Néhány kedvenc szakköri feladatom :)

Telek Zsigmond

2020.12.15.

1. Mutassuk meg, hogy ha az $1, 2, , 2n, \ldots$ számok közül kiválasztunk $n+1$-et, akkor lesz olyan kettő, hogy az egyik osztója a másiknak. Igaz marad-e az állítás $n+1$ helyett n -re ?

2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 = 21$$

3. Létezik-e olyan polinom, amely minden egész helyen egész értéket vesz fel és főegyütthatója $\frac{1}{13}$?

4. Az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom együtthatói egész számok, három valós gyöke van, továbbá ad páratlan és bc páros. Igazoljuk, hogy a gyökök között van irracionális szám.

5. Tudjuk, hogy a, b és c az $x^3 - 3x + 1$ polinom valós gyökei úgy, hogy $a < b < c$. Igazoljuk, hogy akkor

$$b^2 - a = c^2 - b = a^2 - c = 2$$

6. Jelölje α a $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ polinom legnagyobb valós gyökét. Igazoljuk, hogy $[\alpha^{2020}]$ osztható 17-tel, ahol $[.]$ az egészrész függvény.

7. Van-e olyan $p(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $p(1) = 4, p(2) = 7$, valamint $p(x)$ -nek van egész gyöke?

8. Az a, b, c páronként különböző pozitív egész számok, a $P(x)$ egész együtthatós polinom. Lehetséges-e, hogy egyszerre teljesüljön $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$?

9. Mennyivel egyenlők a következő összegek?

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots; \ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot 2^{-k} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots; \ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \cdot 2^{-k} = 1 + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots$$

10. A $p(x)$ egész együtthatós polinom olyan, hogy létezik négy, páronként különböző egész szám: a, b, c és d úgy, hogy $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5$. Lehetséges-e, hogy valamely x egész szám esetén $p(x) = 8$?