A 2020. évi Kardos-Montágh Matematikaverseny döntőjének megoldásai

1. feladat: *Az $x^3 + ax + b = 0$ egyenlet gyökei u, v és w. Igazoljuk, hogy*

$$2(u^5 + v^5 + w^5) = 5u \cdot v \cdot w(u^2 + v^2 + w^2).$$

I. Megoldás. *(Bokor Endre megoldása)*

A feladatban az alapvető egyenleteket, amelyeket a bizonyítás során használunk a Viéte-formulák jelentik. Ezek teremtenek kapcsolatot az f egyenlet együtthatói és gyökei között.

$$uvw = -b, \tag{1}$$

$$uv + uw + vw = a, \tag{2}$$

$$u + v + w = 0. \tag{3}$$

Az igazolandó összefüggés két oldalán szimmetrikus polinomok állnak. A szimmetrikus polinomok alaptétele szerint ezek előállíthatók elemi szimmetrikus polinomok (a fentebbi Viéte-formulák) polinomjaként. Vagyis mindkét oldal kifejezhető a és b függvényében. Következőkben több lépésben járunk el, hogy megállapítsuk a két oldalt a és b polinomjaként.

I.) Vegyük a harmadik formula négyzetét, majd felhasználhatjuk a második formulát.

$$0 = (u + v + w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$$

$$S_I = u^2 + v^2 + w^2 = -2a$$

II.) Itt mindhárom összefüggést alkalmazni kell.

$$0 = (u + v + w)(uv + uw + vw) = u^2v + v^2u + u^2w + w^2u + v^2w + w^2v + 3uvw$$

$$S_{II} = u^2v + v^2u + u^2w + w^2u + v^2w + w^2v = 3b$$

III. Már fel kell használni az előző részben kapott eredményt is.

$$0 = (u + v + w)^3 = u^3 + v^3 + w^3 + 3(u^2v + v^2u + u^2w + w^2u + v^2w + w^2v) + 6uvw =$$

$$= u^3 + v^3 + w^3 + 3S_{II} + 6uvw$$

$$S_{III} = u^3 + v^3 + w^3 = -3b$$

IV.

$$(u+v+w)(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = u^3v^2+v^3u^2+u^3w^2+w^3u^2+v^3w^2+w^3v^2+uvw(uv+uw+vw)$$

$$S_{IV} = u^3v^2 + v^3u^2 + u^3w^2 + w^3u^2 + v^3w^2 + w^3v^2 = ab$$

V. Végül pedig a következőt fejezzük ki.

$$(u^2 + v^2 + w^2)(u^3 + v^3 + w^3) = u^5 + v^5 + w^5 + u^3v^2 + v^3u^2 + u^3w^2 + w^3u^2 + v^3w^2 + w^3v^2 =$$

$$= S_I \cdot S_{III} = u^5 + v^5 + w^5 + S_{IV}$$
$$S_V = u^5 + v^5 + w^5 = 5ab$$

Összegezve, a $2(u^5 + v^5 + w^5) = 5uvw(u^2 + v^2 + w^2)$ egyenlet bal oldala $2S_V = 10ab$, jobb oldala pedig $5 \cdot (-b) \cdot S_I = 10ab$ szerint fejezhető ki a és b függvényeként. Vagyis az egyenlet valóban igaz, hiszen két oldala bármely a és b értékek esetén megegyezik.

II. Megoldás. *(Péter Kristóf megoldása)*

Ismét az egyenlet Viéte-formuláit használjuk.

$$u + v + w = 0, \tag{4}$$
$$uv + vw + wu = a, \tag{5}$$
$$uvw = -b. \tag{6}$$

Vegyük (4) négyzetét és helyettesítsük be (5)-öt.

$$(u + v + w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + 2wu,$$
$$0 = u^2 + v^2 + w^2 + 2a,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a. \tag{7}$$

Az $u,\ v,\ w$ az $f(x) = x^3 + ax + b = 0$ egyenlet gyökei, vagyis

$$u^3 + au + b = 0 \tag{8}$$
$$v^3 + av + b = 0 \tag{9}$$
$$w^3 + aw + b = 0. \tag{10}$$

A három egyenlet összegéből a köbök összege a korábbiakkal kifejezhető:

$$(8)+(9)+(10) \qquad u^3 + v^3 + w^3 + a(u + v + w) + 3b = 0,$$
$$u^3 + v^3 + w^3 = -3b. \tag{11}$$

Ha a (8),(9), (10) egyenleteket megszorozzuk a megfelelő gyök négyzetével, akkor az ötödik hatványok összegét is ki tudjuk fejezni az elemi szimmetrikus polinomokkal:

$$u^5 + au^3 + bu^2 = 0 \tag{12}$$
$$v^5 + av^3 + bv^2 = 0 \tag{13}$$
$$w^5 + aw^3 + bw^2 = 0. \tag{14}$$

Ezek öszegéből

$$(u^5 + v^5 + w^5) + a(u^3 + v^3 + w^3) + b(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$
$$u^5 + v^5 + w^5 + a(-3b) + b(-2a) = 0,$$
$$u^5 + v^5 + w^5 = 5ab. \tag{15}$$

A bizonyítandó összefüggés bal oldala:

$$2(u^5 + v^5 + w^5) = 10ab,$$

a korábbi eredmények alapján a jobb oldala:

$$5uvw(u^2 + v^2 + w^2) = 5(-b)(-2a) = 10ab.$$

A két oldal megegyezik, az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések:

1. *Bokor Endre* megoldásának elején megemlíti a szimmetrikus polinomok alaptételét, amely szerint minden szimmetrikus polinom felírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Itt a feladat állítása szerint két szimmetrikus polinom egyformán írható fel az elemi szimmetrikusokkal.

2. *Telek Zsigmond* megoldásának végén említést tesz a Newton-Girard formulákról, amelyekkel közvetlenül bizonyítható lenne az állítás.

`https://mathworld.wolfram.com/Newton-GirardFormulas.html`

2. feladat: *Oldjuk meg az*

$$(x-a)^4 + (x-b)^4 = (a-b)^4$$

egyenletet, ahol a *és* b *rögzített valós számok.*

I. Megoldás. *(Bokor Endre megoldása)*

Ennek az egyenletnek két triviális megoldása az $x_1 = a$ és $x_2 = b$. Következésképp az $f(x)$ polinom gyöktényezős felbontása a következő.

$$f(x) = (x-a)^4 + (x-b)^4 - (a-b)^4 = (x-a)(x-b)\cdot h(x)$$

Itt $h(x)$ egy másodfokú polinom, amelynek gyökeit a másodfokú egyenletek megoldóképlete alapján egyszerűen meg lehet kapni. A következőkben meghatározzuk a $h(x)$ polinomot. Első lépésben alkalmazzuk többször a négyzetek különbségére vonatkozó azonosságot.

$$(x-b)^4 - (a-b)^4 = \left[(x-b)^2 - (a-b)^2\right]\cdot\left[(x-b)^2 + (a-b)^2\right] =$$

$$= (x-a)(x-b+a-b)\cdot\left[(x-b)^2 + (a-b)^2\right]$$

Majd ezek alapján kiemelhető az első tényező az összegből.

$$f(x) = (x-a)\cdot\left[(x-b)^3 + (a-b)^2(x-b) + (x-b)^2(a-b) + (a-b)^3 + (x-a)^3\right]$$

Előbbit át lehet alakítani a következő azonosságok felhasználásával.

$$(a-b)^3 + (x-a)^3 = (x-b)\left[(a-b)^2 - (a-b)(x-a) + (x-a)^2\right]$$

$$(x-b)(a-b) - (a-b)(x-a) = (a-b)^2$$

Kiemelve a második gyöktényezőt azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (x-a)(x-b)\cdot\left[(x-b)^2 + (a-b)^2 + (x-b)(a-b) + (a-b)^2 - (a-b)(x-a) + (x-a)^2\right] =$$

$$= (x-a)(x-b)\cdot\left[(x-b)^2 + (x-a)^2 + 3(a-b)^2\right]$$

A harmadik tényező a keresett $h(x)$ polinom. Ennek normáltja

$$\frac{h(x)}{2} = x^2 - x(a+b) + 2b^2 + 2a^2 - 3ab$$

Először vizsgáljuk a diszkriminánst.

$$D = (a+b)^2 - 8a^2 - 8b^2 + 12ab = -7(a-b)^2 \le 0$$

Mivel ez egy negatív érték és egy négyzetszám szorzata, ezért mindig kisebb vagy egyenlő, mint nulla. Valós számok halmazán tehát két megoldás létezik, ha $a \neq b$. A komplex számtest fölött azonban további két megoldás található (az algebra alaptétele alapján), amelyek

$$x_3 = \frac{a+b+(a-b)\sqrt{7}\cdot i}{2} \qquad x_4 = \frac{a+b-(a-b)\sqrt{7}\cdot i}{2}$$

Látható, hogy $a = b$ esetén egyetlen megoldása van az egyenletnek, egyébként pedig négy, amelyek közül kettő valós, kettő pedig komplex.

II. Megoldás. *(Szapanidu Szofia Athina megoldása alapján)*

Legyen először $x_1 = a$. Ezt behelyettesítve az egyenletbe látjuk, hogy

$$(a-a)^4 + (a-b)^4 = (a-b)^4,$$

megkaptuk az egyenlet egyik megoldását. Ugyanígy az is azonnal adódik, hogy $x_2 = b$ is megoldás. Rendezzük az egyenletet nullára, majd az x csökkenő hatványai szerint:

$$(a-a)^4 + (a-b)^4 - (a-b)^4 = 0,$$

$$x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4+x^4-4bx^3+6b^2x^2-4b^3x+b^4-a^4+4a^3b-6a^2b^2+4ab^3-b^4=0,$$

$$2x^4-4(a+b)x^3+6(a^2+b^2)x^2-4(a^3+b^3)x++4a^3b-6a^2b^2+4ab^3=0.$$

Az egyenletet 2-vel végigosztva pedig:

$$x^4-2(a+b)x^3+3(a^2+b^2)x^2-2(a^3+b^3)x+2a^3b-3a^2b^2+2ab^3=0.$$

Erre az egyenlet a negyedfokú Viéte-formulák alapján

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 2(a+b),$$
$$x_1x_2x_3x_4 = ab(2a^2-3ab+2b^2).$$

A fentiek alapján $x_1 = a$ és $x_2 = b$. Ebből a hiányzó két gyökre kapunk egy kétismeretlenes egyenletrendszert:

$$x_3+x_4 = a+b,$$
$$x_3x_4 = 2a^2-3ab+2b^2.$$

Ezek egy másodfokú egyenlet Viéte-formulái, tehát a hiányzó két gyököt az

$$x^2-(a+b)x+2a^2-3ab+2b^2=0$$

egyenlet gyökeiként kapjuk meg.

$$x_{3,4} = \frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-8a^2+12ab-8b^2}}{2} = \frac{(a+b)\pm\sqrt{-7(a-b)^2}}{2}.$$

Látható, hogy $a = b$ esetben a diszkrimináns nulla, az egyenletnek valójában csak egy megoldása van. Ha $a \neq b$, akkor a diszkrimináns negatív és a két valós gyök mellett ez utóbbi két gyök komplex szám lesz:

$$x_3 = \frac{(a+b)-\sqrt{7}(a-b)i}{2}, \qquad x_4 = \frac{(a+b)+\sqrt{7}(a-b)i}{2}.$$

III. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Az alábbi egyenletet oldjuk meg a komplex halmazán rögzített $a, b \in \mathbb{C}$-re:

$$(x-a)^4 + (x-b)^4 = (a-b)^4$$

Szembetűnők azonnal az $x_{1,2} = a, b$ gyökök, ezek behelyettesítéssel azonnal adódnak: $0 + (\pm(a-b))^4 \equiv (a-b)^4$. Legyen:

$$P := x - a;\ Q := x - b \implies Q^4 + P^4 = (a-b)^4;$$

$$Q - P = a - b;\ Q^4 + P^4 = (Q-P)^4 \iff 0 = -4Q^3P + 6Q^2P^2 - 4QP^3$$

Ha $x \neq a, b$, akkor $PQ \neq 0$, tehát

$$-2Q^2 + 3QP - 2P^2 = 0.$$

Ez kifejtve:

$$-2x^2 + 4xa - 2a^2 + 3x^2 + 3ab - 3(a+b)x - 2x^2 + 4xb - 2b^2 = 0,$$

$$x^2 - x(a+b) + (2a^2 - 3ab + 2b^2) = 0.$$

Innen a gyökök:

$$x_{3,4} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{\sqrt{-7a^2 + 14ab - 7b^2}}{2} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{\sqrt{7} \cdot i(a-b)}{2}$$

Miután végig ekvivalensen jártunk el, az egyenletnek ez a 4 nem feltétlenül különböző gyöke van.

3. feladat: *Mely valós számok a következő egyenlet megoldásai?*

$$\sqrt[5]{x^3+2x}=\sqrt[3]{x^5-2x}.$$

I. Megoldás. *(Tiefenbeck Flórián megoldása)*

Legyen $f(x)=\sqrt[5]{x^3+2x}$ és $g(x)=\sqrt[3]{x^5-2x}$. Keressük az olyan x értékeket, amire $f(x)=g(x)$. Legyen $h(x)=x$. Ekkor az $f(a)=g(a)$ állítás háromféleképpen lehet igaz:
1. eset: $f(a)>h(a)$ és $g(a)>h(a)$
2. eset: $f(a)<h(a)$ és $g(a)<h(a)$
3. eset: $f(a)=h(a)=g(a)$

1. eset: $f(x)>h(x)$. Ekkor

$$\sqrt[5]{x^3+2x}>x \iff x^3+2x>x^5 \iff -x^5+x^3+2x>0,$$

továbbá

$$g(x)>h(x) \iff \sqrt[3]{x^5-2x}>x \iff x^5-x^3-2x>0.$$

Az egyenlőtlenséget (-1)-gyel szorozva

$$-x^5+x^3+2x<0.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az első eset nem teljesülhet semmilyen x érték esetén.

2. eset: Az első esethez hasonlóan:

$$f(x)<h(x) \iff -x^5+x^3+2x<0$$

$$g(x)<h(x) \iff -x^5+x^3+2x>0.$$

Itt szintén ellentmondásra jutunk.

3. eset:
A továbbiakban elegendő megvizsgálnunk az $f(x)=h(x)$, azaz a

$$\sqrt[5]{x^3+2x}=x$$

esetet. Hatványozás után

$$x^3+2x=x^5,$$

$$-x^5+x^3+2x=0,$$

$$x(^4-x^2-2)=0.$$

Az $x_1=0$ megoldás rögzítése után a megmaradó negyedfokú egyenlet másodfokúra visszavezethető, az x^2-re két értéket kapunk az $x^2=2$-t és az $x^2=-1$-et. Ez utóbbinak a valós számok halmazán nincs megoldása, így az eredeti egyenlet megoldásai

$$x_1=0, \qquad x_2=\sqrt{2}, \qquad x_3=-\sqrt{2}.$$

Ellenőrizzük, hogy ezek valóban teljesítik az eredeti egyenletet:
$x_1=0$
Bal oldal: $\sqrt[5]{0^3+2\cdot 0}=0$; jobb oldal: $\sqrt[3]{0^5-2\cdot 0}=0$.

$x_2 = \sqrt{2}$
Bal oldal: $\sqrt[5]{2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}$; jobb oldal: $\sqrt[3]{2^{\frac{5}{2}} - 2\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}(2-1)} = \sqrt{2}$

Mivel $f(x)$ és $g(x)$ is páratlan függvények, ezért az $x_3 = -\sqrt{2}$-re is fennáll az egyenlőség.

Megjegyzés: Szapanidu Szofia Athina szintén az első megoldásban szereplő $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ függvényekkel dolgozott. Konkrétan kiszámította, hogy $f(x) \geq h(x)$ pontosan a

$$]-\infty, -\sqrt{2}] \bigcup [0, \sqrt{2}]$$

intervallumokban, míg a $g(x) \geq h(x)$ a

$$[-\sqrt{2}, 0] \bigcup [\sqrt{2}, +\infty[$$

intervallumokban teljesül. Jól láthatóan ebből azonnal következik, hogy egyenlők csak a $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$ helyeken lehetnek.

A következő két megoldás szerzői már analízisbeli eszközöket is alkalmaztak.

II. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Tekintsük a következő függvényt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(z) := z^5 + z^3.$$

Legyen továbbá $y := \sqrt[5]{x^3 + 2x} = \sqrt[3]{x^5 - 2x}$. Ebből látjuk, hogy

$$y^5 = x^3 + 2x, \quad \text{és} \quad y^3 = x^5 - 2x.$$

Ezeket összeadva

$$f(y) = y^5 + y^3 = x^3 + 2x + x^5 - 2x = x^5 + x^3 = f(x).$$

Lévén, hogy f mindenhol differenciálható, $f'(z) = 5z^4 + 3z^2 \geq 0$ és f nemkonstans semmilyen intervallumon (csak 0-ban tűnik el a derivált) f szigorúan monoton nő mindenhol, így injektív (egyébként belátható, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, f páratlan, folytonos volta és a Bolzano tétel miatt, hogy bijektív is), tehát $f(x) = f(y) \iff x = y$, hiszen az ellenkező esetben a Lagrange-féle középértéktétel miatt az (x, y) intervallumon lenne olyan w melyre $f'(w) = 0$, ami csak akkor teljesülhetne mint láttuk, ha $w = 0$, ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor, $x < w = 0 < y$, így $f(y) > 0 > f(x) = f(y)$ lenne, ami ellentmondás. Ezzel tehát azt nyertük, hogy:

$$x = y = \sqrt[5]{x^3 + 2x},$$

$$x^5 - x^3 - 2x = 0.$$

Az x kiemelésével

$$x = 0 \quad \text{vagy} \quad x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

Az utóbbiból $x^2 = 2$ vagy $x^2 = -1$, ahonnan, mint az első megoldásban láttuk és ellenőriztük

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}.$$

III. Megoldás. *(Szünder Barna Ferenc megoldása)*

Első lépésként, emeljük az egyenletet a tizenötödik hatványra:

$$x^3(x^2+2)^3 = x^5(x^4-2)^5.$$

A felírt alakból egyértelműen látszik hogy az $x = 0$ egy gyöke az egyenletnek. A nem-nulla gyökök kereséséhez az egyenlet két oldalát leoszthatjuk x^3-nal, így a következőt kapjuk:

$$(x^2+2)^3 = x^2(x^4-2)^5$$

$\pm\sqrt{2}$-t behelyettesítve, az egyenlet igaz, tehát további két gyök a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$. Ezen három gyökön kívül nincsen több valós gyök, ezt fogjuk bizonyítani a továbbiakban.

Az egyenlet két oldalát függvényekként kezelve:

$$f(x) = (x^2+2)^3$$

$$f'(x) = 6x(x^2+2)^2$$
$$f''(x) = 6(x^2+2)^2 + 24x^2(x^2+2)$$

$$g(x) = x^2(x^4-2)^5$$
$$g'(x) = 2x(x^4-2)^5 + 20x^5(x^4-2)^4$$
$$g''(x) = 2(x^4-2)^5 + 40x^4(x^4-2)^4 + 100x^4(x^4-2)^4 + 320x^8(x^4-2)^3$$

Tudjuk hogy a két függvény metszi egymást $\pm\sqrt{2}$-ben, tehát ha ezt követően az egyik függvény deriváltja minden $x > \sqrt{2}$ vagy $x < -\sqrt{2}$ esetén nagyobb mint a másik függvény deriváltja, akkor biztosan kijelenthetjük hogy nem metszik egymást.

$x > \sqrt{2}$:

$$f'(x) = 6x(x^2+2)^2 < 6x(x^4-2)^2 < 6x(x^4-2)^4 < 20x^5(x^4-2)^4 < g'(x)$$

$x < -\sqrt{2}$:

$$f'(x) = 6x(x^2+2)^2 > 6x(x^4-2)^2 > 6x(x^4-2)^4 > 20x^5(x^4-2)^4 > g'(x)$$

$x = -\sqrt[4]{2}$ és $x = \sqrt[4]{2}$ értékek között az $f(x) > 0$ és $g(x) \leq 0$, tehát nem metszik egymást, ezen az intervallumon nincs további gyöke az egyenletnek (a korábban megtalált 0-n kívül, természetesen)

$x = \sqrt[4]{2}$ esetén $f(x) \approx 39,8 \qquad g(x) = 0$

$x = \sqrt{2}$ esetén $f(x) = g(x) = 64$

$x > \sqrt[4]{2}$ és $x < \sqrt{2}$ között $f''(x)$ és $g''(x)$ egyaránt pozitív.

Ezen három tényt figyelembe véve kijelenthetjük hogy az $[\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}]$ intervallumon a két görbe nem metszi egymást, vagy végtelen metszéspontja van. Ellenben mivel a két függvény különbsége egy huszadfokú polinom, aminek legfeljebb 20 gyöke lehet, ezért a végtelen metszéspontot mint lehetőséget kizárhatjuk.

A vizsgálatot hasonlóképpen elvégezve az $[-\sqrt{2}, -\sqrt[4]{2}]$ intervallumon ugyanezen eredményre jutunk, így bizonyítva hogy a korábban megtalált három megoldáson kívül nincs az egyenletnek további valós gyöke.

4. feladat: *Adjuk meg az alábbi irracionális egyenlet összes valós megoldását.*

$$(3x\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)(x+3)=64x\sqrt{x}$$

I. Megoldás. *(Major Botond megoldása)*

Először ismét kössük ki, hogy $x \geq 0$, mivel a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat. Ezután alkalmazzuk az $a=\sqrt{x}$ helyettesítést. Így az egyenlet a következő lesz:

$$(3a^3+1)(a+3)(a^2+3)=64a^3.$$

A zárójeleket felbontva és az egyik oldalra rendezve a tagokat, majd elosztva mindkét oldalt 3-mal, azt kapjuk, hogy:

$$a^6+3a^5+3a^4-12a^3+a^2+a+3=0.$$

Az együtthatók összegéből azonnal adódik, hogy az egyenletnek gyöke az $a=1$, tehát $a-1$ kiemelhető a bal oldalból. Ezzel az egyenlet:

$$(a-1)(a^5+4a^4+7a^3-5a^2-4a-3)=0.$$

Itt a második tényezőben szintén nulla az együtthatók összege, tehát ismét kiemelhető $a-1$ a második tényezőből. Az egyenlet a következő alakban írható:

$$(a-1)^2(a^4+5a^3+12a^2+7a+3)=0.$$

Tudjuk, hogy $a \geq 0$, ezért az $a^4+5a^3+12a^2+7a+3$ polinom minden a-ra pozitív, vagyis nincs valós gyöke.

Az egyetlen valós megoldás az $a=1$-nek megfelelő $x=1$. Ez pillanatok alatt ellenőrizhető is.

A következő, 5. feladatnál többen választották az együtthatók vizsgálatán alapuló utat. Ezt mutatja be az első megoldás. A második megoldás Tiefenbeck Flórián egy különlegesen szép egyedi ötletén alapul, míg a további megoldások Telek Zsigmond komoly technikai tudásáról adnak képet.

II. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Világos, hogy $x \geq 0$, hiszen az egyenlet csak ekkor értelmezhető a gyökjelek miatt. Behelyettesítéssel azonnal ellenőrizhető az is, hogy $x=0$ nem megoldás, tehát $\sqrt{x}>0$. Végezzük el az összes szorzást az egyenlet bal oldalának számlálójában. Ekkor a jobb- és bal oldalon egyaránt minden tag pozitív a beszorzások után is, így használhatjuk a (súlyozott) AM-GM egyenlőtlenséget (a választott súlyok külön zárójelekben):

$$\frac{(3x\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)(x+3)}{64}=$$

$$=\frac{(3)x^3+(9)x^2\sqrt{x}+(9)x^2+(28)x\sqrt{x}+(3)\sqrt{x}+(3)x+(9)1}{64}\geq$$

$$\geq \sqrt[64]{x^{3\cdot 3}\cdot x^{9\cdot\frac{5}{2}}\cdot x^{9\cdot 2}\cdot x^{28\cdot\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot x^3\cdot 1^9}=\sqrt[64]{x^9\cdot x^{\frac{45}{2}}\cdot x^{18}\cdot x^{42}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot x^3\cdot 1^9}=x\sqrt{x},$$

$$(3x\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)(x+3) \geq 64x\sqrt{x}.$$

Talán kicsit elegánsabb, ha több lépésben az egyes tényezőket külön-külön becsüljük a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséggel:

$$\left(\frac{3x\sqrt{x}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+3}{4}\right)\left(\frac{x+3}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}+x\sqrt{x}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1+1+1}{4}\right)\left(\frac{x+1+1+1}{4}\right) \underset{\text{AM-GM}}{\geq} \sqrt[4]{x^{\frac{9}{2}}} \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[4]{x}$$

$$(3x\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)(x+3) \geq 64 \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{9}{2}}} \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[4]{x} = 64x^{\frac{9}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}} = 64x\sqrt{x}$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül mindkét esetben, amikor:

$$x^3 = x^2\sqrt{x} = x^2 = x\sqrt{x} = \sqrt{x} = x = 1,$$

ami valóban megtörténik $x = 1$-ben, tehát ez az egyetlen megoldás.

5. feladat: *Felbontható-e alacsonyabb fokú egész együtthatós polinomok szorzatára az* $x^5 - x^2 + 1$ *polinom?*

I. Megoldás. *(Bokor Endre megoldása)*

A feladat megoldása során a következő két tételt lehet felhasználni.
I. tétel. Ha egy $f(x)$ egész együtthatós polinomnak $\frac{c}{d}$ racionális szám egy zérushelye, ahol c és d relatív prímek, akkor $f(x)$ felírható $(dx - c)g(x)$ alakban, ahol $g(x)$ szintén egy egész együtthatós polinom. Ennek a megfordítottja is igaz.
II. tétel. Ha a $\frac{c}{d}$ racionális szám ($\text{lnko}(c, d) = 1$; $c, d \in \mathbb{Z}$) gyöke az $f(x)$ polinomnak, akkor d osztja a polinom főegyütthatóját és c osztja a konstans tagját.

Először vizsgáljuk meg, hogy létezik-e racionális gyök. Ugyanis ha nincs, akkor a kérdéses primitív polinom felbontásában nem szerepelhet legfeljebb elsőfokú tényező, csakis egy felbonthatatlan harmadfokú és egy felbonthatatlan másodfokú polinom szorzataként állhat elő. [1]

Racionális gyök csakis az 1 és -1 valamelyike lehet, azonban behelyettesítve egyik sem lesz tényleges gyök. Tehát a kérdés, hogy léteznek-e $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre

$$x^5 - x^2 + 1 = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$$

teljesül bármely x-re. Ezekre a tényezőkre ez csak akkor lehet igaz, ha létezik megoldása a következő egyenletrendszernek. (Ugyanis két azonos fokú polinom egyezőségéhez az egyes együtthatók páronkénti megegyezése szükséges.)

$$d + a = 0 \qquad (1)$$

$$e + ad + b = 0 \qquad (2)$$

$$ae + bd + c = -1 \qquad (3)$$

$$be + cd = 0 \qquad (4)$$

$$ce = 1 \qquad (5)$$

Két esetet kell szétválasztani. Először, mikor $c = 1$ és $e = 1$. Ebben az esetben az első és negyedik egyenlet alapján $b = a$, viszont ekkor nem lehet a második és harmadik egyenlet egyszerre igaz, vagyis nincs megoldás.

Második eset, mikor $c = -1$ és $e = -1$. Itt is a és b egyenlő. A második és harmadik egyenlet

$$-1 + ad + a = 0 \qquad\qquad -a + ad - 1 = -1$$

Ez a kettő szintén nem lehet egyszerre igaz, hiszen az utóbbi alapján $a = 0$, amely az előbbi szerint nem lehet.

Vagyis $f(x)$, a kérdéses polinom felbontásában nem szerepelhet legfeljebb harmadfokú polinom sem, azaz $x^5 - x^2 + 1$ felbonthatatlan az egészek felett.

[1] Az egész együtthatós polinomkra vonatkozó elméleti ismeretek a Wikipedian és bevezető algebra tankönyvekben is megtalálhatók:
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss-lemma.`
`http://math.bme.hu/ wettl/okt/b1/2015/h04_15b1.pdf`

II. Megoldás. *(Tiefenbeck Flórián megoldása)*

Legyen $f(x) = x^5 - x^2 + 1$, tegyük fel, hogy $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, ahol g és h egész együtthatós polinomok.

Vizsgáljuk az f függvény -10 és 10 közötti egész számokon felvett értékét, nevezzük *megfelelő*nek azokat a számokat, amik csak úgy állnak elő két másik egész szám szorzataként, ha ezek közül valamelyik abszolút értéke 1. Megfelelő számok ezek szerint a -1; 1; a pozitív és negatív prímek.

x	$f(x)$	megfelelő?
-10	-100099	Nem
-9	-59129	Nem
-8	32831	Igen
-7	-16855	Nem
-6	-7811	Nem
-5	-3149	Nem
-4	-1039	Igen
-3	-251	Igen
-2	-35	Nem
-1	-1	Igen
0	1	Igen
1	1	Igen
2	29	Igen
3	235	Nem
4	1009	Igen
5	3101	Nem
6	7741	Igen
7	16759	Igen
8	32705	Nem
9	58696	Nem
10	99901	Igen

Tehát $f(x)$ legalább 11-szer vesz fel megfelelő számot egész x esetén.

Az $f(x)$ ötödfokú polinom felbontásában ezért vagy g másodfokú és h harmadfokú, vagy g elsőfokú és h negyedfokú.

A továbbiakban fel fogjuk használni, hogy egy k-ad fokú $f(x)$ valós együtthatós polinom egy tetszőleges c valós számot legfeljebb k-szor vehet fel, ellenkező esetben ugyanis az $f(x) - c$ polinomnak k-nál több zérushelye lenne, nem teljesülne az algebra alaptétele.

Első eset:

Ha g másodfokú, akkor $g(x) = 1$ és a $g(x) = -1$ is legfeljebb 2-2 x érték esetén teljesülhet, ugyanígy, ha h harmadfokú, akkor $|h(x)| = 1$ legfeljebb 6 különböző x-re teljesülhet. Ebből következik, hogy $g(x) \cdot h(x)$ legfeljebb 10 különböző egész x esetén lehet megfelelő szám, ezzel ellentmondásra jutottunk.

Második eset:

A $|g(x)| = 1$ kettő külöböző x-re, a $|h(x)| = 1$ legfeljebb 8 különböző x-re teljesülhet, így a $g(x) \cdot h(x)$ ebben az esetben is legfeljebb 10 egész x esetén lehet megfelelő szám, itt is ellentmondásra jutottunk.

Ezzel bizonyítottuk, hogy f nem írható fel két alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom szorzataként, amiből következik, hogy kettőnél több alacsonyabb fokú szorzataként sem írható fel. ($f(x) = g(x) \cdot j(x) \cdot k(x)$ esetén legyen $h(x) = j(x) \cdot k(x)$, ekkor ha j és k egész együtthatós, akkor h is.)

III. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

A feladatban szereplőnél erősebb állítást igazolunk, mégpedig, hogy $x^5 - x^2 + 1$ nem bomlik fel alacsonyabb fokú racionális együtthatójú polinomok szorzatára sem (ez a Gauss-lemma miatt ekvivalens a feladat állításával). A racionális gyökteszt alapján az egyenletnek, ha van racionális gyöke, akkor az a ± 1. Azonnal látható, hogy ezek közül egyik sem gyök, így az ötödfokú polinomból biztosan nem emelhető ki racionális együtthatós lineáris kifejezés. Tehát ha szorzattá bomlik, akkor az csak úgy lehet, hogy az egyik harmad-, a másik másodfokú polinom a faktorizációs tétel miatt. Ekkor feltehetjük, hogy kiemelhető belőle valamilyen másodfokú racionális együtthatós polinom. Ismert, hogy ilyen polinomoknak a gyökei az alábbi alakban írhatók: $r \pm \sqrt{D}$; $r, D \in \mathbb{Q}$. Ez azt jelenti, hogy $x^5 - x^2 + 1$-nek gyöke $r + \sqrt{D}$. Behelyettesítve:

$$0 = (r + \sqrt{D})^5 - (r + \sqrt{D})^2 + 1 =$$

$$= D^2\sqrt{D} + 10D\sqrt{D}r^2 + 5D^2r + 5\sqrt{D}r^4 + 10Dr^3 - 2\sqrt{D}r - D + r^5 - r^2 + 1 \iff$$

$$\iff \underbrace{-5D^2r - 10Dr^3 + D - r^5 + r^2 - 1}_{rac.} = \sqrt{D}\,\underbrace{(D^2 + 10Dr^2 + 5r^4 - 2r)}_{rac.} \iff$$

$$\iff D \in \left\{q^2 \mid q \in \mathbb{Q}\right\} \quad \text{vagy} \quad -5D^2r - 10Dr^3 + D - r^5 + r^2 - 1 = D^2 + 10Dr^2 + 5r^4 - 2r = 0$$

Egyéb esetben ellentmondást kapnánk, hiszen a bal oldal racionális lenne, míg a jobb irracionális. Ha $D \in \{q^2 \mid q \in \mathbb{Q}\}$, akkor $r + \sqrt{D} \in \mathbb{Q}$, ami nem lehet, hiszen az ötödfokúnak nincs racionális gyöke. Tehát elég a második esetet vizsgálni, ekkor:

$$0 = (5r)(D^2 + 10Dr^2 + 5r^4 - 2r) + (-5D^2r - 10Dr^3 + D - r^5 + r^2 - 1) = 40Dr^3 + 24r^5 - 9r^2 + D - 1$$

$$D(\underbrace{40r^3 + 1}_{\neq 0 \Longleftarrow r \in \mathbb{Q}}) = -24r^5 + 9r^2 + 1 \iff D = \frac{-24r^5 + 9r^2 + 1}{40r^3 + 1}; \text{ behelyettesítve és rendezve:}$$

$$0 = D^2 + 10Dr^2 + 5r^4 - 2r = \frac{-1024r^{10} + 128r^7 + 352r^5 + 16r^4 + 28r^2 - 2r + 1}{(40r^3 + 1)^2} =$$

$$= 1024r^{10} - 128r^7 - 352r^5 - 16r^4 - 28r^2 + 2r - 1 = 0$$

A racionális gyökteszt szerint tehát $r = \pm 2^{-i}$; $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$ alakú. Ha $i = 0$, akkor a bal oldal páratlan, jobb oldal páros. Ha $i \geq 1$, ezzel ekvivalensen (felszorozva 2^{10i-10}-el):

$$1 \mp 2^{3i-3} \mp 11 \cdot 2^{5i-5} - 2^{6i-6} - 7 \cdot 2^{8i-8} \pm 2^{9i-9} - 2^{10i-10} = 0$$

Ha $i = 1$, akkor a bal oldalon páratlan sok páratlan szám összege van, mely páratlan, így nem 0. Ha pedig $i > 1$, akkor minden tag páros kivéve az elsőt, ami 1, így az összeg ismét páratlan. Tehát ellentmondásra jutottunk, hiszen feltettük, hogy $r \in \mathbb{Q}$. Ez azt jelenti, hogy az ötödfokú polinom nem bomlik alacsonyabb fokú racionális együtthatójú polinomok szorzatára.

Érdekesség, hogy az $1024r^{10}-128r^7-352r^5-16r^4-28r^2+2r-1$ polinom valós (2db) gyökei a WolframAlpha alapján, pontosan megegyeznek x^5-x^2+1, az eredeti polinom, komplex gyökeinek valós részeivel.

IV. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Az előző bizonyításban beláttuk, hogy az ötödfokúnak nincs racionális gyöke, így ismét elég

$$x^5-x^2+1=(yx^3+zx^2+vx+w)(ux^2+px+q);\ y,z,v,w,u,p,q\in\mathbb{Z} \qquad (*)$$

alakban keresni a szorzattá alakítást. Könnyű látni, hogy két ilyen kifejezés összeszorzásnál az új főegyüttható a két főegyüttható szorzata lesz és ugyanez igaz a konstans tagra is. Miután a két polinom egész együtthatós, ezért yu, x^5-x^2+1 főegyütthatójával egyenlő, ami 1, csak úgy lehet, ha $y=u=\pm1$ és ugyanígy a konstansokra: $w=q=\pm1$. Tehát négy esetet kell megvizsgálni:

$$(y=1,w=1),\ (y=1,w=-1),\ (y=-1,w=1),\ (y=-1,w=-1),$$

viszont ebből az utolsó kettő redundáns, hiszen mindkét zárojelben $(*)$-ban -1-gyel való szorzás nem változtat a szorzaton, viszont a főegyütthatók és konstansok éppen a másik esetekké válnak, a többi együtthatóról pedig nem tettünk fel semmi mást, csak hogy egészek.

Az első eset, együtthatók összehasonlításával:

$$x^5-x^2+1=(x^3+zx^2+vx+1)(x^2+px+1)\implies$$

$$\implies 0=\overbrace{p+z}^{x^4}=\overbrace{p+v}^{x}=\overbrace{1+zp+v}^{x^3};\ \overbrace{z+vp+1}^{x^2}=-1\implies z=v=-p\implies$$

$$1-p^2-p=0;\ -p-p^2+1=-1.$$

Ellentmondásra jutottunk, ez az eset nem állhat fenn.

Második eset:

$$x^5-x^2+1=(x^3+zx^2+vx-1)(x^2+px-1)\implies$$

$$\implies 0=\overbrace{p+z}^{x^4}=\overbrace{-v-p}^{x}=\overbrace{zp+v-1}^{x^3}=\overbrace{-z+vp}^{x^2}\implies v=z=-p\implies$$

$$\implies \left\{-p^2-p-1=0;\ \underbrace{-p+p^2=0}_{p=0;1}\right\}\overset{\Sigma}{\implies}\underbrace{-2p-1=0}_{p=-\frac{1}{2}}.$$

A p nem lenne egész, tehát ez az eset sem fordulhat elő. Az eredeti polinom nem bomlik fel alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

6. feladat: *Az a és b számok gyökei az x^4+x^3-1 polinomnak. Mutassuk meg, hogy akkor $a\cdot b$ gyöke lesz az $x^6+x^4+x^3-x^2-1$ polinomnak.*

I. Megoldás. *(Péter Kristóf megoldása)*

Legyenek az $f(x)=x^4+x^3-1$ polinom gyökei a, b, c, d, egyik sem nulla. A Viéte-formulák alapján ekkor

$$a+b+c+d=-1 \qquad \text{és} \qquad abcd=-1,$$

illetve a később felhasználható alakban:

$$c+d=-a-b-1, \qquad \text{és} \qquad cd=-\frac{1}{ab}.$$

Az a és b gyökei az $f(x)$ polinomnak, tehát

$$a^4+a^3-1=0 \qquad \text{és} \qquad b^4+b^3-1=0,$$

ezekből néhány azonos átalakítással kapjuk, hogy

$$(a^4+a^3)(b^4+b^3)=1,$$

$$(ab)^4+(ab)^3+(ab)^3(a+b)=1,$$

$$a+b=\frac{1-(ab)^4-(ab)^3}{(ab)^3}. \tag{1}$$

Ugyanezt megtehetjük a c és d gyökökkel is:

$$(c^4+c^3)(d^4+d^3)=1,$$

$$(cd)^4+(cd)^3+(cd)^3(c+d)=1.$$

A Viéte-formulákból behelyettesítve:

$$\left(-\frac{1}{ab}\right)^4+\left(-\frac{1}{ab}\right)^3+\left(-\frac{1}{ab}\right)^3(-a-b-1)=1,$$

$$\left(\frac{1}{ab}\right)^4-\left(\frac{1}{ab}\right)^3+\left(\frac{1}{ab}\right)^3(a+b+1)=1.$$

Az azonos átalakításokat folytatva:

$$\left(\frac{1}{ab}\right)^4-\left(\frac{1}{ab}\right)^3+\left(\frac{1}{ab}\right)^3(a+b)+\left(\frac{1}{ab}\right)^3=1,$$

$$\left(\frac{1}{ab}\right)^4+\left(\frac{1}{ab}\right)^3(a+b)=1,$$

$$a+b=(ab)^3-\frac{1}{ab}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) jobb oldalait egyenlővé téve és néhány azonos átalakítás után:

$$(ab)^3-\frac{1}{ab}=\frac{1-(ab)^4-(ab)^3}{(ab)^3},$$

$$(ab)^6-(ab)^2=1-(ab)^4-(ab)^3,$$

$$(ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 = 0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy (ab) gyöke az $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ polinomnak.

II. Megoldás. *(Tiefenbeck Flórián megoldása)*

Tudjuk, hogy $a^4 + a^3 = 1$ és $b^4 + b^3 = 1$, bizonyítani szeretnénk, hogy $(ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 = 0$

Legyenek a és b egymástól különböző nemnulla gyökei az eredeti polinomnak. (Biztosan van két különböző gyök, mert ellenkező esetben a konstans tag csak pozitív lehetne.) Ezeket a gyököket behelyettesítve: $a^4 + a^3 = b^4 + b^3 = 1$. Ebből következik, hogy:

$$0 = a^4 + a^3 - b^4 - b^3.$$

$$0 = \frac{ab(a^4 + a^3 - b^4 - b^3)}{a - b}$$

$$0 = a^4b + a^3b^2 + a^3b + a^2b^3 + a^2b^2 + ab^4 + ab^3$$

$$0 = a(b^4 + b^3) + b(a^4 + a^3) + a^2b^2(a + b + 1)$$

Ha $a^4 + a^3 = 1$ és $b^4 + b^3 = 1$, akkor:

$$0 = a + b + a^2b^2(a + b + 1) = (a + b)(1 + a^2b^2) + a^2b^2$$

A két fenti egyenlőséget összeszorozva: $(ab)^3(1 + a + b + ab) = 1$, majd átrendezve: $a + b = \dfrac{1}{(ab)^3} - 1 - ab$, továbbá ezt kihasználva:

$$0 = \left(\frac{1}{(ab)^3} - 1 - ab\right)(1 + (ab)^2) + (ab)^2$$

Mindkét oldalt $(ab)^3$-al megszorozva:

$$0 = (1 - (ab)^3 - (ab)^4)(1 + (ab)^2) + (ab)^5$$

$$0 = -(ab)^6 - (ab)^4 - (ab)^3 + (ab)^2 + 1$$

Látjuk, hogy (ab) gyöke az $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ polinomnak.

III. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Legyen $f(y) := y^6 + y^4 + y^3 - y^2 - 1$ és $g(x) := x^4 + x^3 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, így a $g(x)$ Viéte-formuláiból:

$$S_1 = a + b + c + d = -1;\ S_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0;$$

$$S_3 = abc + abd + acd + bcd = 0;\ S_4 = abcd = -1.$$

Miután a, b gyökei a fenti egyenletnek, világos, hogy $a^4 + a^3 = b^4 + b^3 = 1$, így:

$$(a^4 + a^3)(b^4 + b^3) = 1,$$

$$(ab)^4 + (ab)^3 + a^4b^3 + a^3b^4 = (abcd)^{2j};\ j = 2; 3 \tag{1}$$

Ha $j = 3$, akkor mindkét oldalt $(ab)^6$-nal osztva:

$$(cd)^6 = \frac{1}{(ab)^2} + \frac{1}{(ab)^3} + \frac{1}{a^2b^3} + \frac{1}{a^3b^2} = \underbrace{(cd)^2}_{S_4^2/(ab)^2} - \underbrace{(cd)^3}_{S_4^3/(ab)^3} + \frac{1}{a^2b^3} + \frac{1}{a^3b^2}.$$

Rendezés után pedig:

$$(cd)^6 + (cd)^3 - (cd)^2 = \frac{1}{a^2b^3} + \frac{1}{a^3b^2}. \tag{2}$$

Legyen most $j = 2$ és osszuk (1) mindkét oldalát $(ab)^4$-nel:

$$(cd)^4 = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{3}$$

Most (2) és (3) öszegéből éppne $f(cd)$-t kapjuk:

$$f(cd) = \frac{1}{a^2b^3} + \frac{1}{a^3b^2} + (cd)^4 - 1 = \frac{1}{a^2b^3} + \frac{1}{a^3b^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$$

$$\frac{a + b + a^2b^2 + a^2b^3 + a^3b^2}{a^3b^3} = \frac{b^2(a^2b + \overbrace{a^3 + a^2}^{=1/a}) + a + b}{a^3b^3} \cdot \frac{a}{a} = \frac{a^3b^3 + a^2 + b^2 + ab}{a^4b^3}$$

Ha b^2 helyett a^2-et emelünk ki a számlálóban, akkor hasonló lépésekkel:

$$f(cd) = \frac{1}{a^2b^3} + \frac{1}{a^3b^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a^2(b^2a + b^3 + b^2) + a + b}{a^3b^3} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a^3b^3 + a^2 + b^2 + ab}{a^3b^4}.$$

Az $f(cd)$-re két kifejezést is kaptunk. Ezeknek egyenlőknek kell lenniük.

$$f(cd) = \frac{a^3b^3 + a^2 + b^2 + ab}{a^4b^3} = \frac{a^3b^3 + a^2 + b^2 + ab}{a^3b^4}.$$

A két törtnek egyforma a számlálója. Ha teljesül, hogy nevezőjük különböző, akkor csak úgy lehetnek egyenlők, ha számlálójuk nulla.

Ha $a^4b^3 = a^3b^4 \iff a = b$, vagyis akkor nem lenne igaz az állítás, ha $g(x)$ gyökei mind egyformák lennének, azaz $a = b = c = d$, de $g(0) < 0$ és $g(x)$ főegyütthatója pozitív, tehát ez nem lehet igaz, nem lehet mindegyik gyök egybeeső.

A (cd) gyöke az $f(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ polinomnak.

IV. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Használjuk az előző megoldásban alkalmazott jelöléseket. Az a, b, c, d a $g(x)$ polinom gyökei és tekintsük a következő $P(x)$ hatodfokú polinomot:

$$P(x) := (x - ab)(x - ac)(x - ad)(x - bc)(x - bd)(x - cd).$$

Szorozzuk össze a gyöktényezőket és vizsgáljuk meg az egyes együtthatókat. Látható, hogy x^6 együtthatója 1, és a konstans tag $S_4^3 = -1$. x^5 együtthatója $-S_2 = 0$, az x-nek pedig: $-S_4^2 \cdot S_2 = 0$.

Az x^4-re még összegyűjtve: $S_1 \cdot S_3 - S_4 = 1$.

Az eredeti $g(x)$ polinom alapján tudjuk, hogy $abcd = -1$, ezért, ha valamilyen u-ra $P(u) = 0 \iff P(-1/u) = 0$, az $x = 0$ pedig tudjuk, hogy nem gyök, így nem okoz gondot. Tehát bármely u gyökre igazak a következők:

$$P(u) := u^6 + u^4 + yu^3 + zu^2 - 1 = 0 = \frac{1}{u^6} + \frac{1}{u^4} - \frac{y}{u^3} + \frac{z}{u^2} - 1 = P(-1/u);\ y, z \in \mathbb{R}$$

$$0 = u^6 P(-1/u) + P(u) = (z+1)(u^2 + u^4).$$

Mivel $u \neq 0$, ezért $z = -1$. Fontos megjegyezni, hogy $P(0) < 0$, $P(x)$ főegyütthatója pozitív, tehát legalább egy valós nemnulla gyök van a folytonosság miatt, így mivel ennek erre az u-ra is teljesülnie kell, $z = -1$ feltételnül teljesül. Meg kell még határozni az y együtthatót. Kihasználva, hogy $cd = -\frac{1}{ab}$, $bd = -\frac{1}{ac}$ és $bc = -\frac{1}{ad}$ a $P(1)$-re:

$$P(1) = 1 + 1 + y - 1 - 1 = (1-ab)(1-ac)(1-ad)(1-bc)(1-bd)(1-cd) =$$

$$= (1-ab)\left(1 + \frac{1}{ab}\right)(1-ac)\left(1 + \frac{1}{ac}\right)(1-ad)\left(1 + \frac{1}{ad}\right).$$

Páronként összeszorozva és ismét kihasználva $abcd = -1$-et:

$$P(1) = \left(-ab + \frac{1}{ab}\right)\left(-ac + \frac{1}{ac}\right)\left(-ad + \frac{1}{ad}\right) = (-ab - cd)(-ac - bd)(-ad - bc) =$$

$$= -(\underbrace{a^3bcd}_{-a^2} + \underbrace{a^2b^2c^2}_{1/d^2} + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + ab^3cd + abc^3d + abcd^3 + b^2c^2d^2) =$$

$$- \underbrace{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)}_{:=q} + \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}_{:=r}$$

$$q = \left(\frac{S_3}{S_4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{S_2}{S_4} = 0 + 0 = 0;\ r = S_1^2 - 2S_2 = 1 \implies P(1) = y = -0 + 1 = 1$$

Az együtthatók meghatározása után így $P(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$, az $f(x)$ és $P(x)$ polinomok megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy a feladatban szereplő $f(x)$ polinom gyökei mind a $g(x)$ gyökeinek páros szorzataiból adódnak.