Kardos Gyula Matematika Verseny
11. osztály
2015. február 11.

1, Mutassuk meg, hogy két egymás utáni páratlan prím összege legalább három (nem feltétlenül különböző) prím szorzata.

2, Írjuk fel egy tetszőleges pozitív p prímszám reciprokát két különböző törzstört összegeként. (Törzstörtnek nevezzük azokat a törteket, amelyeknek számlálója 1.)

3, A Dirichlet-tétel felhasználása nélkül mutasuk meg, hogy végtelen sok olyan prímszám van, amelynek tízes számrendszerben felírt alakjában az utolsó jegy 9.

4, Bizonyítsuk be, hogy a magasságpontos tetraédernél bármely csúcshoz tartozó magasság talppontja a csúccsal szemközti lap magasságpontjával esik egybe.

5, Mekkora az aránya egy tetszőleges tetraéder súlyvonalai négyzetösszegének és az élei négyzetösszegének?

6, Legyen egy $ABCD$ magasságpontos tetraéder magasságpontja M pont. Igazoljuk, hogy

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4R^2,$$

ahol R a tetraéder köré írható gömb sugara.