

Bolyai verseny, 2011 (Megoldás és pontozás)

1. feladat

Hány 10 ezernél nagyobb, de 12 ezernél kisebb pozitív egész szám van, amely tükrös? Egy szám akkor tükrös, ha számjegyeit sorban olvasva, ugyanazt kapjuk, akár a legnagyobb helyiértéknél kezdjük, akár a legkisebbnél. (Például a háromjegyű számok között az 565 tükrös, az 567 nem tükrös.)

7 pont

Megoldás:

A 10 ezernél nagyobb és 11 ezernél kisebb számok közül azok felelnek meg, amelyek 10-zel kezdődnek és 01-gyel végződnek. A középső számjegy a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek akármelyike, vagyis tízféle lehet.

3 pont

A 11 ezernél nem kisebb és 12 ezernél kisebb, megfelelő számoknak 11-gyel kell kezdődni és végződni. A középső szám itt is tízféle lehet, így ezekből is tíz van.

3 pont

Tehát összesen húsz ilyen szám van.

1 pont

2. feladat

A karácsonyfánkon piros, sárga és kék gömbök vannak. Kétszer annyi a sárga, mint a kék, háromszor annyi a piros, mint a sárga. Összesen 36 gömb díszíti a fát. Hány piros, hány kék, hány sárga gömb van a karácsonyfán?

8 pont

Megoldás:

Piros gömbből hatszor annyi van, mint a kékből.

2 pont

A három színből összesen kilencszer annyi van, mint csak a sárgából.

2 pont

Ezért $36 : 9 = 4$ kék, $2 \cdot 4 = 8$ sárga, $3 \cdot 8 = 24$ piros gömb van a karácsonyfán.

3 pont

Ellenőrzés: $4 + 8 + 24 = 36$, a különböző színek aránya is megfelelő.

1 pont

3. feladat

0,24681012...2010

A fenti számot úgy kaptuk, hogy a tizedesvessző után egymás mellé leírtuk a páros számokat 2-től 2010-ig.

a) Melyik számjegy áll a tizedesvesszőtől jobbra az 58. helyen?

b) Összesen hány számjegyet írtunk le a tizedesvesszőtől jobbra?

3 + 7 pont

Megoldás:

a) Egyjegyű páros számból van 4 db. $58 - 4 = 54$, $54 : 2 = 27$. kétjegyű páros szám egyesek helyén álló számjegy a keresett számjegy.

2 pont

A 27. kétjegyű páros szám a 62, így a tizedesvesszőtől jobbra az 58. helyen a 2 számjegy áll.

1 pont

b) Egyjegyű páros számból van 4 db → 4 számjegy

1 pont

kétjegyű páros számból van 45 db → $45 \cdot 2 = 90$ számjegy,

1 pont

háromjegyű páros számból van 450 db → $450 \cdot 3 = 1350$ számjegy,

2 pont

1000-től 1998-ig 500 db páros szám van, 2000-2010-ig 6 db → $506 \cdot 4 = 2024$ számjegy.

2 pont

Összesen $4 + 90 + 1350 + 2024 = 3468$ számjegyet írtunk le a tizedesvesszőtől jobbra.

1 pont

4. feladat

Nagymama fánkot süttött az unokáinak. Először Zsuzsi ért haza, megette a fánkok tizedét és még egyet, így 44 fánk maradt a tálon.

a) Hány fánkot süttött nagymama?

b) Azokon a fánkokon, amit Zsuzsi meghagyott, a többi unoka egyenlően osztott meg. Összesen hány unokája lehet nagymamának, ha mindegyikük egész számú fánkot evett, mindenki legalább 3, legfeljebb 25 darabot fogyasztott? 3 + 7 pont

Megoldás:

A fánkok $\frac{9}{10}$ részénél 1-gyel kevesebb maradt meg. Tehát nagymama $(44 + 1) \cdot \frac{10}{9} = 50$

fánkot süttött. 3 pont

A 44-nek megkeressük az osztóit: 1, 2, 4, 11, 22, 44. (Ennyi unoka lehetne, vagy ennyi fánkot ehetek volna fejenként.) 4 pont

Mivel legalább 3, legfeljebb 25 fánkot evett a többi unoka, ezért az osztók közül csak a 4, 11 és a 22 lesz jó. 2 pont

Így nagymamának 11, 4, vagy 2 unokája van Zsuzsin kívül, Zsuzsival együtt 12, 5 vagy 3. 1 pont

5. feladat

Katinak 36 darab 1cm élű kis kockája van. Hányféle téglatestet tud kirakni, ha mindegyik téglatesthez mindegyik kis kockát felhasználja? 10 pont

Megoldás:

Az 1cm magasságú téglatestek élei lehetnek: 1cm és 36cm, 2cm és 18cm, 3cm és 12cm, 4cm és 9cm, vagy 6cm és 6cm. Ötféle téglatest. 5 pont

A 2cm magas téglatestek közül már csak azokat vesszük figyelembe, amelyeknek mindegyik éle legalább 2cm, mert a többit előbb megszámláltuk. Így a másik két él 2cm és 9cm, vagy 3cm és 6cm. Kétféle téglatest. 2 pont

A 3cm magas téglatestek közül már csak azokat vesszük figyelembe, amelyeknek mindegyik éle legalább 3cm, mert a többit már összeszámláltuk. A másik két él 3cm és 4cm, csak egy téglatest van. 1 pont

Összesen nyolcféle testet tud építeni Kati. 2 pont

(Csak akkor kaphatsz 10 pontot, ha mindegyik téglatestet egyszer soroltad fel, és csak a jókat említetted.)

6. feladat

A jósdában hárman ültek: az Igazság mindig igazat mondott, a Hazugság mindig hazudott, és a Bölcsesség olykor igazat mondott, olykor hazudott.

Egy filozófus megkérdezte a bal oldalt: Ki ül melletted? A válasz ez volt: Az Igazság.

A középsőt kérdezte: Ki vagy? A válasz: A Bölcsesség.

A jobb oldalt kérdezte: Ki ül melletted? A válasz: a Hazugság.

Milyen sorrendben ültek a jósdában? 10 pont

Megoldás:

A bal oldalon ülő nem lehetett az Igazság, mert ő igazat mond, s nem mondhatta volna, hogy mellette az Igazság ült. 2 pont

A középen ülő nem lehetett az Igazság, mert akkor a középen ülő válasza "Az Igazság." lett volna. Így az Igazság a jobb oldalon ült. 3 pont

A jobb oldali tehát igazat mondott, azaz mellette (középen) a Hazugság ült. 2 pont

Így bal oldalon a Bölcsesség ült. 2 pont

Válasz: bal oldalon a Bölcsesség, középen a Hazugság, jobb oldalon az Igazság ült.

(A Bölcsesség és a Hazugság hazudott, az Igazság pedig igazat mondott.) 1 pont