Megoldások

1. feladat

Ha a barna hajú igazmondó, akkor válasza *igen*, ha pedig hazug, akkor is *igen* a válasza. Tehát barna hajú mindenképpen *igen*-nel válaszolt.
Szőke hajú ezt megerősíti, ezért ő igazmondó lehet csak. Állításának második fele szerint barna hajú csak hazug lehet. Ez meg is felel feltételeinknek.

2. feladat

Tükrözzük a háromszöget a nem ismert oldal felezési pontjára. Ekkor középpontosan szimmetrikus négyszöget, azaz paralelogrammát kapunk. Ennek oldalai 6 cm, 8 cm,, egyik átlója 10 cm. Ezek egy derékszögű háromszöget alkotnak, így a paralelogramma téglalap. Területe $48cm^2$. A háromszög területe a paralelogramma területének a fele: $24cm^2$.

3. feladat

Legyen $x \in N$, ekkor a számláló és nevező összege: $3x + 4x = 7x$.
A feltételek szerint $10 \le 7x \le 99$, és $7x - 10 = n^2$, ahol $n \in N$.
7 többszöröseit megvizsgálva pontosan három felel meg a feltételeknek:

$14 - 10 = 4 = 2^2$, tehát a tört lehet: $\frac{6}{8}$;

$35 - 10 = 25 = 5^2$, tehát a tört lehet: $\frac{15}{20}$;

$91 - 10 = 81 = 9^2$, tehát a tört lehet: $\frac{39}{52}$.

4. feladat

Három különböző felbontása lehet a 2006-nak.

$$500 + 501 + 502 + 503 = 2006$$

$$110 + 111 + 112 + ...124 + 125 + 126 = \frac{110 + 126}{2} \cdot 17 = 2006$$

$$5 + 6 + 7 + ... + 61 + 62 + 63 = \frac{5 + 63}{2} \cdot 59 = 2006$$

Annak esetleges indoklása, hogy nincs több megoldás:
Ismert, miszerint néhány egymás utáni pozitív egész szám összegét úgy is kiszámíthatjuk, hogy: $\frac{\text{"az első szám"+"az utolsó szám"}}{2} \cdot \text{"a számok száma"}$. Mivel ez szorzat, nézzük meg 2006 kétszeresének prímfelbontását:

$2006 \cdot 2 = 4012 = 2^2 \cdot 17 \cdot 59$.

A "számok száma" 4012 osztója lehet.
A 4012 osztói közül a feltételeket figyelembe véve a "számok száma" lehet:4, 17, 59.

Ha a "számok száma" 4, akkor a felbontás: $500+501+502+503=2006$.
Ha a "számok száma" 17, akkor a felbontás:
$110+111+112+...124+125+126=\frac{110+126}{2}\cdot 17=2006$.
Ha a "számok száma" 59, akkor a felbontás:
$5+6+7+...+61+62+63=\frac{5+63}{2}\cdot 59=2006$.

5. feladat

Ismeretes, hogy a konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180^0$, ahol n az oldalak száma. Ezért sokszögünk minden szöge 120^0, ezek külső szögei 60^0-osak. Így három oldalra kifelé az ábra alapján egy-egy szabályos háromszöget rajzolhatunk. Ekkor egy nagyobb, POR szabályos háromszöget kapunk.
Legyenek az eredeti hatszög oldalainak hossza rendre *a, b, c, d, e, f.*
Az állítás:
$AB+BC=DE+EF \Leftrightarrow a+b=e+d$ alakba írható.
A POR szabályos háromszögben: $a+b=PO-f$ és $e+d=PR-f$ egyenlőségből következik az állítás.