

1. Egy összejevetelen  $12k$  ember vesz részt. Mindenki  $3k+6$  embert ismer, az ismeretség kölcsönös. Bármely két embernek ugyanannyi közös ismerőse van. Hányan vannak?
2. Egy egyenesen ebben a sorrendben van négy különböző pont:  $A, B, C, D$ . Megrajzoljuk az  $AC$  és  $BD$  átmérőjű köröket, metszéspontjaik  $X$  és  $Y$ . Az  $XY$  egyenes egy pontja legyen  $P$ . A  $BP$  egyenes  $M$ -ben metszi a  $BD$  átmérőjű kört, a  $CP$  egyenes  $N$ -ben metszi az  $AC$  átmérőjű kört. Igazoljuk, hogy  $AN$  és  $DM$  egyenesek metszéspontja rajta van az  $XY$  egyenesen.

3. Legyenek  $a, b, c$  pozitív valós számok,  $abc=1$ . Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Az  $ABCDEF$  konvex hatszögben  $AB=BC=CD$  és  $DE=EF=FA$ ,  $C$  és  $F$  csúcsoknál  $60^\circ$ -os szög van. Legyenek  $G$  és  $H$  a hatszögön belül olyan pontok, melyekre

$$\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ.$$

Igazoljuk, hogy  $AG+GB+GH+DH+HE \geq CF$ .

5. 3 lány és 7 fiú között mutassuk meg, hogy vagy van 2 fiú és 2 lány úgy, hogy köztük a különböző neműek mind ismerik egymást, vagy van 2 fiú és 2 lány úgy, hogy köztük a különböző neműek közül senki sem ismeri a másikat. Az ismeretség kölcsönös.

6. Az  $ABCD$  tetraéder súlypontja legyen  $S$ . Az  $AS$  egyenes a tetraéder köréírt gömbjét  $A'$ -ben dőfi. hasonlóan kapjuk a  $B', C', D'$  pontokat. Igazoljuk, hogy

a)  $GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD \leq GA' \cdot GB' \cdot GC' \cdot GD'$ ,

b)  $\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GC'} + \frac{1}{GD'} \leq \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}$ .

7. Legyenek  $a$  és  $b$  nemnegatív egészek,  $c$  olyan egész, hogy  $ab \geq c^2$ . Igazoljuk, hogy van olyan  $n$  egész, melyhez található  $x_1, x_2, \dots, x_n$  és  $y_1, y_2, \dots, y_n$  egészek úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = b, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = c.$$