GARA A SQUADRE

IX. COPPA KAVICS

13. 03. 2013.

- Per ogni quesito dovete scrivere un numero intero fra 0000 e 9999 sui fogli da risposta.
- Se la vostra risposta non un numero intero, allora scrivete la parte intera del vostro risultato sul foglio.
- Se il risultato un numero negativo o non esiste, allora scrivete 0000 sul foglio.
- Se il risultato supera 9999 o non univoco, allora scrivete 9999 sul foglio.
- Possono essere utili i seguenti valori approcci:

$$\sqrt{2} = 1.4142; \quad \sqrt{3} = 1.7321; \quad \sqrt{5} = 2.2361; \quad \sqrt{7} = 2.6458; \quad \pi = 3.1416$$

Limiti di tempo

- Avete 10 minuti per scegliere il problema jolly;
- Avete la possibilita' a rivolgersi alla giuria per fare domande rispetto il testo per tutto il tempo della gara.
- Durata della gara: 120 minuti.

1. Sia P un punto interno del triangolo equilatero ABC. I piedi delle perpendicolari da P ai lati AB, BC e CA sono rispettivamente C_1, A_1 e B_1. Dato che $AC_1 = 4$, $C_1B = 8$ e $BA_1 = 5$, trova il valore di $CB_1 \cdot B_1A$.

20 punti

2. Trova il numero degli interi di 8 cifre che si riducono a un nono del proprio valore quando si omette la loro prima cifra.

20 punti

3. In una fila ci sono 21 persone, tutte di altezza diversa l'una dall'altra. La terza persona piú bassa é Andrea. A partire dalla prima, ciascuna persona conta quante persone piú alte di sĂŠ le stanno davanti in coda. Ecco l'elenco: 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... 9, 9, 10.
Quante persone in coda dietro Andrea sono piú alte di lui?

20 punti

4. Dato il triangolo ABC, A_1 e B_1 sono punti interni dei lati BC e AC. I segmenti AA_1 e BB_1 si intersecano nel punto M. Le aree dei triangoli AMB_1, AMB e BMA_1 sono rispettivamente di $3, 7$ e 7 unitá.
Qual é l'area del quadrilatero CB_1MA_1?

25 punti

5.

$$\prod_{k=2}^{100} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{p}{q}$$

Trova il valore di $p+q$ sapendo che p e q sono interi positivi primi tra loro.

25 punti

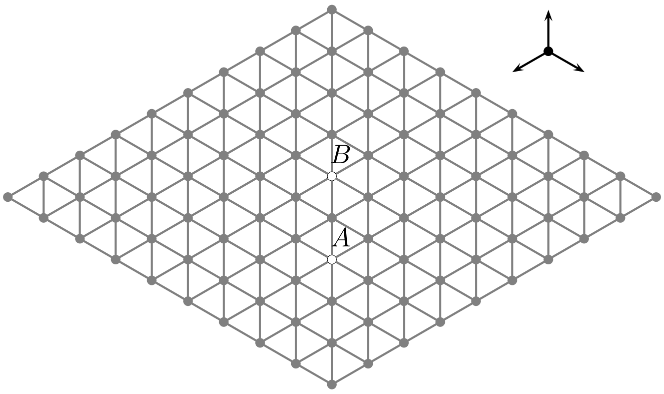
6. I punti B_1, B_2, B_3 e B_4 si trovano sui lati del quadrato unitario $A_1A_2A_3A_4$, in modo tale che B_i sia sul lato A_iA_{i+1} (s'intende che $A_5 = A_1$) e $A_iB_i = \frac{1}{n}$. Trova il piú piccolo intero positivo n tale che l'area del quadrato delimitato dalle linee A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 and A_4B_1 sia almeno 0.9.

25 punti

7. L'insieme di numeri positivi M ha le due seguenti proprietá: i) nessuno degli elementi di M é divisibile per 7; ii) tra 4 elementi qualsiasi di M, ne esistono alcuni la cui somma é un multiplo di 7.
Qual é il massimo numero di elementi dell'insieme M?

30 punti

8. Un punto vaga nel reticolo regolare triangolare *infinito*. Puó muoversi da un punto del reticolo ad un altro adiacente in una qualsiasi delle tre direzioni indicate nel diagramma. Partendo dal vertice A, quanti modi esistono per arrivare al vertice B in non piú di 13 passi? (Sono compresi quei percorsi che toccano B anche prima di arrivarci al passo finale.) 30 punti



9. Trova il valore di $\lfloor 100xy \rfloor$ se x e y sono numeri razionali che soddisfano

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}.$$

30 punti

10. Quante permutazioni $i_1, i_2, \ldots i_{16}$ dei numeri $1, 2, \ldots, 16$ hanno la seguente proprietá: $|i_k - k| \leq 1$ per ciascun $1 \leq k \leq 16$?

30 punti

11. Dato un tetraedro regolare, considera tutti i piani che passano attraverso uno dei suoi spigoli ed il punto medio dello spigolo opposto. In quante parti é diviso da quei piani il tetraedro?

30 punti

12. Gli spigoli e la diagonale spaziale di un cuboide rettangolare, in metri, sono dei numeri interi. Si sa anche che la misura dell'area della superficie in m^2 é uguale al volume in m^3. Trova la massima lunghezza possibile della diagonale spaziale.

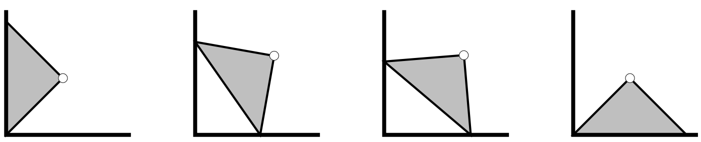
30 punti

13. Sia $a = 1 + \sqrt{5}$. Qual é il valore di

$$S = (4-a) \cdot \sqrt{2+a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{3a+4}?$$

35 punti

14. Un triangolo rettangolo isoscele si sposta in una regione rettangolare R mantenendo gli estremi dell'ipotenusa lungo le semirette che formano R, come si vede sulla diagramma. Trova la lunghezza totale del percorso attraversata dal vertice rettangolo sapendo che la lunghezza dell'ipotenusa é 2 metri. 35 punti



15. Quanti modi esistono per scegliere quattro vertici di un tetraicosagono (24-gono) convesso in modo tale che ciascun lato del quadrilatero convesso definito dai vertici scelti sia una *diagonale* del tetraicosagono? (L'ordine in cui vengono scelti i quattro punti non ha importanza.)

35 punti

16. Ci sono n scatole in fila, e in qualcuna c'é una moneta. Dobbiamo decidere se esistono due scatole non vuote ed adiacenti nella fila. Per trovare la risposta si puo' aprire scatole a scelta, una dopo l'altra. Per un valore di n questo compito viene detta *difficile* se seguendo qualunque strategia si puo' capitare che per esserne sicuri dobbiamo aprire ciascuna scatola. Per quanti valori di $n \in \{1, 2, \dots, 2013\}$ e' difficile questo compito?

40 punti

17. Per un intero $n < 10000$, l'intero positivo k si dice *legato* a n se il resto della divisione di n per $2k+1$ é uguale a k. Trova il valore di n con il maggior numero di legati.

40 punti

18. La distanza dei punti A e B é 900 centimetri. Una formica si trova al punto A e vuole arrivare al punto B attraverso un percorso di esattamente 100 segmenti, avvicinandosi continuamente a B durante tutto il percorso. La somma dei 100 segmenti in centrimetri é S. Qual é il maggior valore possibile di S?

40 punti

19. Con i numeri $1, 2, \dots, 8$ sono formate a caso quattro coppie. Considera i quattro intervalli formati da queste coppie. Sia p la probabilitá che uno di questi intervalli intersechi ciascuno degli altri tre.
Qual é la parte intera di $2310 \cdot p$?

40 punti

20. Andrea, Bruno e Carlo giocano di un gioco di tanti turni. All'inizio hanno rispettivamente 15, 17 e 20 dollari. In ciascun turno due di coloro che hanno denaro a rischiare, vengono chiamati a caso a giocare, l'uno contro l'altro. Ciascuno mette sul piatto un dollaro e inizia a giocare con la stessa probabilitá di vincere. Il vincitore del turno prende i due dollari. Se qualcuno ha esaurito i suoi risorsi, esce dal gioco. Il gioco termina quando uno dei giocatori ha riuscito a raccogliere tutte le monete.

Qual é il numero medio di turni in questo gioco?

45 punti

21. Andrea ha scritto i numeri $1, 2, \dots 81$ nei campi di una griglia 9×9. Bruno vuole scoprire la posizione di ciascun numero nella griglia. Puó scegliere qualsiasi regione quadrata circoscritta dalle righe del reticolo della griglia, e Andrea gli dice tutti i numeri, in ordine arbitrario, contenuti nella regione scelta. Qual é il numero minimo di domande che deve porre Bruno per scoprire la griglia di Andrea?

50 punti