FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. I. foglalkozás, 2011. szeptember 20.

I.1. Helyezzünk 15 piros pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen!

I.2. Melyek azok a pontok a négyzet belsejében, amelyeken át a az oldalakkal párhuzamosan húzott egyenesek a négyzetet négy olyan téglalapra osztják, amelyek közül a két szemközti területének összege egyenl egymással?

I.3.

a) Adott az F pont és a d egyenes, valamint a d egyenesen a T pont. Szerkesztend kör, amely átmegy F-en és T-ben érinti d-t.

b) Adott az f kör és a d egyenes, valamint a d egyenesen a T pont. Szerkesztend kör, amely érinti f-et és d-t, az utóbbit épp T-ben.

I.4.

a) Hányféleképpen juthatunk el a derékszög koordinátarendszer origójából a $(4;3)$ pontba a rácsvonalakon, ha egy-egy lépésben valamely rácspontról mindig a jobbra vagy felfelé szomszédos másik rácspontra léphetünk át?

b) Hányféleképpen juthatunk el a térbeli derékszög koordinátarendszer origójából a $(4;3;2)$ pontba a rácsvonalakon, ha egy-egy lépésben valamely rácspontról a következ rácspontba mutató vektor az az $\underline{i}(1;0;0)$, $\underline{j}(0;1;0)$, $\underline{k}(0;0;1)$ vektorok egyike kell legyen?

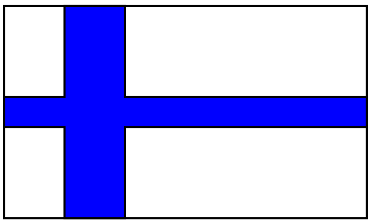
I.5. Igaz-e, hogy ha kiszínezzük a sík pontjait két színnel, akkor mindig lesz olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa egyforma szín?

I.6. Vannak-e olyan a, b pozitív egész számok, amelyre az $ax+b$ kifejezés értéke minden pozitív egész x esetén prímszám?

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. II. foglalkozás, 2011. szeptember 28.

II.1. Helyezzünk 10 piros és 14 kék pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen, mint kék!

II.2.
A finnek nemzeti zászlója: fehér téglalap alapon fekv kék kereszt (lásd az ábrát!). A kék kereszt hosszabbik sávjának a területe 8800cm^2, a rövidebbik sáv területe pedig 5400cm^2. Mekkora a zászló területe, ha a kék kereszt 12600cm^2 terület?



II.3.
a) Adott az F pont és a d kör, valamint a d körön a T pont. Szerkesztend kör, amely átmegy F-en és T-ben érinti d-t.

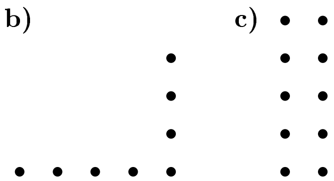
b) Adott az f és a d kör, valamint a d körön a T pont. Szerkesztend kör, amely érinti f-et és d-t, az utóbbit épp T-ben.

II.4.
Bergengóciában a Lottón az 1, 2, 3, 4, ..., 10 számokból húznak ki hármat. Egy szelvénnyel játszunk. Mennyi az esélye, hogy szelvényünk
a) telitalálatos; **b)** két találatos; **c)** 0 találatos?
d) Mennyi az esélye, hogy egymást követ tíz hét (tíz sorsolás) egyikén sem lesz telitalálatos szelvényünk?
e) Hány hét után nagyobb már $\frac{1}{2}$-nél annak az esélye, hogy volt telitalálatos szelvényünk?
f) Mennyi az esélye egy sorsoláson, hogy a kihúzott számok között van páros?
g) Mennyi az esélye egy sorsoláson, hogy a kihúzott számok között van két szomszédos?

I.5. Igaz-e, hogy ha kiszínezzük a sík pontjait két színnel, akkor mindig lesz olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa egyforma szín?

I.6. Vannak-e olyan a, b pozitív egész számok, amelyre az $ax + b$ kifejezés értéke minden pozitív egész x esetén prímszám?

II.5. Hányféle sorrendben vehet le az összes kavics, ha egy lépésben csak olyan kavics vehet le, amelytl se balra és se fölfelé nincs több kavics és a kiinduló helyzet az ábrán látható?



II.6. Hányféleképpen juthatunk el a derékszög koordinátarendszer origójából az $(5; 5)$ pontba a rácsvonalakon, ha egy-egy lépésben valamely rácspontról mindig a jobbra vagy felfelé szomszédos másik rácspontra léphetünk át, de nem mehetünk az $x = y$ egyenlet egyenes alá?

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. III. foglalkozás, 2011. október 5.

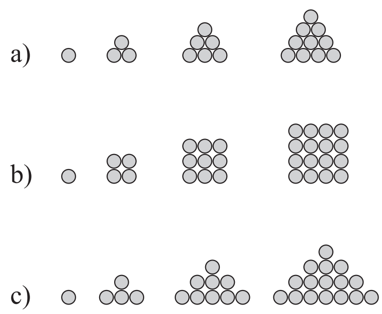
III.1.

a) A Descartes koordinátarendszerben adottak az $A(1;2)$, $B(7;4)$, $C(3;7)$ pontok. Adjuk meg az ABC háromszög területét!

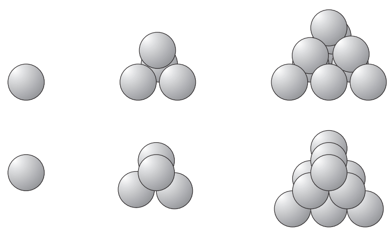
b) Keressünk a Descartes koordinátarendszerben olyan rácspontokat, amelyek által alkotott háromszög területe $\frac{1}{3}$ területegység!

III.2.

a) Kavicsokat rendezünk el meghatározott rendben kupacokba. Hány kavics lesz a 100-adik kupacban?



b) Határozzuk meg a 100. tetraéderszámot! (Hány golyó van az alábbi ábrán a 100. kupacban? A kupacsorozat oldal- és fölülnézetben is látható az ábrán.)



III.3. Hány megoldása van a pozitív egészeken az

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

egyenletnek?

Kérdezz tovább!

III.4.

Adott a síkon az A és a B pont valamint az e egyenes. Az e egyenes mely P pontjára lesz

a) $PA + PB$, **b)** $|PA - PB|$, **c)** $PA^2 + PB^2$ értéke minimális illetve maximális?

II.4.

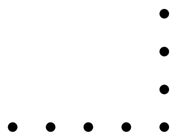
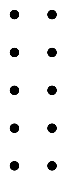
Bergengóciában a Lottón az 1, 2, 3, 4, ..., 10 számokból húznak ki hármat. Egy szelvénnyel játszunk.

g) Mennyi az esélye egy sorsoláson, hogy a kihúzott számok között van két szomszédos?

I.5. Igaz-e, hogy ha kiszínezzük a sík pontjait két színnel, akkor mindig lesz olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa egyforma szín?

I.6. Vannak-e olyan a, b pozitív egész számok, amelyre az $ax + b$ kifejezés értéke minden pozitív egész x esetén prímszám?

II.5. Hányféle sorrendben vehet le az összes kavics, ha egy lépésben csak olyan kavics vehet le, amelytl se balra és se fölfelé nincs több kavics és a kiinduló helyzet az ábrán látható?

b)  **c)** 

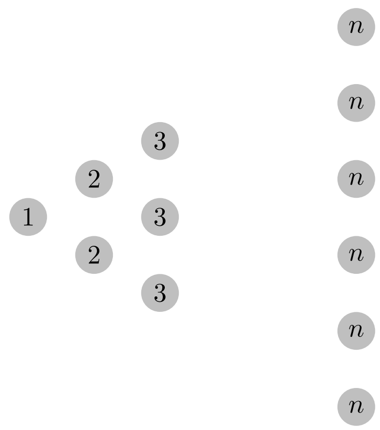
II.6. Hányféleképpen juthatunk el a derékszög koordinátarendszer origójából az $(5;5)$ pontba a rácsvonalakon, ha egy-egy lépésben valamely rácspontról mindig a jobbra vagy felfelé szomszédos másik rácspontra léphetünk át, de nem mehetünk az $x=y$ egyenlet egyenes alá?

III.5.
a) Legfeljebb hány metszéspontja lehet 4 körnek és 3 egyenesnek?
b) Legfeljebb hány részre osztja a síkot 4 kör és 3 egyenes?

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. V. foglalkozás, 2011. október 19.

V.1.
Üres rácsháromszögnek nevezünk egy háromszöget, melynek a Descartes koordinátarendszerben minden csúsca rácspont, de se a határán, se a belsejében nincsen rácspont.
a) Keressünk olyan üres rácsháromszöget, amelynek kerülete nagyobb 10 egységnél!
b) Keressünk olyan üres rácsháromszöget, amelynek mindegyik oldala nagyobb 10 egységnél!
c) Keressünk olyan üres rácsháromszöget, amelynek területe nagyobb 10 egységnégyzetnél!

V.2. A négyzetszámok összegképlete (*Pataki János*tól hallottam)
Rendezzük el az 1, 2, $\dots n$ számokat (a k számot épp k-szor felírva) az alábbi módon szabályos háromszögrácsban:

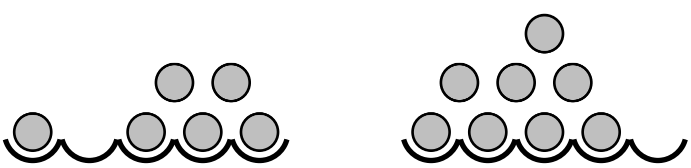


a) Határozzuk meg a fenti számok összegét!
b) Forgassuk el a táblázatot a középpontja körül 120°, majd 240°-kal és adjuk össze az azonos helyre kerül számokat, majd az összes számot!

III.4.
Adott a síkon az A és a B pont valamint az e egyenes. Az e egyenes mely P pontjára lesz
b) $|PA - PB|$, **c)** $PA^2 + PB^2$ értéke minimális illetve maximális?

I.6. Vannak-e olyan a, b pozitív egész számok, amelyre az $ax+b$ kifejezés értéke minden pozitív egész x esetén prímszám?

IV. 3. Korongokat rakunk egy táblára. Alul 5 hely van, ezekbe lehet tenni a legalsó korongokat. Ha két szomszédos helyen van korong, akkor rájuk („közéjük–föléjük") tehet egy újabb korong. Így legfeljebb $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ korongot tehetünk a táblára. Hányféle stabil állásban helyezhetk el a korongok? Az alábbi két ábrán egy-egy megfelel állás látható.



IV. 4. Keressünk néhány olyan $(x,\ y,\ z)$ valós számhármast, amelyre

$$x + y + z = 2011, \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2011}.$$

IV. 5. Felosztható-e a természetes számok halmaza három egymástól páronként diszjunkt végtelen sok elembl álló részhalmazra úgy, hogy ha valaki kiválasztja bármelyik halmaz bármelyik három elemét és megadja nekünk ezek összegét, akkor abból kitalálhassuk, hogy melyik halmazból választott?

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. VII. foglalkozás, 2011. november 9.

VII.1.

a) Adott a d egyenes, és a rá nem illeszked F pont. Futtassuk a T pontot a d egyenesen és szerkesszük meg azt a kört, amely T-ben érinti d-t és átmegy F-en! Milyen ponthalmazt ír le a kör középpontja? (Mutassuk meg, hogy ez parabola, a d-tl és F-tl egyenl távolságra lev pontok mértani helye.)

b) Egybevágóság erejéig hány parabola van?

c) Vegyünk fel derékször koordinátarednszert, amelynek origója az F-bl d-re állított FD merleges C felezpontja, x-tengelye párhuzamos d-vel, míg az y tengely merleges rá. Jelölje az FD szakasz hosszát p! Írjuk fel a parabola egyenletét!

d) Hol van a fókuszpontja és a vezéregyenese az $y = x^2$ parabolának?

e) Milyen egyenest neveznél a parabola érintjének?

f) Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola $P(1; 1)$ pontbeli érintjét!

g) Mutassuk meg, hogy a parabola alakú tükörre a tengelyével párhuzamos irányból érkez fénysugarak tükrözdés után a fókuszponton (gyújtóponton) haladnak át!

VII.2. Adot ta k kör és a P pont. Húzzuk P-n át szelt k-hoz és határozzuk meg a szelbl a kör által lemetszett húr F felezpontjána kmértani helyét!

VII.3. Adott az A és a B pont, A-n át az a, B-n át a b egyenes úgy, hogy a és b szöge α. Hol lehet az a, b egyenesek P metszéspontja?

IV. 4. Keressünk néhány olyan (x, y, z) valós számhármast, amelyre

$$x + y + z = 2011, \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2011}.$$

IV. 5.

a) Felosztható-e a természetes számok halmaza három egymástól páronként diszjunkt végtelen sok elembl álló részhalmazra úgy, hogy ha valaki kiválasztja bármelyik halmaz bármelyik három elemét és megadja nekünk ezek összegét, akkor abból kitalálhassuk, hogy melyik halmazból választott?

Felosztható-e a természetes számok halmaza d egymástól páronként diszjunkt végtelen sok elembl álló részhalmazra úgy, hogy ha valaki kiválasztja bármelyik halmaz bármelyik s elemét és megadja nekünk ezek összegét, akkor abból kitalálhassuk, hogy melyik halmazból választott?

Döntsük el a kérdést

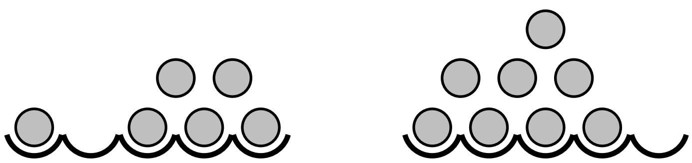
b) $d = 3$, $s = 4$; **c)** $d = 4$, $s = 3$; **d)** $d = 9$, $s = 6$; **e)** $d = s = 2$

esetén!

VII. 4. Lefeedhet-e a 6×6-os négyzet 1×2-es dominókkal hézag és átfedés nélkül úgy, hogy mindegyik bels rácsvonalat keresztezze dominó?

VII. 5. A k_U, k_V körök az A, B pontokba nmetszik egymást. Jelölje a B-n átmen e egyenesnek a k_U, k_V körökke lalkotott második (B-tl különböz) metszéspontját U illetve V! Vizsgáljuk az UAV háromszöget!

IV. 3. Korongokat rakunk egy táblára. Alul 5 hely van, ezekbe lehet tenni a legalsó korongokat. Ha két szomszédos helyen van korong, akkor rájuk („közéjük–föléjük”) tehet egy újabb korong. Így legfeljebb $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ korongot tehetünk a táblára. Hányféle stabil állásban helyezhetk el a korongok? Az alábbi két ábrán egy-egy megfelel állás látható.



FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. X. foglalkozás, 2011. november 30.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny
2008/2009. 10. évfolyam 2. kategória 1. forduló

1. Határozzuk meg azokat az egész számokat, amelyekre az $x^2 + 32x + 2264$ polinom helyettesítési értéke egyenl egy prímszám négyzetével!

2. Tekintsük az $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2008$ összeget! Az összeg tetszleges számú „+" eljelét „−"-ra változtathatjuk.
a) Bizonyítsuk be, hogy az eljelváltásokkal elérhet a 2008 érték összeg.
b) Igazoljuk, hogy a 2009 érték összeg nem állítható el eljelváltásokkal.

3. A T terület szabályos háromszög oldalaival párhuzamos egyenesek felezik a háromszög területét. A három egyenes által közrefogott háromszög területeăt. Melyik két szomszédos egész szám közé esik $\frac{T}{t}$ értéke?

4. Azt mondjuk, hogy egy sorozat Fibonacci-típusú, ha tagjai pozitív egészek és a harmadik tagtól kezdve minden eleme az elz kett összege. Például

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad ...,$$

vagy

$$3, \quad 1, \quad 4, \quad 5, \quad 9, \quad 14, \quad ...$$

Hány olyan Fibonacci-típusú sorozat van, amelynek 8. eleme 2008?

5. Tudjuk, hogy $\sqrt{44-8} = 6$, $\sqrt{4444-88} = 66$, $\sqrt{444444-888} = 666$. Ha n pozitív egész szám, akkor bizonyítsuk be, hogy az

$$A = \sqrt{444\ldots4 - 888\ldots8}$$

szám természetes szám, ha a $444\ldots4$ számban $2n$ db 4-es, míg $888\ldots8$-ban n db 8-as szerepel.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny
2007/2008. 10. évfolyam 2. kategória 1. forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy $n! + 2007$ egyetlen n pozitív egész szám esetén sem prímszám, sem pedig négyzetszám. ($n!$ az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ szorzatot jelenti.)

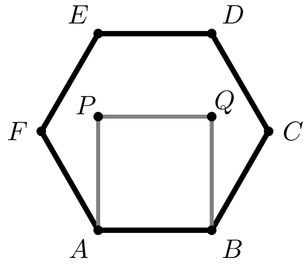
2. Adott a síkon egy egységnyi oldalú szabályos hatszög. Szerkesszünk csak vonalzó felhasználásával $\sqrt{7}$ hosszúságú szakaszt!

3. A minden valós számra értelmezett másodfokú $f(x)$ függvényre

$$f(x+2) + 3f(-x) = 2x^2$$

teljesül. Határozzuk meg az $f(x)$ függvény értékkészletét!

4. Az ábrán látható módon helyezzük el az $ABCDEF$ szabályos egységoldalú hatszögben a $PQBA$ egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög bels felületén a négyzetet a következ módon: elször az óramutató járásával megegyezen forgassuk a négyzetet a B körül mindaddig, amíg a négyzet Q csúcsa a hatszög C csúcsáhozăér. Ezután C körül forgassuk az óramutató járásával megegyezen a négyzetet, míg P egybeesik D-vel. Majd D körül forgassuk az óramutató járásával megegyezen a négyzetet, amíg a négyzet csúcsa a hatszög E csúcsáhozăér.



Folytassuk tovább ezt az eljárást mindaddig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után vissza nem ér az AB oldalhoz. Milyen hosszú utat jár be ezalatt P?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy kocka a lapjaival párhuzamos síkdarabokkal feldarabolható 2007 darab nem feltétlenül egybevágó kisebb méret kockára.

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XIV. foglalkozás, 2012. január 11.

vetélked/8. Hány olyan x valós szám van, amelyre az

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 12}$$

függvény értéke egész szám?

vetélked/9. Hányféleképpen lehet megválasztani az a, b, x, y pozitív egész számokat úgy, hogy teljesüljön a következ három feltétel:
x és y legnagyobb közös osztója a;
x és y legkisebb közös többszöröse b;
a és b szorzata 10^{2012}?

Vetélked/10. Egy 10 egység oldalú $ABCD$ négyzet minden csúcsát kössük össze a csúcsot nem tartalmazó két oldal felezpontjával. E nyolc szakasz mindegyikén 4-4 bels metszéspont keletkezett. Vegyük ezen metszésŋpontok közül a két-két középst! Ezek egy nyolcszöget határoznak meg. Mekkora ennek a nyolcszögnek a területe?

kerszog01.
a) Egy négyszögbe kör írható. A négyszög AB, BC, CD oldalainak hossza rendre 6, 7 és 9 cm. Határozzuk meg a DA oldal hosszát!
b) Egy négyszög köré kör írható. A négyszögben $DAB\angle = 48°$, $ABC\angle = 100°$. Határozzuk meg $BCD\angle$-t és $CDA\angle$-t!

kerszog02. Az ABC háromszögben $ACB\angle = 28°$. Határozzuk meg az A, B csúcsokból
a) induló magasságvonalak
b) induló szögfelezk
c) a körülírt kör középpontjához húzott szakaszok
egymással bezárt szögét!

kerszog03. Az ABC háromszög AB oldala 2 cm hosszú és ez az oldalegyenes 1 cm-re van a háromszög körülírt körének középpontjától. Mekkora lehet a háromszög $\gamma = ACB\angle$ szöge?

Kömal B. 4396. Az ABC háromszög beírt köre a b oldalt F-ben, az a oldalt G-ben érinti. Igazoljuk, hogy az A-ból a β szög felezjére állított merleges talppontja rajta van az FG egyenesen.

AD20072008haladók/2/2. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2008}$ teljesül?

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XV. foglalkozás, 2012. január 18.

2011/2012ADkezdokI-IIkatIford4fel Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a három különböz gombot egy meghatározott sorrendben közvetlenül egymás után nyomjuk meg. Legkevesebb hány gombnyomásra van szükség ahhoz, hogy biztosan kinyíljon a zr? (A megfelel három gombnyomást esetlegesen megelz gombnyomások sorozatának nincs hatása a zár szerkezetére.)

kerszog02. Az ABC háromszögben $ACB\angle = 28°$. Határozzuk meg az A, B csúcsokból
a) induló magasságvonalak
b) induló szögfelezk
c) a körülírt kör középpontjához húzott szakaszok
egymással bezárt szögét!

kerszog02ésfél. Vegyük fel a P pontot az $ABCD$ négyzet k körülírt körének rövidebbik $\widehat{BC}$ ívén és határozzuk meg a
a) $APC\sphericalangle$, **b)** $APD\sphericalangle$, **c)** $BPA\sphericalangle$, **d)** $BPC\sphericalangle$
szöget!

2011/2012OKTVIIkat2ford1fel A pozitív n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az els volt az 1. A sorrendben hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb n értéket, amire ezek teljesülnek!

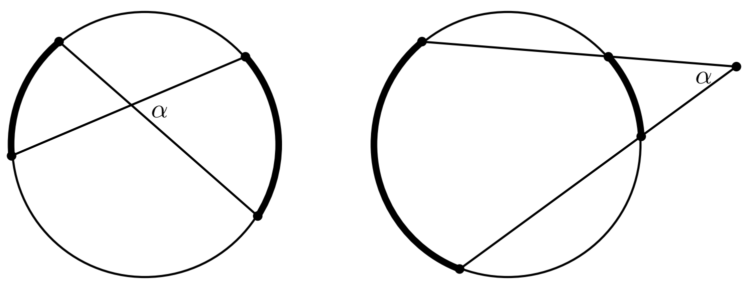
kerszog03. Az ABC háromszög AB oldala 2 cm hosszú és ez az oldalegyenes 1 cm-re van a háromszög körülírt körének középpontjától. Mekkora lehet a háromszög $\gamma = ACB\angle$ szöge?

AD20072008haladók/2/2. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2008}$ teljesül?

XV/1. A k, l körök az A pontban kívülrl érintik egymást. Egyik közös küls érintjük a két kört a T_k és a T_l pontban érinti.
a) Mekkora az T_kAT_l szög?
b) Igazoljuk, hogy a T_kT_l mint átmér fölé rajzolt Thálesz-kör érinti a két kör O_kO_l centrálisát!
c) Bizonyítsuk be, hogy az OO' mint átmér fölé rajzolt Thálesz-kör érinti a két T_kT_l közös küls érintjét!

XV/2. Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M, a magasságvonalak talppontjait T_A, T_B, T_C. Az említett hét pont $(A, B, C, M, T_A, T_B, T_C)$ közül hányféleképpen választható ki négy, amelyek egy körön vannak az ABC háromszög tetszleges választása esetén?

XV/3. Az alábbi ábrán a vastagon húzott ívek kerületi szögeit ismerjük. Számítsuk ki ezek segítségével az α szög nagyságát!



Kömal B. 4396. Az ABC háromszög beírt köre a b oldalt F-ben, az a oldalt G-ben érinti. Igazoljuk, hogy az A-ból a β szög felezjére állított merleges talppontja rajta van az FG egyenesen.

2011/2012OKTVIIkat2ford4fel Oldjuk meg a valós számok körében:

$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy.$$

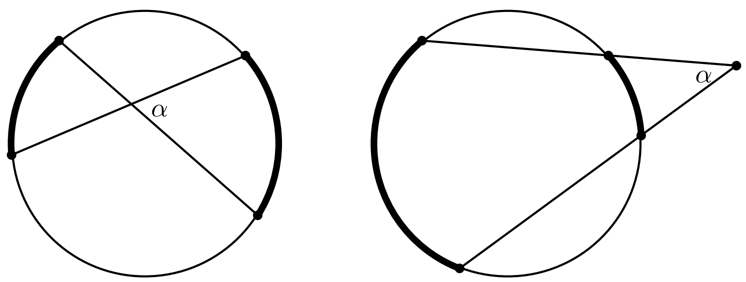
FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XVI. foglalkozás, 2012. január 25.

kerszog01.
a) Egy négyszögbe kör írható. A négyszög AB, BC, CD oldalainak hossza rendre 6, 7 és 9 cm. Határozzuk meg a DA oldal hosszát!
b) Egy négyszög köré kör írható. A négyszögben $DAB\angle = 48°$, $ABC\angle = 100°$. Határozzuk meg $BCD\angle$-t és $CDA\angle$-t!

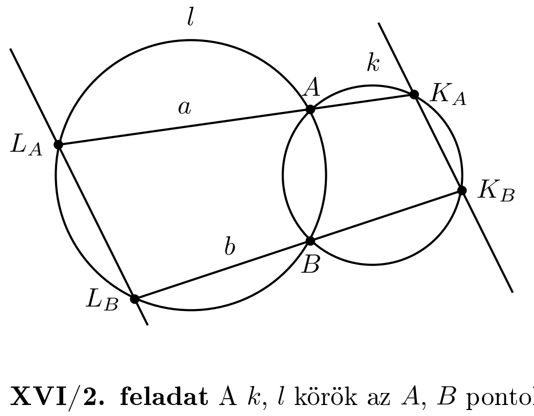
kerszog02. Az ABC háromszögben $ACB\angle = 28°$. Határozzuk meg az A, B csúcsokból
a) induló magasságvonalak
b) induló szögfelezk
c) a körülírt kör középpontjához húzott szakaszok
egymással bezárt szögét!

A fenti két példa kapcsán megbeszéltük a kerületi és középponti szögek tételét, tisztáztuk az érintszárú kerületi szög fogalmát.

XV/3. Az alábbi ábrán a vastagon húzott ívek kerületi szögeit ismerjük. Számítsuk ki ezek segítségével az α szög nagyságát!

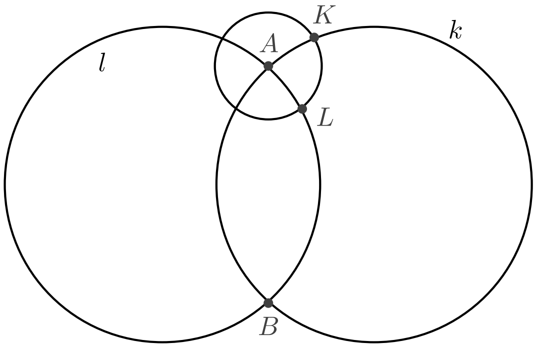


XVI/1. feladat Az a illetve a b egyenes áthalad a k, l körök A illetve B metszéspontján és a k, l köröket A-n illetve B-n kívül még a K_A, L_A, illetve a K_B, L_B pontban metszi (lásd az alábbi ábrát). Mutassuk meg, hogy a K_AK_B, L_AL_B egyenesek párhuzamosak!



XVI/2. feladat A k, l körök az A, B pontokban metszik egymást. Tekintsük a k körön a K pontot és képezzük a KA egyenes és az l kör második metszéspontjaként az L pontot. Mutassuk meg, hogy a KBL háromszög hasonlóság erejéig egyértelm, független a K pont választásától!

XVI/3. feladat Szerkesszünk kört két egyenl sugarú kör egyik metszéspontja körül. Igazoljuk, hogy ennek a két körrel való K, L metszéspontja (lásd az alábbi ábrát) az eredeti körök B metszéspontjával egy egyenesen van!

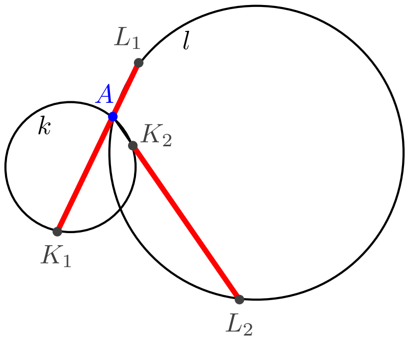


XVI/4. feladat Adott két metsz kör és egy szakasz. Szerkesztend a körök egyik metszéspontján át

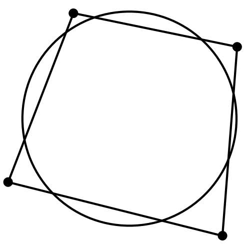
a) az elre adott szakasszal egyenl hosszúságú

b) a lehet leghosszabb

szel (tehát az egyenes két körrel való második metszéspontjai közti részét vizsgáljuk, ahogy az alábbi ábrán is látható).



XVI/5. feladat Egy kör és egy négyszög úgy helyezkedik el a síkon, mint az alábbi ábrán látható. Tudjuk, hogy a kör négyszögön belüli két-két szembenfekv ívének összege egyenl. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög húrnégyszög!



FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XVII. foglalkozás, 2012. február 2.

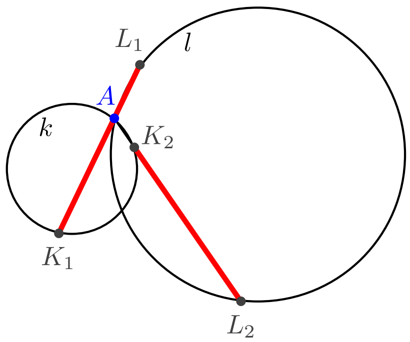
XVI/4. feladat *Múlt órán ki volt tzve*

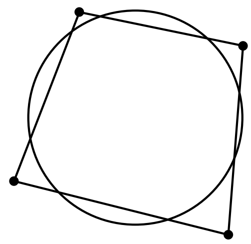
Adott két metsz kör és egy szakasz. Szerkesztend a körök egyik metszéspontján át

a) az elre adott szakasszal egyenl hosszúságú

b) a lehet leghosszabb

szel (tehát az egyenes két körrel való második metszéspontjai közti részét vizsgáljuk, ahogy az alábbi ábrán is látható).





XVI/5. feladat *Múlt órán ki volt tzve*

Egy kör és egy négyszög úgy helyezkedik el a síkon, mint az alábbi ábrán látható. Tudjuk, hogy a kör négyszögön belüli két-két szembenfekv ívének összege egyenl. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög húrnégyszög!

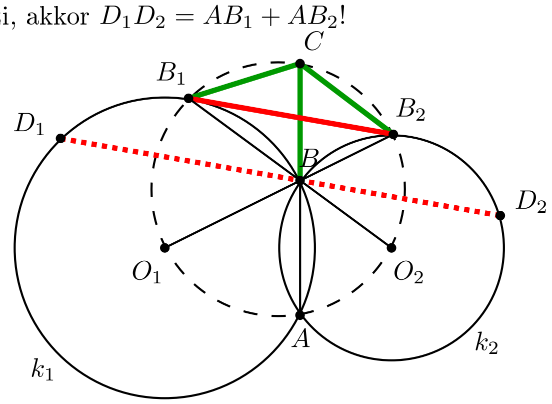
XVII/1. feladat

Az O_1 illetve O_2 középpontú k_1, k_2 körök az A, B pontokban metszik egymást. Az O_1B egyenes k_2-t még B_2-ben, az O_2B egyenes pedig k_1-et még B_1-ben metszi. Mutassuk meg, hogy (lásd az alábbi ábrát)

a) az O_1, O_2, A pontokon át fektetett k körre illeszkedik B_1 és B_2 is!

b) az AB egyenest és a k kör A-tól különböz C metszéspontjára $CB = CB_1 = CB_2$!

c) ha a B-n át B_1B_2-vel párhuzamosan húzott egyenes a k_1, k_2 köröket még a D_1, D_2 pontokban metszi, akkor $D_1D_2 = AB_1 + AB_2$!



XVII/2. feladat

Milyen n-ekre lehetséges, hogy egy n tagú társaságban, ahol az ismeretségek kölcsönösek, mindenkinek pontosan hat ismerse van?

XVII/3. feladat

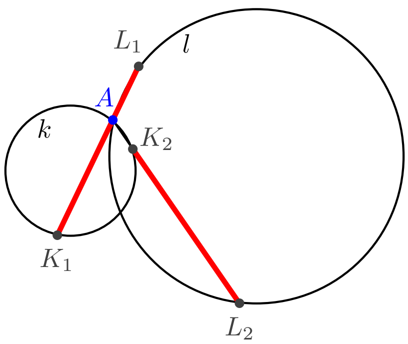
Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerse.

XVII/4. feladat

Néhány évvel a Délnyugati Birodalom széthullása után a területén létrejött 16 hercegség mindegyike 3 másikkal barátságban élt, a többivel pedig ellenségeskedett. A hajdani birodalom szomszédságában található 8 állam elhatározta, hogy segítséget nyújt a viszályokban tönkrement hercegségeknek, méghozzá mindegyik állam 2 egymással barátkozó hercegségnek nyújt támogatást. Meg lehet-e szervezni minden esetben a segélyezést úgy, hogy mindegyik hercegség részesüljön belle?

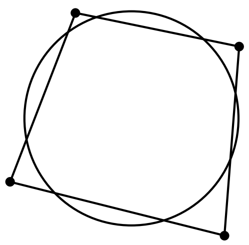
FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XVII. foglalkozás, 2012. február 2.
Feladatok és megoldásvázlatok

XVI/4. feladat Adott két metsz kör és egy szakasz. Szerkesztend a körök egyik metszéspontján át
a) az elre adott szakasszal egyenl hosszúságú
b) a lehet leghosszabb
szel (tehát az egyenes két körrel való második metszéspontjai közti részét vizsgáljuk, ahogy az alábbi ábrán is látható).



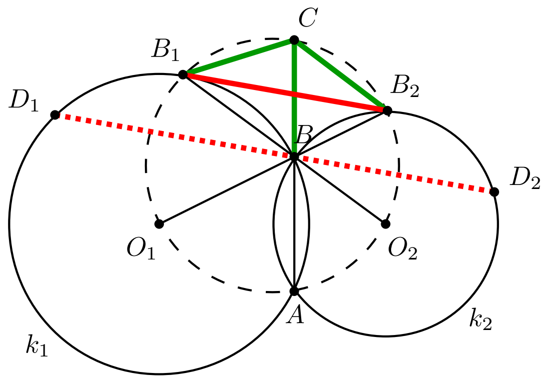
XVI/4. megoldási ötlete:
Használjuk fel az elz órai **XVI/2. feladat** eredményét!
a) Most egy adott háromszöghöz hasonló olyan háromszöget kell szerkesztenünk, amelynek egyik olala adott.
b) Most a legnagyobb háromszöget kell szerkesztenünk. Legyenek az A-ból kiinduló oldalai az átmérk!

XVI/5. feladat Egy kör és egy négyszög úgy helyezkedik el a síkon, mint az alábbi ábrán látható. Tudjuk, hogy a kör négyszögön belüli két-két szembenfekv ívének összege egyenl. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög húrnégyszög!



XVI/5. megoldásvázlat
Kössók össze a kör középpontját az oldalak és a kör metszéspontjaival, jelöljük az egyenl szárú háromszögeket és az így adódó egyenl szögeket! Az eredeti négyszög egy csúcsából kiinduló két oldalának a körig tartó része a két odatartó sugárral négyszöget alkot. Írjuk fel enégyszög szögösszegét mind a négy négyszögnél és számoljuk ezek összegét a szemközti négyszögeknél! Kapjuk, hogy az eredeti négyszög szemköztes szögeinek összege 180°.

XVII/1. feladat
Az O_1 illetve O_2 középpontú k_1, k_2 körök az A, B pontokban metszik egymást. Az O_1B egyenes k_2-t még B_2-ben, az O_2B egyenes pedig k_1-et még B_1-ben metszi. Mutassuk meg, hogy (lásd az alábbi ábrát)
a) az O_1, O_2, A pontokon át fektetett k körre illeszkedik B_1 és B_2 is!
b) az AB egyenest és a k kör A-tól különböz C metszéspontjára $CB = CB_1 = CB_2$!
c) ha a B-n át B_1B_2-vel párhuzamosan húzott egyenes a k_1, k_2 köröket még a D_1, D_2 pontokban metszi, akkor $D_1D_2 = AB_1 + AB_2$!



XVII/1. megoldásvázlatok:

a) Ahhoz pld, hogy megmutassuk A, O_1, O_2 és B_1 egy körön van elég megmutatni, hogy az AO_1 húr kerületi szögei egyenlk, azaz, hogy $AB_1O_1\angle = AO_2O_1\angle$. Ehhez használjuk ki, hogy AO_1B_1 egyenl szárú, és azt, hogy O_1O_2 szimmetriatengelye az O_1AO_2B deltoidnak.

b) A $CB_2B\angle$ az $AO_1B_1CB_2O_2$ körben a CO_1 ív kerületi szöge. Ez a $CAO_1\angle$ kerületi szöggel egyenl, ami viszont az O_1O_2 centrálisra való tükrözéssel egyenl az $O_1BA\angle$ szöggel, ami a $B_2BC\angle$ csúcsszöge, így BCB_2 valóban egyenl szárú.

c) Mutassuk meg, hogy $D_1B = AB_1$ és $D_2B = AB_2$.

XVII/2. feladat

Milyen n-ekre lehetséges, hogy egy n tagú társaságban, ahol az ismeretségek kölcsönösek, mindenkinek pontosan hat ismerse van?

XVII/2. megoldása

Természetesen n-nek legalább hétnek kell lennie. Megmutatjuk, hogy más kikötés nem kell. Legyen tehát $n > 6$ és ültessünk le egy kerek asztal mellé n olyan embert, akik közül senki nem ismer senkit. Ezután ismertessünk össze mindenkit a három bal és három jobb oldali szomszédjával. Így egy megfelel társaságot kapunk.

XVII/3. feladat

Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerse.

XVII/3. megoldása Mindenki két másikat nem ismer. Akkor hárman maximum hatot nem ismernek összesen, magukkal együtt az kilenc, marad még egy ember.

XVII/4. feladat

Néhány évvel a Délnyugati Birodalom széthullása után a területén létrejött 16 hercegség mindegyike 3 másikkal barátságban élt, a többivel pedig ellenségeskedett. A hajdani birodalom szomszédságában található 8 állam elhatározta, hogy segítséget nyújt a viszályokban tönkrement hercegségeknek, méghozzá mindegyik állam 2 egymással barátkozó hercegségnek nyújt támogatást. Meg lehet-e szervezni minden esetben a segélyezést úgy, hogy mindegyik hercegség részesüljön belle?

XVII/4. megoldása Ellenpélda: A csúcs szomszédai: B, C, D. Tekintsük még a $B_1B_2B_3B_4$ $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$ majdnem teljes négyszögeket, amelyekben tehát egy kovátelévelmind a hat él be van húzva, Ez az egy kivétel a B_1B_2, a C_1C_2 illetve a D_1D_2 él, mert ez a hat csúcs ehelyett még B-vel, C-vel illetve D-vel van összekötve.

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XVIII. foglalkozás, 2012. február 8.

XVII/3. feladat

Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerse.

XVII/4. feladat

Néhány évvel a Délnyugati Birodalom széthullása után a területén létrejött 16 hercegség mindegyike 3 másikkal barátságban élt, a többivel pedig ellenségeskedett. A hajdani birodalom szomszédságában található 8 állam elhatározta, hogy segítséget nyújt a viszályokban tönkrement hercegségeknek, méghozzá mindegyik állam 2 egymással barátkozó hercegségnek nyújt támogatást. Meg lehet-e szervezni minden esetben a segélyezést úgy, hogy mindegyik hercegség részesüljön belle?

XVIII/1. feladat (*Arany Dániel verseny, Haladók, 2004/05, II. kat., 2. ford.*)

Kincskeres mszerünk hatósugara d méter. (A mszer d sugarú környezetében lév kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB = 30$ m, $BC = 40$ m, $CA = 50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

XVIII/2. feladat Adott három pont a síkon, melyek nincsenek egy egyenesen. Szeretnénk úgy köröket írni az adott pontok, mint középpontok köré, hogy semelyik két körnek se legyen közös bels pontja (tehát a körvonalak ne legyenek metszk és egyik körlap se tartalmazza a belsejében valamelyik másik kört) és a körök kerületének összege legyen maximális.

XVIII/3. feladat (*Arany Dániel verseny, Haladók, 2005/06, II. kat., 2. ford.*)

Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következ egyenlség minden valós x-re teljesüljön:

$$(x-a)\cdot(x-10)+1=(x+b)\cdot(x+c).$$

XVIII/4. feladat (*Arany Dániel verseny, Haladók, 2005/06, II. kat., 2. ford.*)

A t terület, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezpontja E, az AD oldalé pedig F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XVIII. foglalkozás, 2012. február 8.
Feladatok és megoldásvázlatok
XVII/3. feladat

Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerse.

XVII/3. megoldása Mindenki két másikat nem ismer. Akkor hárman maximum hatot nem ismernek összesen, magukkal együtt az kilenc, marad még egy ember.

XVII/4. feladat

Néhány évvel a Délnyugati Birodalom széthullása után a területén létrejött 16 hercegség mindegyike 3 másikkal barátságban élt, a többivel pedig ellenségeskedett. A hajdani birodalom szomszédságában található 8 állam elhatározta, hogy segítséget nyújt a viszályokban tönkrement hercegségeknek, méghozzá mindegyik állam 2 egymással barátkozó hercegségnek nyújt támogatást. Meg lehet-e szervezni minden esetben a segélyezést úgy, hogy mindegyik hercegség részesüljön belle?

XVII/4. megoldása Ellenpélda: A csúcs szomszédai: B, C, D. Tekintsük még a $B_1B_2B_3B_4$ $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$ majdnem teljes négyszögeket, amelyekben tehát egy kovátelévelmind a hat él be van húzva, Ez az egy kivétel a B_1B_2, a C_1C_2 illetve a D_1D_2 él, mert ez a hat csúcs ehelyett még B-vel, C-vel illetve D-vel van összekötve.

XVIII/1. feladat (*Arany Dániel verseny, Haladók, 2004/05, II. kat., 2. ford.*)

Kincskeres mszerünk hatósugara d méter. (A mszer d sugarú környezetében lév kincs jelenlétét jelzi ki.) A kincs egy ABC háromszög belsejében lehet. A háromszög oldalai $AB = 30$ m, $BC = 40$ m, $CA = 50$ m. Csak a háromszög határán mozoghatunk.

Legalább mekkora d esetén lehetünk biztosak abban, hogy észleljük a kincs jelenlétét, bárhol is van elásva?

XVIII/1. megoldása Ha d a beírt kör sugara, azaz 10 m.

XVIII/2. feladat Adott három pont a síkon, melyek nincsenek egy egyenesen. Szeretnénk úgy köröket írni az adott pontok, mint középpontok köré, hogy semelyik két körnek se legyen közös bels pontja (tehát a körvonalak ne legyenek metszk és egyik körlap se tartalmazza a belsejében valamelyik másik kört) és a körök kerületének összege legyen maximális.

XVIII/2. megoldása A körök sugarának összegét maximalizáljuk. Ez nyilván legfeljebb akkora, mint az adott háromszög félkerülete. A félkerület elérhet (egyféleképpen), ha a beírt kör érintési pontjáig megy mindenütt a kör.

XVIII/3. feladat (*Arany Dániel verseny, Haladók, 2005/06, II. kat., 2. ford.*)

Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következ egyenlség minden valós x-re teljesüljön:

$$(x-a)\cdot(x-10)+1=(x+b)\cdot(x+c).$$

XVIII/3. megoldása Az együtthatóknak is egyeznie kell:

$$10a+1=bc; qquad-(10+a)=b+c.$$

Az utóbbi (-10)-szerese:

$$-10(b+c)=100+10a=99+(10a+1)=99+bc.$$

Innen

$$bc+10(b+c)+100=1,$$

azaz

$$(b+10)\cdot(c+10)=1.$$

A megoldások:

$$b_1=c_1=-9,\quad a_1=8;\qquad\qquad b_1=c_1=-11,\quad a_1=12.$$

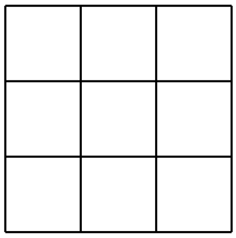
XVIII/4. feladat (*Arany Dániel verseny, Haladók, 2005/06, II. kat., 2. ford.*)

A t terület, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezpontja E, az AD oldalé pedig F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

XVIII/4. megoldása Jelölje az alapok felezpontjait F_{AB} illetve F_{CD}. Az EF középvonal hossza is m, így az $F_{AB}EF_{CD}$ háromszög egyenl szárú és derékszüg. Az ECF_{CD} háromszöget E körül 90°-kal elforgatva kapjuk az EOF_{AB} háromszöget.

Tükrözzük most az ECF_{CD} háromszöget az EF_{CD} egyenesre! Mivel $EF_{CD}F_{AB}\angle = 45°$, így C a tükrözésnél az $F_{CD}F_{AB}$ egyenes egy C' pontjába képzdik. Mivel $BE = EC = EC'$, így BEC' egyenl szárú, $C'BE\angle = CEF_{CD}\angle$. A BC' egyenes párhuzamos a DCB háromszög $F_{CD}E$ középvonalával, így $C' \in BD$ azaz $C' = M$.

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XXV. foglalkozás, 2012. április 11.



1. A fenti egy 3×3-as „rács" látható. Kis négyzetekbl áll. Rakjuk össze
a) nyolc darab három
b) négy darab hat
c) hat darab négy
d) három darab nyolc hosszúságú cérnából!
A cérnát elvágni nem szabad.

2. Adjuk meg az $(x-5)^4+(x-5)^4=97$ egyenlet össze valós megoldását!

3.a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy 6 csúcsú egyszer gráfban nincs teljes hármas, akkor annak legfeljebb 9 éle van.

3.b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy 7 csúcsú egyszer gráfnak 15 vagy annál több éle van, akkor van benne teljes hármas.

3.c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy 8 csúcsú egyszer gráfban nincs teljes négyes, akkor annak legfeljebb 21 éle van.

3.d) Van egy zsebrádiónk, ami két elemmel mködik. A fiókunkban van 8 elem, amibl 4 jó állapotban van, 4 pedig kifogyott. Azonban az elemek összekeveredtek, nem tudjuk melyik jó, és melyik használt. Csak a következket tehetjük: egy kísérlettel 2 elemet beletehetünk a rádióba. Addig próbálkozunk, amíg meg nem szólal a rádió. A kérdés az, hogy ha okosak vagyunk, hány kísérlettel szólal meg a rádió biztosan?

4. Igaz-e, hogy ha adott négy pont a síkon, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, akkor mindig kiválasztható közülük három, amelyek alkott a háromszög nem hegyesszög?

5.a) Igaz-e, hogy ha kiszínezzük a sík pontjait két színnel, akkor mindig van két olyan azonos szín pont, amelyek távolsága 1 cm?

5.b) Igaz-e, hogy ha kiszínezzük a sík pontjait két színnel, akkor mindig van három olyan azonos szín pont, amelyek egy 1 cm oldalú szabályos háromszöget alkotnak?

6.) Az ABC háromszög AB, BC oldalaira, mint átfogókra, kifelé állítottuk az ABP, BCQ egyenl szárú derékszög háromszögeket. Határozzuk meg a $PKQ\angle$ szög nagyságát, ahol K az AC szakasz felezpontja!

7.) A Bergengóc Közlekedési Minisztérium takaréskoskodik. A lehet legkevesebb ingajárattal szeretné megoldani, hogy 10 legnagyobb városából a 10 közül bármelyik másikba el lehessen jutni, ha szükséges átszállásokkal. Adjuk meg az ingajáratok minimális számát! (Ingajárat: két város közti összeköttetés)

FPI tehetséggondozó szakkör 10. évf. XXVII. foglalkozás, 2012. április 25.

Az előző szakkörről maradt:

4. Igaz-e, hogy ha adott négy pont a síkon, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, akkor mindig kiválasztható közülük három, amelyek alkott a háromszög nem hegyesszög?

6.) Az ABC háromszög AB, BC oldalaira, mint átfogókra, kifelé állítottuk az ABP, BCQ egyenlő szárú derékszög háromszögeket. Határozzuk meg a $PKQ\angle$ szög nagyságát, ahol K az AC szakasz felezőpontja!

7.) A Bergengóc Közlekedési Minisztérium takaréskoskodik. A lehető legkevesebb ingajárattal szeretné megoldani, hogy 10 legnagyobb városából a 10 közül bármelyik másikba el lehessen jutni, ha szükséges átszállásokkal. Adjuk meg az ingajáratok minimális számát! (Ingajárat: két város közti összeköttetés)

5.c) Igaz-e, hogy ha kiszínezzük a sík pontjait *három* színnel, akkor mindig van két olyan azonos szín pont, amelyek távolsága 1 cm?
5.d) Színezzük ki a sík pontjait véges sok színnel úgy, hogy ne legyen olyan két azonos szín pont, amelyek távolsága 1 cm!

Új feladatok

Pascal01
Határozzuk meg a Pascal háromszög n-edik sorában álló számok összegét!
Most tekintsük a Pascal háromszög n-edik sorában álló $(n+1)$ számot és szorozzuk meg azokat rendre az
a) $1, -1, 1, -1, \ldots, \pm 1$;
b) $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$;
c) $0, 1, 2, \ldots, n$;
számokkal. Határozzuk meg az így kapott számok összegét, azaz írjuk fel az erdményt n függvényeként!

Pascal02 A Pascal háromszög mely sorában állnak a két szélső 1-esen kívül mindenütt páros számok?

Ramsey01
Néhány tudós levelezik egymással, mindegyik mindegyiknek ír. Összesen csak két nyelvet használnak. Bármelyik két tudós egymás közt ugyanazon a nyelven ír a másiknak amelyiken az ír neki. Hány tudós esetén lehetünk biztosak benne, hogy van köztük három, aki egymást közt ugyanazon a nyelven leveleznek?