy lovat?

(6 pont)

Megoldás:

Mivel 1 pulyka 6 csirkét ér, ezért 20 pulyka 120 csirkével cserélhető.

(1 pont)

1 lovat és még 20 csirkét kap 20 pulyka, vagyis 120 csirke ellenében,

(1 pont)

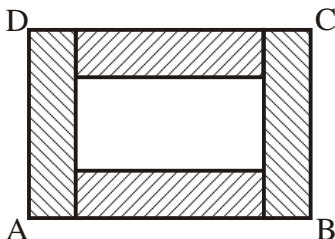
ebből adódik, hogy 100 csirke ér egy lovat.

(2 pont)

2 csirke egy kacsával egyenértékű, ezért egy ló ára, vagyis 100 csirke, 50 kacsával egyenlő.

(2 pont)

2. feladat: Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos vágásokkal öt egyforma (egybevágó) téglalapra daraboltunk. A téglalapokból négyet az ábra szerint összeillesztettünk. Hányszorosa az $ABCD$ téglalap területe az eredeti négyzet területének? (Az ábra nem méretarányos. A végeredményt a lehető legegyszerűbb alakban add meg!)



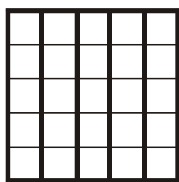
(8 pont)

Megoldás:

Rajzoljuk le a négyzetet a téglalapokkal! A téglalap hosszabb oldala a rövidebb oldalának ötszöröse.

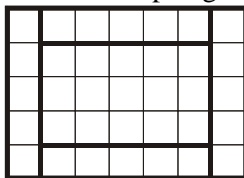
(1 pont)

Felbontjuk a téglalapokat kis négyzetekre: egy téglalap 5 kis négyzetből, az eredeti nagy négyzet 25 kis négyzetből áll.



(2 pont)

Az $ABCD$ téglalap egyik oldala hétszerese, másik oldala pedig ötszöröse a kis négyzete oldalának.



(2 pont)

Az $ABCD$ téglalap területe 35 kis négyzet.

(1 pont)

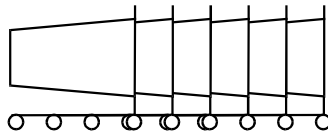
Tehát a téglalap területe a négyzet területének $35/25=$

(1 pont)

$=7/5$ -szöröse.

(1 pont)

3. feladat: Egy bevásárlóközpont parkolójában az ábrán látható módon tolják egybe a vásárlók által nem használt bevásárlókocsikat. Ha egymásba tolva 11 kocsi összesen 310 cm, 21 kocsi összesen 510 cm, akkor hány cm hosszú egy bevásárlókocsi?



(10 pont)

Megoldás:

Ha a 21 összetolt kocsi hosszából kivonjuk a 11 összetolt kocsi hosszát, akkor 200 cm-t kapunk.

(1 pont)

Ez pontosan tíz kocsi együttes kilógása az előttük levő kocsihoz képest.

(2 pont)

Ha kétszer kihúzzunk 10-10 kocsit az összetolt kocsisorból,

(2 pont)

akkor éppen $200 + 200 = 400$ cm-rel rövidül meg a sor.

(2 pont)

10+10 kocsi elhúzásával csak 1 kocsi marad a 21-ből,

(1 pont)

így egy kocsi hossza $510 - 400 = 110$ cm.

(2 pont)

4. feladat: Karácsonyi ajándékaink csomagolásához szalagot vásároltunk, melynek hossza 10 méter 20 centiméter. A szalagot 150 és 120 cm hosszú darabokra vágtuk, örömmünkre hulladék nem maradt. Hogy vághattuk fel a szalagot, hány darab 150 illetve 120 cm-es lehet a részek között?

(11 pont)

Megoldás:

10 méter 20 cm átváltva 1020 cm.

(1 pont)

$7 \cdot 150 = 1050$, ami nagyobb, mint az 1020, tehát, legfeljebb 6 db 150 cm-es darabunk lehet.

(1 pont)

$6 \cdot 150 = 900$ és $900 + 120 = 1020$,

(1 pont)

ezért lehet **6 db 150 cm-es és 1 db 120 cm-es** darabunk.

(1 pont)

$2 \cdot 150 = 300$ és $1020 - 300 = 720$, továbbá $720 : 120 = 6$,

(1 pont)

ezért lehet **2 db 150 cm-es és 6 db 120 cm-es** darabunk.

(1 pont)

5, 4, 3, 1, 0 db 150 cm-es darabunk nem lehet, ugyanis:

$5 \cdot 150 = 750$ és $1020 - 750 = 270$,

270-ben a 120 nincs meg maradék nélkül.

$4 \cdot 150 = 600$ és $1020 - 600 = 420$,

420-ban a 120 nincs meg maradék nélkül.

$3 \cdot 150 = 450$ és $1020 - 450 = 570$,

570-ben a 120 nincs meg maradék nélkül.

$1 \cdot 150 = 150$ és $1020 - 150 = 870$,

870-ben a 120 nincs meg maradék nélkül.

$(0 \cdot 150 = 0$ és $1020 - 0 = 1020)$

1020-ban a 120 nincs meg maradék nélkül.

(5 pont)

5. feladat: Albert, Barna, Csongor, Dénes és Eduárd lovagolni indulnak. Az istállóban öt ló áll rendelkezésükre: Fekete, Kese, Pej, Tarka és Sárga. Albert csak Sárgán lovagolhat, Pejt csak Barna, Csongor és Dénes, Kesét pedig csak Barna és Csongor tudja megülni. Hányféleképpen tud az öt fiú együtt kilovagolni?

(11 pont)

Megoldás:

Sárgán Albert lovagol.

(1 pont)

Kesének kétféle lovasa lehet,

(2 pont)

ezen lovas kiválasztása után már Pejnek is csak kétféle lovasa lehet.

(2 pont)

Fekete és Tarka osztozik a maradék két lovason kétféleképpen.

(2 pont)

Tehát összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ -féleképpen tudnak kilovagolni együtt.

(4 pont)

Másképpen:

Foglaljuk a lehetőségeket táblázatba:

Kese	Pej	Fekete	Tarka	Sárga
B	C	D	E	A
B	C	E	D	A
B	D	C	E	A
B	D	E	C	A
C	B	D	E	A
C	B	E	D	A
C	D	B	E	A
C	D	E	B	A

Pontozás: Tetszőleges öt lehetőség 1-1 pont, minden további leírt lehetőség 2-2 pont.

6. feladat: 125 db 1 cm élű kockából egy nagy kockát építünk. Hogyan vegyünk el 3 db kis kockát, hogy a nagy kocka felszíne 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12 cm²-rel növekedjen? (Elég, ha mindegyik lehetőségre csak egy példát írsz.)

(14 pont)

Megoldás: Néhány lehetőség.

Nem változik a felszín, ha:

- csúcsot tartalmazó egyes kockákat,
- **vagy** összefogott téglatestet csúcstól kezdve,
- **vagy** összefogott L alakot – melynek középső kockája egy csúcs – veszünk el.

(2 pont)

2-vel nő a felszín, ha:

- valamelyik él közepéről veszünk el egy kockát, a másik kettőt pedig csúcsokból,
- **vagy** összefogott téglatestet egy él közepéből veszünk el.

(2 pont)

4-gyel nő a felszín, ha:

- 2 db él közepéről veszünk el egy-egy kockát, a harmadikat egy csúcsból,
- **vagy** élre merőlegesen 2 db kockát, a harmadikat egy csúcsból,
- **vagy** L alakban az él belsejéből, két kocka van az élen,
- **vagy** lap közepéből egyet, a többit csúcsból.

(2 pont)

6-tal nő a felszín, ha:

- 3 db él közepéről veszünk el egy-egy kockát,
- **vagy** egy lap közepéből egy kockát, egy él közepéről egyet, egyet pedig egy csúcsból,

– **vagy** kettőt összefogva az élre merőlegesen és még egyet egy másik él közepéről.

(2 pont)

8-cal nő a felszín, ha:

– egy lap közepénél veszünk el két összefogott kockát a lapra merőlegesen, és még egy kockát egy csúcsból,

– **vagy** két lap közepéből egy-egy kockát, és még egy kockát egy csúcsból,

– **vagy** egyet egy lap közepéből és kettőt különböző élek közepéről.

(2 pont)

10-zel nő a felszín, ha:

– lap közepéből veszünk el két összefogott kockát a lapra merőlegesen, és még egy kockát egy él közepéből,

– **vagy** két lap közepéből egy-egy kockát, és még egy kockát egy él közepéből.

(2 pont)

12-vel nő a felszín, ha:

– egy lap közepénél három kockát összefogva veszünk el a lapra merőlegesen („kifúrjuk a nagy kockát”),

– **vagy** három lap közepéből egy-egy kockát.

(2 pont)