Feladatok

8. osztály

1. A tanár felírta a táblára az egész számokat 1-től kezdve valameddig, majd valaki letörölt közülük egy számot, és az átlag $13\frac{9}{13}$ lett. Melyik számot törölték le?

2. Adott három párhuzamos egyenes; mindegyiken pirosra festettünk 5 pontot. Tekintsük az összes háromszöget, melynek csúcsai pirosak, két csúcsuk egy egyenesen, a harmadik pedig egy másik egyenesen van; majd tekintsük az összes olyan piros csúcsú négyszöget, melynek két-két csúcsa egy-egy egyenesre illeszkedik.
Miből van több: háromszögből vagy négyszögből?

3. Egy egyenlőszárú ABC háromszög CA szárát a BC alappal szemközti csúcson túl hosszabbítsuk meg a kétszeresére. Az így nyert végpontot kössük össze a B csúccsal. Igazoljuk, hogy ez az összekötő egyenes merőleges az alapra!

4. Péter és Petra egy görögdinnye tömegét dekagrammban becsülték meg. Ha Péter az általa mondott értéknél 10%-kal többet mondott volna, Petra pedig a saját számánál 15%-kal kevesebbet, akkor mindketten eltalálták volna a pontos értéket.
Ki tévedett kevesebbet: Péter vagy Petra?

5. Niki és Miki kártyáznak. A vesztes 1 zsetont ad a nyertesnek, az első játékban. 2 zsetont a másodikban, 4 zsetont a harmadikban és így tovább, egy adott játékban mindig az előző nyeremény dupláját adja a vesztes a nyertesnek.
Niki 601 zsetonnal ült le játszani, és a 10. játék után az összes zsetonját elvesztette. Melyik játékokat nyerte meg Niki?

Javítókulcs

1. A tanár felírta a táblára az egész számokat 1-től kezdve valameddig, majd valaki letörölt közülük egy számot, és az átlag $13\frac{9}{13}$ lett. Melyik számot törölték le?

Mivel az átlag $13\frac{9}{13}=\frac{178}{13}$, ezért a számok darabszámánál eggyel kisebb szám osztható 13-mal, mert csak így kaphatunk az átlagszámításnál tizenharmadokat. ***(2 pont)***

14 szám esetén bármelyiket is töröljük le, az átlag 13-nál kisebb lesz. ***(2 pont)***

27 szám esetén az összeg $1+2+...+27=378$, a megmaradó 26 szám összege az átlag 26 szorosa, tehát $\frac{178}{13}\cdot 26=356$, tehát a 22-őt kellett letörölni. ***(4 pont)***

Ha legalább 40 számot veszünk, akkor a legnagyobb szám letörlése esetén is 14-nél nagyobb a megmaradt számok átlaga, így több megoldás nem lehet. ***(2 pont)***

2. Adott három párhuzamos egyenes; mindegyiken pirosra festettünk 5 pontot. Tekintsük az összes háromszöget, melynek csúcsai pirosak, két csúcsuk egy egyenesen, a harmadik pedig egy másik egyenesen van; majd tekintsük az összes olyan piros csúcsú négyszöget, melynek két-két csúcsa egy-egy egyenesre illeszkedik.
Miből van több: háromszögből vagy négyszögből?

A háromszögek száma:
Különböztessük meg az egyeneseket.
A három párhuzamos egyenesből kettőt $3\cdot 2=6$-féleképpen választhatunk ki.
Ha egyik egyenesen kiválasztunk 2 pontot, azt $\frac{5\cdot 4}{2}=10$-féleképpen tehetjük meg, ehhez 5 féleképpen választhatunk meg a harmadik csúcsot.
A hatféleképpen kiválasztott egyenespár mindegyikén 50 db háromszög rajzolható, így az összes háromszögek száma $6\cdot 50=300$. ***(4 pont)***
Négyszögek száma:

Egy egyenesen $\frac{5\cdot 4}{2}=10$-féleképpen választhatunk ki 2 pontot. Hozzá egy másik egyenesen szintén 10 féleképpen választhatjuk ki a másik két pontot, azaz két egyenesen 100 féleképpen rajzolhatunk négyszöget.

Amelyik egyenesről nem választottunk csúcsot, azt háromféleképpen választhatjuk ki, ez megegyezik azoknak az egyenes pároknak a számával, amelyeken van négyszög csúcs.

A kiválasztott négyszögek száma $3\cdot 100=300$ ***(5 pont)***

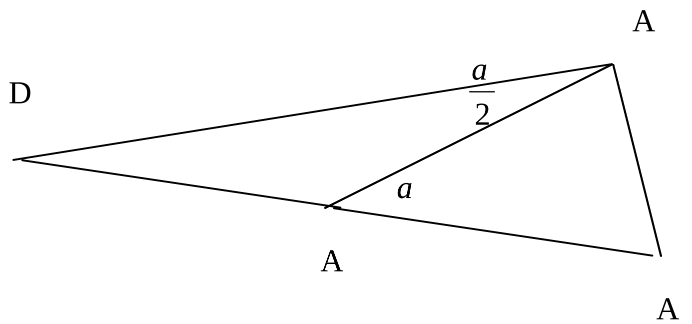
Tehát a kiválasztott háromszögek száma megegyezik a kiválasztott négyszögek számával.

(1 pont)

3. Egy egyenlőszárú ABC háromszög CA szárát a BC alappal szemközti csúcson túl hosszabbítsuk meg a kétszeresére. Az így nyert végpontot kössük össze a B csúccsal. Igazoljuk, hogy ez az összekötő egyenes merőleges az alapra!

Ha a háromszög A csúcsánál lévő szög a, a meghosszabbított szár végpontját D jelöli, akkor egyrészt az ABC háromszög egyenlőszárúsága miatt

$$ABC_{\mathbf{p}}=\frac{180-a}{2}=90^0-\frac{a}{2}$$ ***(3 pont)***



Másrészt az ABD háromszög is egyenlőszárú, és az ABC háromszög szárszöge az ABD háromszög külső szöge ezért az alapon fekvő szögei $\frac{a}{2}$ nagyságúak. ***(4 pont)***

Ebből következik, hogy $CBD_{<}=CBA_{<}+ABD_{<}=90^0-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=90^0$, ***(2 pont)***

Vagyis BD merőleges a BC alapra. ***(1 pont)***

Megjegyzés: Az állítás következik Thalesz tételének megfordításából is.

4. Péter és Petra egy görögdinnye tömegét dekagrammban becsülték meg. Ha Péter az általa mondott értéknél 10%-kal többet mondott volna, Petra pedig a saját számánál 15%-kal kevesebbet, akkor mindketten eltalálták volna a pontos értéket.
Ki tévedett kevesebbet: Péter vagy Petra?

Legyen a dinnye x dkg, Péter tippje k dkg, Petráé m dkg.
Ekkor $x = k \cdot 1{,}1 = m \cdot 0{,}85$, ***(5 pont)***
Melyből $k = \frac{x}{1{,}1}$, és $m = \frac{x}{0{,}85}$ $\quad x - \frac{x}{1{,}1} < \frac{x}{0{,}85} - x$ miatt ***(4 pont)***
(vagy $k \approx 0{,}91x$ és $m \approx 1{,}18x$ miatt)
Péter tévedett kevesebbet. ***(1 pont)***

Bármilyen jó szöveges indoklás is elfogadható.

5. Niki és Miki kártyáznak. A vesztes 1 zsetont ad a nyertesnek, az első játékban. 2 zsetont a másodikban, 4 zsetont a harmadikban és így tovább, egy adott játékban mindig az előző nyeremény dupláját adja a vesztes a nyertesnek.
Niki 601 zsetonnal ült le játszani, és a 10. játék után az összes zsetonját elvesztette.
Melyik játékokat nyerte meg Niki?

Niki x zsetont nyert összesen, Miki pedig y zsetont.
10 játék alatt összesen 1023 zsetont nyertek a játékosok, tehát
$x + y = 1023$. ***(2 pont)***
Másrészt Miki 601 zsetonnal nyert többet Nikinél. Azaz
$y = x + 601$. ***(2 pont)***
A kapott egyenletekből $x = 211$ zseton. Ez pedig Niki az egyes játékok során Mikitől nyerte el. (***2 pont***)
A 211 –et fel kell írni 2 hatványok segítségével: ***(2 pont)***
$211 = 1 + 2 + 16 + 64 + 128$
Így Niki az 1. 2. 5. 7. 8. játékot nyerte meg. ***(2pont)***