1. Az alábbi – különböző számrendszerekben megadott – számok közül hány páros van?

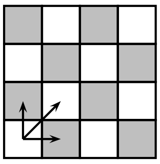
$$123_5; \qquad 1234_6; \qquad 12345_7; \qquad 123456_8; \qquad 1234567_9.$$

2. Egy bolha a számegyenes origójából indul és minden másodpercben eggyel jobbra vagy balra ugrik. A a 11-edik másodpercben épp az 5-ben található. Hányféle ugrássorozattal juthatott oda?

3. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013?

4. A 2012 egy hidalható négyjegyű völgyszám. Négy számjegyből áll, a két szélső nagyobb, mint a középsők (völgyszám) és a két szélső egyenlő (hidalható). Összesen hány hidalható négyjegyű völgyszám van?

5. Hányféleképpen juthat el a király a 4×4-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha minden lépésben a vele jobbra szomszédos, felfelé szomszédos vagy átlósan jobbra felfelé szomszédos mezőre mehet át?



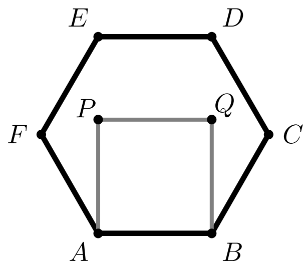
6. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevõk csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszandó játszmák 24%-ára kerülne csak sor. Hány versenyzõ indult eredetileg a versenyen?

7. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány ponttal van több az egyik egyenesen, mint a másikon?

8. Határozzuk meg mindazon x egész számok abszolút értékének összegét, amelyekre az $x^2+32x+2264$ polinom helyettesítési értéke egyenlõ egy prímszám négyzetével!

9. Az $f(x) = x^2 - 4|x-1| + p$ valós változójú függvény, amelyben p valós paraméter. Az f függvény pontosan három helyen veszi fel a 2011 értéket. Határozzuk meg p ennek megfelelõ összes lehetséges értékének összegét!

10. Az ábrán látható módon helyezzük el a 600 egység oldalhosszúságú $ABCDEF$ szabályos hatszögben a $PQBA$ egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög belsõ felületén a négyzetet a következõ módon: elõször az óramutató járásával megegyezõen forgassuk a négyzetet a B körül mindaddig, amíg a négyzet Q csúcsa a hatszög C csúcsához ér. Ezután C körül forgassuk az óramutató járásával megegyezõen a négyzetet, míg P egybeesik D-vel. Majd D körül forgassuk az óramutató járásával megegyezõen a négyzetet, amíg a négyzet csúcsa a hatszög E csúcsához ér.



Folytassuk tovább ezt az eljárást mindaddig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után vissza nem ér az AB oldalhoz. Milyen hosszú utat jár be ezalatt P? Adjuk meg az út π-vel leosztott hosszának egészrészét!

A karácsonyi vetélkedő eredményei

Minden feladat végeredménye egy nemnegatív egész szám. Ezt kell bemutatni a játékvezetőnek a csapatsorszám és a feladat sorszámának feltüntetésével. Minden feladat helyes megoldása 20 pontot ér, de a rossz eredményért alkalmanként -5 pont jár.

1. Az alábbi – különböző számrendszerekben megadott – számok közül hány páros van?

$$123_5; \qquad 1234_6; \qquad 12345_7; \qquad 123456_8; \qquad 1234567_9.$$

Eredmény: 4.

2. Egy bolha a számegyenes origójából indul és minden másodpercben eggyel jobbra vagy balra ugrik. A a 11-edik másodpercben épp az 5-ben található. Hányféle ugrássorozattal juthatott oda?

Eredmény: $\binom{11}{3} = 165$.

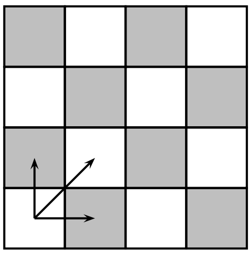
3. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013?

Eredmény: a $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ szám 2013-nál kisebb pozitív osztóinak száma: 7

4. A 2012 egy hidalható négyjegyű völgyszám. Négy számjegyből áll, a két szélső nagyobb, mint a középsők (völgyszám) és a két szélső egyenlő (hidalható). Összesen hány hidalható négyjegyű völgyszám van?

Eredmény: $12 + 22 + 32 + 42 + 52 + 62 + 72 + 82 + 92 = 285$

5. Hányféleképpen juthat el a király a 4×4-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha minden lépésben a vele jobbra szomszédos, felfelé szomszédos vagy átlósan jobbra felfelé szomszédos mezőre mehet át?



Eredmény: 63.

6. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevõk csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszandó játszmák 24%-ára kerülne csak sor. Hány versenyzõ indult eredetileg a versenyen?

Eredmény: 26

7.

Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány ponttal van több az egyik egyenesen, mint a másikon?

Eredmény:

$$\binom{p}{2}\binom{q}{2} = 2\left(\binom{p}{2}q + \binom{q}{2}p\right)$$

$(p-5)(q-5) = 16$, $p = 7$, $q = 13$ vagy fordítva. A válasz tehát 6.

8. Határozzuk meg mindazon x egész számok abszolút értékének összegét, amelyekre az $x^2+32x+2264$ polinom helyettesítési értéke egyenlõ egy prímszám négyzetével!

Eredmény: $(x+16)^2 + 2008 = p^2$, azaz $x + 16 = n$-nel $2008 = p^2 - n^2$. Világos, hogy itt p és n elõjelét szabadon cserélhetjük. Keressük elõször a nemnegatív megoldásokat. Mivel $2008 = 2^3 \cdot 251$, ahol 251 prím és $p - n \le p + n$, ahol ez a két tényezõ azonos paritású, így vagy

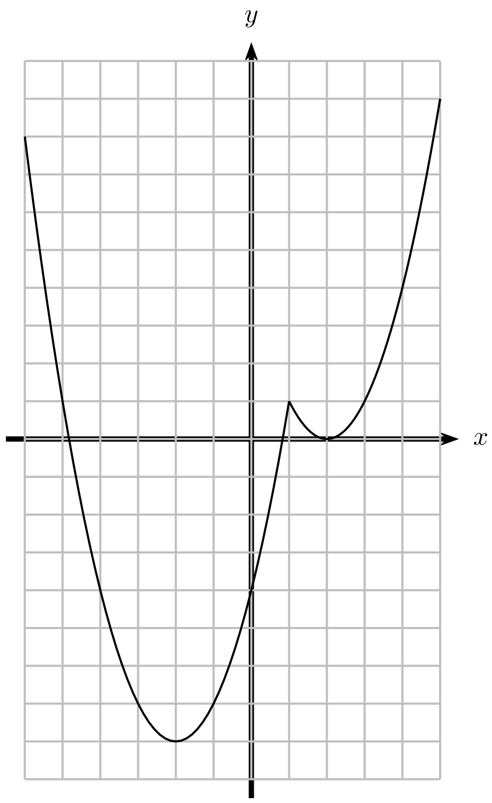
$p - n = 4$ és $p + n = 502$, azaz $p = 253 = 11 \cdot 23$, ami nem prím, vagy

$p - n = 2$ és $p + n = 1004$, azaz $p = 503$ és $n = 501$, és ez jó is.

$n = \pm 501$ az összes megoldás n-re, így $x = \pm 501 - 16$, $|x_1| + |x_2| = 1002$.

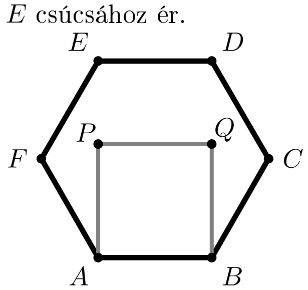
9.
Az $f(x)=x^2-4|x-1|+p$ valós változójú függvény, amelyben p valós paraméter. Az f függvény pontosan három helyen veszi fel a 2011 értéket. Határozzuk meg p ennek megfelelõ összes lehetséges értékének összegét!

Eredmény: Az alábbi ábrán az egységnégyzetes felbontású koordinátaredszerbe illesztettük be $p=0$ esetén a függvény grafikonját.



Látható, hogy az $y=0$ és az $y=1$ értékeket veszi fel háromszor a függvény. Ezeket kell 2011-be tolni, tehát $p=2010$ és $p=2011$ a megfelelõ értékek. A válasz 4021.

10. Az ábrán látható módon helyezzük el a 600 egység oldalhosszúságú $ABCDEF$ szabályos hatszögben a $PQBA$ egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög belsõ felületén a négyzetet a következõ módon: elõször az óramutató járásával megegyezõen forgassuk a négyzetet a B körül mindaddig, amíg a négyzet Q csúcsa a hatszög C csúcsához ér. Ezután C körül forgassuk az óramutató járásával megegyezõen a négyzetet, míg P egybeesik D-vel. Majd D körül forgassuk az óramutató járásával megegyezõen a négyzetet, amíg a négyzet csúcsa a hatszög E csúcsához ér.



Folytassuk tovább ezt az eljárást mindaddig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után vissza nem ér az AB oldalhoz. Milyen hosszú utat jár be ezalatt P? Adjuk meg az út π-vel leosztott hosszának egészrészét!

Eredmény: A P pont az egyes forgatásoknál 0 vagy $\frac{\pi}{6}$ radián szöget fordul $\sqrt{2}$ vagy 1 egységnyi sugáron. Az út $600\frac{\pi}{6}\left(3+2\sqrt{2}\right)$ így a válasz 582.