**A 2015. évi Kardos Gyula Matematika Verseny feladatainak megoldásai**

Mindhárom évfolyam számára azonos volt az első és a negyedik feladat. Először ezek megoldását ismertetjük.

*1, Mutassuk meg, hogy két egymás utáni páratlan prím összege legalább három (nem feltétlenül különböző) prím szorzata.*

**Megoldás:** Legyen $p < q$ a két szomszédos prímszám. Ekkor $p + q$ páros szám, azaz felírható

$$p + q = 2 \cdot \frac{p + q}{2}$$

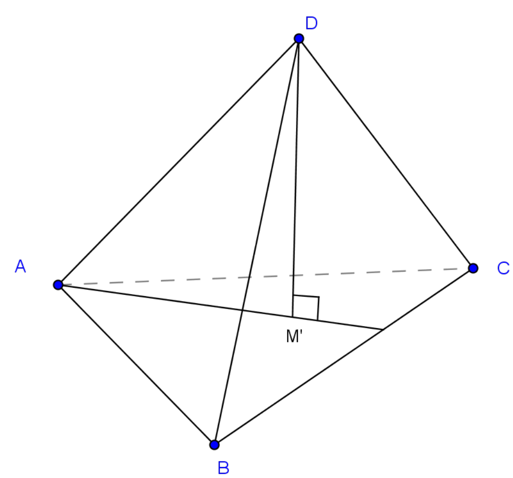
alakban, ahol a párosság miatt $\frac{p+q}{2}$ is pozitív egész. A két szám számtani közepe a két szám közé esik, amelyek szomszédos prímek. Ezek szerint $\frac{p+q}{2}$ összetett szám, amelyet még 2-vel szorozni kell, így valóban teljesül, hogy $p + q$ legalább három prím szorzata.

(Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, 355. sorszámú feladat)

*Árvai Adolf 12. b. , Bátorfi Botond 11. a. és Rujp Tamás 11. a. megoldása alapján*

*4, Bizonyítsuk be, hogy a magasságpontos tetraédernél bármely csúcshoz tartozó magasság talppontja a csúccsal szemközti lap magasságpontjával esik egybe.*

**Megoldás:** A megoldás során felhasználjuk, hogy a magasságpontos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra.




Legyen pl. a $D$-ből induló magasságvonal talppontja az $ABC$ síkon $M'$. A tetraéder $BC$ éle merőleges az $ADM'$ síkra, mert merőleges $DM'$-re (a $DM'$ az $ABC$ sík mindegyik egyeneésre merőleges) és $AD$-re is. A sík két nem párhuzamos egyenesére merőleges egyenes pedig merőleges a síkra. Ha $BC$

merőleges az $ADM'$ síkra, akkor merőleges a sík minden egyenesére, így az $AM'$-re is. Látjuk, hogy $AM'$ magasságvonal az $ABC$ háromszögben. Hasonlóan látható, hogy az $M'$ pont az $ABC$ háromszög mindegyik magasságvonalán rajta van, tehát $M'$ az $ABC$ háromszög magasságpontja.

(Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából, 204. old., 31. feladat)

*Erre a feladatra a versenyen Árvai Adolf 12. b. adott megoldást.*

**10. osztály**

*2, Igazoljuk, hogy ha $p$ és $8p^2+1$ prímszámok, akkor $8p^2+2p+1$ is prímszám.*

**Megoldás:** Ha a $p$ prímszám nem osztható 3-mal, akkor a négyzete 3-mal osztva 1-et ad maradékul. Ebből már következik, hogy $8p^2+1$ osztható 3-mal, legalább 33, így biztosan nem prímszám. Tehát egyedül a $p=3$ jöhet szóba. Ekkor

$$8p^2+1=73 \text{ és } 8p^2+2p+1=79,$$

mindkettő prímszám. Az állítás igaz.

(Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, 347. sorszámú feladat)

*Kovács Jonatán 10. d. és Szűcs Ádám 10. a. megoldása alapján*

*3, Igaz-e, hogy minden $x^2+2y^2$ formában felírható páratlan $p$ prímszám ($x, y$ egész számok) nyolccal osztva 1 vagy 3 maradékot ad?*

**Megoldás:** Az $x^2$-nek és így az $x$-nek is páratlannak kell lennie, hiszen $2y^2$ mindenképpen páros, az összegükről pedig tudjuk, hogy páratlan. Az $x^2$ páratlan szám négyzete, amelyről ismert, hogy 8-cal osztva 1-et ad maradékul. (Pl. $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$, ahol $k(k+1)$ két szomszédos pozitív egész szorzata, tehát páros.)

Vegyük most az összegben szereplő másik tagot, a $2y^2$-et. Ha $y$ páratlan, akkor az előbbiek alapján 8-cal osztva 1-et ad maradékul, a kétszerese pedig 2-t. Ha $y$ páros szám, akkor 8-cal osztva $0,2,4,6$ maradékot adhat, ennek megfelelően $y^2$ nyolcas maradéka lehet $0,4,0,4$. Innen már az is látható, hogy ekkor $2y^2$ biztosan osztható 8-cal. Végül a két vizsgálat alapján $x^2$ mindenképpen páratlan szám és 8-cal osztva 1 maradékot ad. A $2y^2$ maradéka 2 vagy 0 lehet aszerint, hogy $y$ páratlan vagy páros. Tehát az összeg 8-as maradéka valóban csak 1 vagy 3 lehet.

*Kovács Jonatán 10. d. megoldása alapján*

***Megjegyzés:*** A megoldás során valójában nem használtuk ki, hogy $p$ prímszám, csak azt, hogy páratlan szám.

*5, Egy tetraéder öt éle egységnyi. Mekkorának válasszuk a hatodik élt, hogy a tetraéder felszíne maximális legyen?*

**Megoldás:** A tetraéder hatodik éle legyen $x$ hosszúságú. Ekkor a felszín két egységnyi oldalú szabályos háromszög és két egybevágó egyenlő szárú háromszög területének összege. A szabályos háromszögek területe rögzített, nem változtatható. Úgy kell tehát megválasztanunk az egyenlő szárú háromszög alapját, hogy területe maximális legyen. A trigonometrikus területképlet segítségével gyorsan célhoz érünk. Legyen a két egységnyi szár által bezárt szög $\alpha$. Ekkor a terület

$$T = \frac{1 \cdot 1 \cdot sin\alpha}{2} = \frac{1}{2} sin\alpha.$$

A szinusfüggvény maximumát $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ esetben veszi fel. Figyelembe véve, hogy háromszög szögéről van szó, látjuk, hogy $\alpha = 90°$. Ebben az esetben az egyenlő szárú háromszögek egyenlő szárú derékszögű háromszögek, $x = \sqrt{2}$. A felszín maximuma $A_{max} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

*Tótth András 10. b. gondolatmenete alapján*

*6, Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja és beírt gömbjének középpontja egybeesik, akkor egyenlő oldalú a tetraéder.*

**Megoldás:** A súlypontot a csúcsokkal összekötve négy egyenlő térfogatú ,,kis" tetrédert kapunk a súlypont tulajdonsága miatt. Ennek a négy tetraédernek a magasságai most a beírt gömb sugarával egyenlők, így a négy alapterületnek, a tetraéder négy lapja területének is meg kell egyeznie. Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából című könyvében szerepel annak bizonyítása, hogy amennyiben a lapok egyenlő területűek, akkor a tetraéder egyenlő oldalú. (191. - 192. old. ) A hivatkozott rész a felkészüléshez ajánlott elsődleges irodalomként volt megadva.

**11. osztály**

*2, Írjuk fel egy tetszőleges pozitív p prímszám reciprokát két különböző törzstört összegeként. (Törzstörtek azok a törtek, amelyeknek számlálója 1.)*

**Megoldás:** Először oldjuk meg az

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

diofantoszi egyenletet a pozitív egész számok halmazán, ahol $p$ prímszám. Szorozzunk be a nevezőkkel és a szokásos módon rendezzük az ismeretlent tartalmazó tagokat két elsőfokú tényező szorzatává.

$$xy = px + py,$$

$$xy - px - py + p^2 = p^2,$$

$$(x - p)(y - p) = p^2.$$

Mivel $x$ és $y$ $p$-nél nagyobb pozitív egészek, így osztópárok kialakítása csak kétféleképpen lehetséges:

$$p^2 = p \cdot p, \text{illetve } p^2 = 1 \cdot p^2.$$

Az első esetben $x = 2p$ és $y = 2p$. Ez a különbözőségi feltétel miatt nem megoldás. A másik esetben $x = p+1, y = p^2 + p$, illetve ennek fordítottja adódik.

Látjuk, hogy két különböző törzstört összegeként csak egyféle módon írható fel egy prímszám reciproka:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)}.$$

Ekkor $p+1$ és $p(p+1)$ különböző.

Ha nem szorítkozunk a pozitív törzstörtekre, akkor láthatóan nem lehet mindkét nevező negatív, mert akkor a két tört összege is negatív lenne. Vegyük most a további lehetséges osztópárokat.

$$x - p = -1, y - p = -p^2, \text{ illetve } x - p = -p, y - p = -p.$$

A második esetben $x$-re és $y$-ra is nullát kapunk, amelyek nyilvánvalóan nem lehetnek a törtek nevezői. Az első esetben

$$x = p - 1, y = -p(p-1).$$

Kapunk egy olyan felbontást is, amelyben $\frac{1}{p}$ két pozitív törzstört különbsége:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p(p-1)}.$$

*A feladatra Bátorfi Botond 11. a. adott megoldást.*

*3, A Dirichlet-tétel felhasználása nélkül mutasuk meg, hogy végtelen sok olyan prímszám van, amelynek tízes számrendszerben felírt alakjában az utolsó jegy* 9.

**Megoldás:** A megoldáshoz felhasználjuk a Gauss-lemma néven ismert tételt: Ha $p$ páratlan prímszám, és nem osztója a $c$ egésznek, akkor a $c$ aszerint kvadratikus maradék vagy nem az, amint a

$$c, 2c, \ldots, \frac{p-1}{2} \cdot c$$

számok legkisebb abszolútértékű maradékai közül a negatívok száma páros vagy páratlan.

Esetünkben az $5, 10, 15, \ldots, \frac{p-1}{2} \cdot 5$ számok közül kell meghatározni azoknak a számát, amelyeket $p$-vel osztva a legkisebb abszolútértékű maradék negatív.

Ezek a számok mind kisebek $\frac{5}{2}\cdot p$-nél, így 5-nek a $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ és a $\left(\frac{3p}{2}, 2p\right)$ számközbe eső többszöröseit kell megszámolni, ami ugyanannyi, mint a $\left(\frac{p}{10}, \frac{p}{5}\right)$ és a $\left(\frac{3p}{10}, \frac{2p}{5}\right)$ számközök egészeinek együttes száma. A $p = 5$ eset nem jön szóba, így a végpontok nem egészek.

Ebben az esetben a $p$ prímszámokat $p = 20k + r$ alakban célszerű felírni. Mivel $p$ prímszám, így $r$ csak $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17$ vagy 19 lehet. Ezekre az értékekre a

$$\left(2k + \frac{r}{10}, 4k + \frac{r}{5}\right) \text{ és } \left(6k + \frac{3r}{10}, 8k + \frac{2r}{5}\right)$$

számközök egész számainak a számára van szükségünk. A

$$\left(2k + \frac{r}{10}, 4k + \frac{r}{10}\right) \text{ és } \left(6k + \frac{3r}{10}, 8k + \frac{3r}{10}\right)$$

részintervallumok ismét páros számú egész számot tartalmaznak, tehát elegendő az ezek elhagyásával keletkező

$$\left(4k + \frac{r}{10}, 4k + \frac{r}{5}\right) \text{ és } \left(8k + \frac{3r}{10}, 8k + \frac{2r}{5}\right)$$

intervallumokat, vagy ezek helyett is az

$$\left(\frac{r}{10}, \frac{r}{5}\right) \text{ és } \left(\frac{3r}{10}, \frac{2r}{5}\right)$$

számközöket vizsgálni, ugyanazokból az okokból, mint az előző esetben.

Az általuk tartalmazott egészek együttes száma az egyes felsorolt esetekben $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$. Ennek a páros vagy páratlan volta ismét csak az $r$ maradéktól függ, $k$-tól nem. Az eredményt úgy foglalhatjuk össze, hogy az 5 azokra a prímekre kvadratikus maradék, amyelyek 20-szal osztva $\pm 1$ vagy $\pm 9$ maradékot adnak, a $\pm 3$ és $\pm 7$ maradékot adókra viszont nem kvadratikus maradék az 5. Rövidebben azt látjuk, hogy $10k \pm 1$ alakú prímekre nézve kvadratikus maradék az 5, a $10k \pm 3$ alakúakra pedig nem. Ezzel már be tudjuk látni az eredeti állítást.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy csak véges sok $10k - 1$ alakú prímszám van. Legyenek ezek $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Tekintsük az

$$5(p_1 p_2, \ldots, p_k)^2 - 1$$

számot. Azt állítjuk, hogy ennek van $10k + 9$ alakú prímosztója. Egy tetszőleges prímosztójára

$$5(p_1 p_2, \ldots, p_k)^2 \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Most 5-tel szorozva látjuk, hogy a bal oldalon egy teljes négyzet van, azaz 5 kvadratikus maradék $(mod\ p)$. Tehát az $5(p_1 p_2, \ldots, p_k)^2 - 1$ mindegyik prímosztója $10k + 1$ vagy $10k + 9$ alakú. Nem lehet viszont mindegyik $10k + 1$ alakú, mert akkor a szorzatuk is $10k + 1$ alakú lenne. Találtunk további $10k + 9$ alakú prímet, nem igaz az indirekt feltétel, hogy csak véges sok ilyen prímszám van.

***Megjegyzés:*** A fentebbi gondolatmenet alapját képező Gauss-lemma és ennek használata az 5 kvadratikus maradék voltának vizsgálatára Erdős-Surányi: Válogatott fejezetek a számelméletből című könyvéből vett idézet. (91.- 94. old.)

*5, Mekkora az aránya egy tetszőleges tetraéder súlyvonalai négyzetösszegének és az élei négyzetösszegének?*

**Megoldás:** Az $ABCD$ tetraéder élhosszai legyenek $AB = c, BC = a$, $CA = b$, $DA = a_1, DB = b_1, DC = c_1$. Először kiszámoljuk a $D$ csúcshoz tartozó súlyvonal négyzetét. Legyenek a $D$ csúcsból az $A, B, C$ csúcsokba mutató vektorok rendre $\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1$. Tudjuk, hogy az egyes vektorok hosszaira $\underline{a}_1^2 = a_1^2$, $\underline{b}_1^2 = b_1^2$, $\underline{c}_1^2 = c_1^2$. A $D$-ből a szemközti lap súlypontjába mutató $\underline{s}_D$ vektorra

$$\underline{s}_D^2 = \frac{(\underline{a}_1 + \underline{b}_1 + \underline{c}_1)^2}{9} = \frac{1}{9}(\underline{a}_1^2 + \underline{b}_1^2 + \underline{c}_1^2 + 2\underline{a}_1\underline{b}_1 + 2\underline{b}_1\underline{c}_1 + 2\underline{c}_1\underline{a}_1).$$

Mivel $|\underline{a}_1 - \underline{b}_1| = c$ ezért,

$$2\underline{a}_1\underline{b}_1 = a_1^2 + b_1^2 - c^2$$

Ugyanezt felírva a többi kétszeres szorzatra kapjuk, hogy

$$\underline{s}_D^2 = \frac{1}{9}(3a_1^2 + 3b_1^2 + 3c_1^2 - a^2 - b^2 - c^2) = \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Ha most felírjuk a hiányzó három súlyvonal négyzetét is, akkor látjuk, hogy mindegyik él kétszer szerepel plusz előjellel és kétszer mínusz előjellel. Így mindegyik négyzet együtthatója $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ lesz. A keresett arány $\frac{4}{9}$.

*6, Legyen egy $ABCD$ magasságpontos tetraéder magasságpontja $M$ pont. Igazoljuk, hogy*

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4R^2,$$

*ahol $R$ a tetraéder köré írható gömb sugara.*

**Megoldás:** Az ajánlott irodalomban, Reiman István : Fejezetek az elemi geometriából című könyvének 189-dik oldalán szerepel, hogy magasságpontos tetraéderben is megvan a háromszög Euler-egyenesének megfelelője. A tetraéder köré írt gömbjének középpontja ($K$), a súlypont ($S$) és a magasságpont ($M$) egy egyenesre illeszkednek. Sajnos a könyvben az ezekre vonatkozó állítás sajtóhibával szerepel. A helyes állítás az, hogy a súlypont felezi a $KM$ szakaszt. Ennek ott leírt bizonyítása azonban már teljesen pontos.

Irányítsunk a súlypontból vektorokat a csúcsokba és egy tetszőleges $P$ pontba: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{p}$. Írjuk fel a vektorok segítségével a $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ összeget.

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (\underline{p} - \underline{a})^2 + (\underline{p} - \underline{b})^2 + (\underline{p} - \underline{c})^2 + (\underline{p} - \underline{d})^2 =$$

$$4p^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\underline{p}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}).$$

A súlypontból irányítottuk a vektorokat, így az összegük nullvektor. Látható, hogy a kapott négyzetösszegben csak a $p^2$ változik, a csúcsoktól vett távolságok négyzetösszege állandó. Ez azt jelenti, hogy a súlypont körüli rögzített gömb tetszőleges pontjára mindig ugyanazt a négyzetösszeget kapjuk. Ez jóval általánosabb eredmény, mint a feladatban szereplő. A befejezéshez most felhasználjuk, hogy a súlypont felezi a $KM$ szakaszt, tehát a $K$ és $M$ pontok ugyanakkora távolságra vannak a súlyponttól, a két négyzetösszeg megegyezik.

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4R^2.$$

**12. osztály**

*2, Keressünk olyan természetes számokból álló végtelen számtani sorozatot, amelynek egyetlen eleme sem állítható elő két prímszám összegeként.*

**Megoldás:** Célszerű páratlan számokból álló sorozatokat vizsgálni, mivel a páratlan számokat csak úgy lehet felírni két prímszám összegeként, ha az egyik prím a 2. Azt kell tehát elérnünk, hogy a sorozat tagjaiból kettőt kivonva ne kapjunk prímszámot. Erre az egyik lehetséges jó megoldás a $6n + 5$ alakú számok, mert ezekből kettőt kivonva hárommal osztható számot kapunk. Arra kell vigyázni, hogy ne 5-től indítsuk a sorozatot:

$$11, 17, 23, \ldots$$

*Árvai Adolf 12. b. megoldása.*

***Megjegyzések:*** 1, A megoldás többféleképpen befejezhető, például vehetjük a 7-re végződő számokat is 17-től kezdve. Ezekből kettőt kivonva minden esetben 5-tel osztható számot kapunk.

2, Balogh Tícián és Kalocsai Bálint kihasználták, hogy a feladat szövegében nem szerepelt az, hogy különböző természetes számokból álló végtelen számtani sorozatot kell megadni. Mindketten konstans sorozatot adtak meg. (Pl. $a_i = 1$, vagy $a_n = 2$.)

*3, Adjuk meg az $x^2 + y^3 = z^4$ egyenlet megoldásait a prímszámok halmazán.*

**Megoldás:** Rendezzük át az egyenletet és alakítsunk szorzattá.

$$y^3 = z^4 - x^2,$$

$$y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x).$$

A továbbiakban két esetet kell vizsgálni, mivel $y$ prímszám.

a.) $z^2 - x = 1$ és $z^2 + x = y^3$. Ismételt átalakítással

$$x = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1).$$

Ebből már látható, hogy $z = 2, x = 3$, és $y^3 = 7$, ami nyilvánvalóan nem prímszám köbe. Erre az osztópárra tehát nam kapunk megoldást.

b.) $z^2 - x = y$ és $z^2 + x = y^2$. A második feltételből

$$y^2 - z^2 = (y - z)(y + z) = x.$$

Tehát $y - z = 1$ és $y + z = x$ miatt $z$ csak 2 lehet. Ahonnan az egyedül lehetséges megoldás $z = 2, y = 3, x = 5$. Erre a három számra viszont nem teljesül a $z^2 - x = y$ feltétel.

Az egyenletnek nincs megoldása a prímszámok halmazán.

*5, Egy tetraéder két-két szemközti éle egységnyi, további két szemközti éle pedig $x$ hosszúságú. Adjuk meg az $x$ értékét úgy, hogy a tetraéder térfogata maximális legyen.*

**Megoldás:** Rajzoljuk meg a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonját. A paralelepipedon kitérő lapátlói lesznek az eredeti tetraéder élei. A tetraéder szemközti élei egyenlők, így bennfoglaló paralelepipedonja téglatest. Ismert, hogy a tetraéder térfogata a bennfoglaló paralelepipedon térfogatának az egyharmada. Elegendő tehát a bennfoglaló téglatest térfogatának maximumát megkeresni. A téglatest élei legyenek $a, b$ és $c$. Pitagorasz-tételek felírásával

$$a^2 + b^2 = 1,$$

$$b^2 + c^2 = 1,$$

$$c^2 + a^2 = x^2.$$

Az első és második egyenletből $a = c$, amelyek alapján a harmadikból $a = c = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Az első egyenletbe visszahelyettesítve pedig $b = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$. Írjuk fel a téglatest térfogatát:

$$V = abc = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

A térfogat nagysága pozitív szám, így akkor lesz maximális, amikor a négyzete is maximális.

$$f(x) = V^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8}.$$

Ennek az $f$ függvénynek már meg tudjuk határozni a szélsőértékhelyeit a differenciálszámítás eszközeivel.

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^5 = x^3\left(1 - \frac{3}{4}x^2\right).$$

Szélsőérteket akkor kaphatunk, ha a derivált nulla. Azt is tudjuk, hogy $x > 0$, mert tetraéder éléről van szó.

$$1 - \frac{3}{4}x^2 = 0,$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

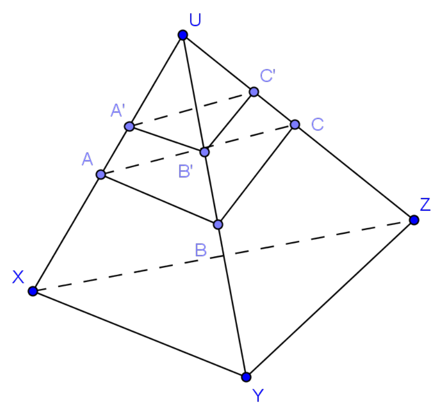
Ez a szám nagyobb 1-nél. Vizsgáljuk meg a derivált előjelét $x = 1$ és $x = 2$ esetén. Látjuk, hogy $f'(1) > 0$, $f'(2) < 0$. A derivált pozitívról negatívra vált, az $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ valóban maximumhely. A keresett él hossza $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, a maximális térfogat pedig

$$V_{max} = \frac{x^2}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

*Árvai Adolf 12. b. megoldása alapján.*

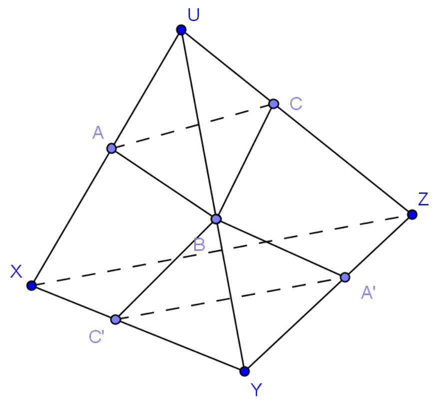
6, Egy tetraéder három csúcsára illesszünk gömböt, amely a tetraéder három élét az $A, B, C$ pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC$ háromszög alakja független attól, hogy melyik három csúcsra illesztettük a gömböt, vagyis a metszetháromszögek mind hasonlók.

**Megoldás:** Illesszünk először az $UXYZ$ tetraéder $X, Y, Z$ csúcsaira két gömböt, ezek az $UX, UY, UZ$ éleket rendre az $A, B, C$, illetve $A', B', C'$ pontokban metszik.




Mivel az $XYBA$ és $XYB'A'$ négyszögek húrnégyszögek, ezért $UAB\angle = UA'B'\angle = XYU\angle$ és így $AB$ és $A'B'$ egyenesek párhuzamosak. Hasonló okból párhuzamosak a $CB$ és $C'B'$ egyenesek is; következésképpen az $ABC$ és $A'B'C'$ síkok is párhuzamosak, mivel tartalmaznak két-két metsző egyenest, amelyek megfelelői párhuzamosak. Párhuzamos síkok a tetraéderből hasonló háromszögeket metszenek ki, ezért az $ABC$ és $A'B'C'$ háromszgöek hasonlók.

Illesszünk most két gömböt a tetraéder különböző csúcshármasára: az egyiket az $XYZ$-re, a másikat az $XZU$-ra, az előbbi a már betűzött $ABC$ háromszöget metszi ki, az utóbbi pedig az $YZ, YU, YX$ éleket rendre az $A', B', C'$ pontokban metszi.




Az előző eset bizonyítása alapján feltehetjük, hogy $B \equiv B'$. Azt kell belátnunk, hogy $ABC$ és $A'BC'$ háromszögek hasonlók. Mivel $XYBA$ és $XC'BU$ húrnégyszögek, $YXU\angle = ABU\angle = C'BY\angle$. Hasonlóan $CBU\angle = A'BY\angle$. Az $ABC$ síkot a $B$-ben $UY$-ra állított merőleges síkra tükrözve a $BA$ egyenes a $BC'$ egyenesbe, a $BC$ egyenes pedig a $BA'$ egyenesbe megy át, tehát az $ABC$ sík a $C'BA'$ síkba és az $ABC\angle$ a $C'BA'\angle$-be, ezért $ABC\angle = C'BA'\angle$. Emellett az előbbi szögegyenlőségek következményeként $ABU\triangle \sim BYC'\triangle$ és így $AB/BU = BY/BC'$. Hasonlóan kapjuk, hogy $BC/BU = BY/BA'$. E két egyenlőség következménye, hogy

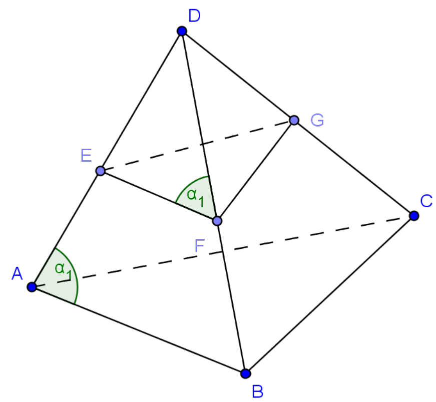
$$AB/BC = BA'/BC',$$

tehát az $ABC$ és $A'BC'$ háromszögek megegyeznek $B$-nél fekvő szögükben és a két közrefogó oldal arányában. A két háromszög valóban hasonló.

(Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából, 205. old., 43. feladat.)

*Reiman István Fejezetek az elemi geometriából című gyűjteményéhez készített szerzői megoldása*

**2. Megoldás:** Az $ABCD$ tetraéder $A, B, C$ csúcsaira illeszkedő gömb az $AD, BD$ és $CD$ éleket $E, F$ és $G$ pontokban metszi.




Az $EFBA, FGCB$ és $GEAC$ négyszögek húrnégyszögek, mivel tudjuk, hogy egy sík a gömbből egy kört metsz ki, a négyszögek csúcsai mind rajta vannak a kimetszett körvonalon. A szemközti szögek összege $180°$, a gömbön kívül keletkező háromszögek hasonlók a megfelelő tetraéder oldallapokhoz.

$$ABD\triangle \sim EFD\triangle, BCD\triangle \sim FGD\triangle, CAD\triangle \sim GED\triangle.$$

Felírjuk a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow EF = \frac{DF}{AD} \cdot AB = \frac{DE}{BD} \cdot AB,$$
$$\frac{FG}{BC} = \frac{DG}{BD} = \frac{DF}{CD} \Rightarrow FG = \frac{DG}{BD} \cdot BC = \frac{DF}{CD} \cdot BC,$$
$$\frac{EG}{AC} = \frac{DG}{AD} = \frac{DE}{CD} \Rightarrow EG = \frac{DG}{AD} \cdot AC = \frac{DE}{CD} \cdot AC.$$

Ezek segítségével már fel tudjuk írni a keletkezett $EFG$ háromszög oldalainak arányát is:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{\frac{DF}{AD} \cdot AB}{\frac{DF}{CD} \cdot BC} = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC},$$
$$\frac{FG}{EG} = \frac{\frac{DG}{BD} \cdot BC}{\frac{DG}{AD} \cdot AC} = \frac{AD \cdot BC}{BD \cdot AC},$$
$$\frac{EG}{EF} = \frac{\frac{DE}{CD} \cdot AC}{\frac{DE}{BD} \cdot AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD},$$

vagyis az oldalak aránya független a gömb választásától, minden esetben megegyezik két pár szemközti él szorzatának arányával. Beláttuk tehát, hogy bármelyik három csúcsra illesztünk is gömböt, a keletkező háromszög bármely két oldalának aránya megeyezik két szemközti él szorzatának és másik két szemközti él szorzatának arányával, amely ennek megfelelően állandó.

*Árvai Adolf 12. b. megoldása.*