2009. szeptember 18.

1. Fedhető-e a sakktábla 15 fekvő és 17 álló dominóval?

2. Egy $n\times n$-es tábla egy sarkát levágták, a maradék fedhető uannyi fekvő és álló dominóval. Mi lehet n?

3. Egy 10×10×10-es doboz kitölthető-e 1×1×4-es téglatestekkel?

4. Legyen n poz. egész. $1\times n$-es téglalapokból kirakunk egy $a\times b$ méretűt. Biz. n osztja a-t, vagy b-t.

5. Egy 6×6-os táblát 1×2-es dominókkal fedtek. Biz. van olyan osztóvonal, amely nem vág ketté dominót.

6. Egy $n\times n$-es tábla négy sarkát levágjuk. Mely n-re fedhető a maradék L alakú tetraminókkal ?

7. Egy 23×23-as táblát 1×1-es , 2×2-es és 3×3-as négyzetekel fedünk. Legalább hány 1×1-es kell?

8. Egy nagy téglalapot kisebb téglalapokra vágtunk, melyeknek legalább egyik oldala egész hosszúságú. Biz. a nagy téglalap legalább egyik oldala egész hosszú.

9. Egy 8×8-as sakktábla mezőin lépegetünk, mindig oldalszomszédosakra és minden mezőt egyszer érintve visszajutunk a kiinduló mezőre. Lehet-e, hogy mindkét irányban 32 lépést tettünk?

2009. október 2.

1. A sík pontjait (a) 2; (b) 2009 színnel színeztük. Biz lesz téglalap, melynek csúcsai uolyan színűek.
   Megjegyzés: a feladat téglalap helyett négyzettel jóval nehezebb.

2. A tér pontjai pirosak, vagy kékek. Biz vagy van egységnégyzet 3 piros csúccsal, vagy 4 kékkel.

3. (a) A sík pontjai pirosak, vagy kékek. (b) A tér pontjai 3 színűek. Biz valamelyik színből létezik két pont tetszőleges távolságra.

4. A sík pontjai 3 színűek. Biz van két azonos színű pont 1 távolságra.

5. Biz ha n legalább 5, akkor n síkbeli pont kiszínezhető két színnel úgy, hogy ne legyen olyan egyenes, melynek egyik oldalán vannak a kékek, másikon a pirosak.

6. (a) Egységnégyzetek oldalait 4 színnel színezzük, majd összeragaszthatjuk az azonos színű élek mentén. Mely k és m-re készíthető $k\times m$-es téglalap, melynek négy oldala kül. színű? (b) ugyanez kockával, hat színnel és téglatesttel.

7. (a) A sík; (b) a gömbfelület pontjai két színűek. Biz. van szabályos háromszög uolyan színű csúcsokkal.

8. Piroska és Kálmán felváltva színezik a sík pontjait. Piroska egy pontot színez pirosra, Kálmán 100-at kékre. Létrehozhat-e Piroska piros csúcsú szabályos háromszöget, ha Kálmán ezt nem szeretné?
   A szakkörön Nagy János a feladat nehezebb változatát javasolta: Piroska egységnyi oldalú szabályos háromszöget szeretne.

9. Egy egyszerű *n* pontú teljes gráf éleit pirosra vagy kékre színezzük. Igazoljuk, hogy a gráf legalább $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ egyszínű háromszöget tartalmaz.

2009. október 16.

1. Prím-e (a) 100..001 (2009 db 0); (b) 1280000401; (c) $545^4 + 4^{545}$?

2. Biz nincs 9 jegyű négyzetszám, melynek jegyei az 1, 2, …9 valamely sorrendben és, 5-re végződik.

3. Választunk egy többjegyű *N* számot, majd készítünk egy végtelen sorozatot úgy, hogy mindig egy jegyet –ami nem 9- jobbra a végére írunk. Biz végtelen sok összetett szám lesz a sorozatban.

4. Az 1,9,7,7,4,7,5,3,9,4,1, sorozatban az ötödiktől kezdve minden elem az előző négy összegének a 10-es maradéka. Előfordul e a sorozatban a következő részlet (a) 1234; (b) 3268; (c) 1977; (d) 0197?

5. A csupa 0-n kívül hány egész megoldása van az $x^2 + y^2 + z^2 = nxyz$ egyenletnek, ha *n*=2; *n*=3.

6. Mely poz. egész *n* esetén lesz négyzetszám $\lfloor n + \sqrt{n} + 0{,}5 \rfloor$?

7. Adjunk meg olyan 2-vel és 9-cel osztható számot,.amelynek (a) 14; (b) 15; (c) 17 osztója van.

8. Biz. végtelen sok olyan poz. eg. *n* van, amelyre 2^n végződése éppen *n*.

9.Biz. ha *n* legalább 3, akkor 2^n felírható $2^n = 7x^2 + y^2$ alakban, ahol *x* és *y* páratlan egészek.

2009. november 6.

1. Robinson kiúszott a partra és ott talált egy cédulát, melyen ez állt: „A kókuszpálmától lépkedj el a sziklaoszlopig, számold a lépéseket, ott fordulj balra derékszögben és lépj ugyanannyit. Ez a pont legyen *X*. Menj vissza a kókuszpálmához és lépkedj el a forrásig, újra számold a lépéseket, fordulj jobbra derékszögben és lépj ugyanennyit. Ez a pont legyen *Y*. *X* és *Y* közt félúton ástuk el a kincset.” Sajnos a kókuszpálmát kidönthette a vihar, a szikla és a forrás megvan. Segíts Robinsonnak megtalálni a kincset.

2. Egy négyszög oldalaira kifele négyzeteket rajzoltunk. Biz a szemköztiek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és merőlegesek.

3. A tér négy pontja *A, B, C* és *D*. Ha a tér minden *X* pontjára $AX^2+CX^2=BX^2+DX^2$, akkor *ABCD* …..

4. Az *ABC* háromszög oldalaira kifele rajzoljuk a következő téglalapokat:ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Bizonyítsuk, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

5. Biz. az *ABC* szab.∆ köréírt körének tetsz. *P* pontjára a $PA^n+PB^n+PC^n$ mindig uannyi, ha *n*=2, vagy 4.

6. (Euler tétele) Az *ABCD* négyszög középvonalai *MN* és *PQ*, akkor $AC^2+BD^2=2MN^2+2PQ^2$.

7. Biz a tér tetsz. *A*, *B*, *C* és *D* pontjára (a) $AB^2+BC^2+CA^2\le 3(DA^2+DB^2+DC^2)$; (b) *AB* és *CD* akkor és csak akkor merőlegesek, ha $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

8. Az *ABCD* húrnégyszög oldalfelező pontjaiból merőlegeseket állítunk a szemközti oldalakra. Biz egy ponton mennek át ezek a vonalak.

9. Az *ABCD* konvex négyszög átlóinak metszéspontja *P*, *AB*=*AC*=*BD*. Az *ABP* Δ köré és beírt körének közepe *O* és *I*. Biz, ha *O* és *I* különbözőek, akkor *OI* és *CD* merőlegesek.

10. Az *ABCD* húrnégyszög köréírt kör közepe *O*. Az *AB* és *CD* egyenesek metszéspontja *M*. Az *ACM* és *BDM* háromszögek köréírt köreinek közös pontjai *M* és *N*. Biz $MNO\angle=90°$.

2009. november 20.

1. $\min\limits_{a,b\in\Re}\max(a^2-b,b^2-a)$=?

2. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ valósak. Biz. legalább egy nem nagyobb egynél: $a_1+a_2-a_3^2,\ a_2+a_3-a_4^2,\ldots,\ a_{n-1}+a_n-a_1^2,\ a_n+a_1-a_2^2$

3. *a*,*b* valósakra $9a^2+8ab+7b^2\le 6$. Biz. $7a+5b+12ab\le 9$.

4. a_0 valós, $a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{6}$ ha $n\ge 0$. Biz. $a_{n+2}\ge a_n-\frac{1}{6}$.

5. Oldjuk meg a valós számokon $x^4+y^4+z^4-4xyz=-1$.

6. $\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\ldots+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

7. *a*, *b*, *c* $\frac{1}{4}$-nél nagyobb valós számok. Biz. $\frac{a^2}{4b-1}+\frac{b^2}{4c-1}+\frac{c^2}{4a-1}\ge\frac{3}{4}$.

8. $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n^2$ és $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\le n^3+1$. Biz. $n-1\le a_k\le n+1$ minden *k*-ra.

9. Az *ABC* háromszögben $(8AB-7BC-3AC)^2=6(AB^2-BC^2-AC^2)$. Biz. $\angle A=60°$.

10. *a*, *b*, *c* poz. valósak. Biz. $\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le\max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}$.

2010. január 8.

Az első négy feladat a Mat.II. OKTV második fordulójának példái.

1. Adott az $x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)-4x-4y=0$ alakzat. Ennek melyik pontja van legközelebb a (-3/2;5/2)-hez?

2. Biz. 55 darab egymást követő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

3. Egy háromszög belsejébe helyezzünk el három olyan kört, amelyek érintik a háromszög két-két oldalát, továbbá kívülről érintik a háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy e három kör sugarának összege nem kisebb a beírt kör sugaránál.

4. Hány megoldása van a következő egyenletnek $2009=(\{x\}[x])/x$.

5. Egy játékban 5 cm sugarú körlemezek és 5 cm oldalú négyzetlapok vannak. Egy ovis kisfiú azzal szórakozik, hogy egy körlaphoz hozzáilleszt egy négyzetet valamelyik csúcsával, majd további négyzeteket vesz, minden négyzet egy csúcsával a körhöz ér, a szomszédos négyzetet nem fedi, hanem a kettőnek van egy érintkező csúcsa. Hány négyzetet lehet így körberakosgatni? Igaz-e, hogy a rakosgatás éppen körbeér, az első és az utolsó is csúccsal találkozik?

6. A hét különböző jegyet tartalmazó számokat kipróbálhatjuk a szerencsegépen. A gépnek van egy 7 kül. jegyből álló varázsszáma. Ha a mi számunk és a varázsszám legalább egyetlen helyiértéken megegyezik, akkor nyerünk egy Túró Rudit. Biz. ha nem ismerjük a varázsszámot, akkor is lehet TR-t szerezni 七-nél kevesebb próbával. *(A szakköröseket megtréfáltam a különleges karakterrel. Ennek értéke 7.)*

7. Egy új honlapra 2000 ember regisztrálta magaát. Mindegyikük 1000 másikat jelölt meg szimpatikusnak. Két embert a rendzser akkor és csak akkor kezel barátként, ha a szimpátia kölcsönös. Legkevesebb hány pár tekinthető barátnak?

8. Mely poz. eg. a és b esetén lesz $(a+b^2)(b+a^2)$ kettőhatvány?

9. Az $ABCD$ rombusz BC és CD oldalán van P és Q úgy , hogy $BP=CQ$. Biz. APQ súlypontja BD-n van.

10. Anna és Béla utazgatást tervez a 2009-szigetekre. Bizonyos szigetek között van oda-vissza kompjárat. Minden szigeten van reptér. Az első szigetet Anna választja, onnan kompozgatnak mindig új szigetre, melyeket sorban Béla, Anna stb. felváltva választanak. Ha olyan helyre érkeznek, ahonnan már nem tudnak tovább kompozni, hazarepülnek Igazoljuk, hogy Anna el tudja érni, hogy ő válasszon utoljára.

2010. január 22.

1. 10 egyforma kancsó mindegyikében legfeljebb 10%-nyi víz van. Egy kancsót megfoghatunk és a többi kilenc mindegyikébe tölthetünk ugyanannyit a kezünkben levőből. Biz. max.10 ilyen művelettel elérhető, hogy minden kancsóban ugyanannyi víz legyen.

2. 1000 kockánk van, mindegyiknek két szemközti oldala piros, mási kető fehér, a harmadik pár zöld. Összeragasztjuk őket egy $10\times10\times10$-es kockává úgy, hogy a belül érintkező lapok azonos színűek. Biz. a nagy kocka valamelyik oldalán csak egyetlen színt látunk.

3. A végtelen négyzterácsra 2009 darab egybevágó négyzetet teszünk, melyek minden oldala rácsegyenesre illeszkedik. A lapok fedhetik egymást, a tegtöbbször fedett kis mezőt k lap fedi. Azokat az 1×1-es mezőket bejelöljük, amelyeket páratlan sok négyzet fed. Biz a bejelölt mezők száma legalább k.

4. Egy gömb érinti egy tetraéder minden élét. Összekötjük a kitérő éleken levő érintési pontokat. Biz az így kapott három egyenes egy ponton megy át.

5. Jelölje 1_n az n darab 1-esből álló számot, és legyen $[n]!=1\cdot11\cdot\ldots\cdot1_n$. Biz $[n+m]!$ osztható $[n]!\cdot[m]!$-ral.

6. Adott a térben egy zárt *ABCDEF* töröttvonal, melynek szemközti szakaszai párhuzamosak. Biz, ha *AB* és *DE* nem ugyanakkora, akkor mind a hat pont egy síkban van.

7. Egy szabályos 2009 szög minden oldalán kijelöltünk egy pontot, az általuk meghatározott soxög területe *T*. A szab. 2009-szög minden oldalán a kijelölt pontot tükrözzük az oldalfelező pontra. Biz az így kapott soxög területe is *T*.

8. Egy országnak két fővárosa van, az északi és a déli, ezen kívül van még sok további város. Bizonyos városok közt közvetlen út fut, ezek egy része fizetős. Tudjuk, hogy a két főváros közti utak mentén legalább 10 fizetős szakasz van. Biz. a fizetős utakat üzemeltetheti 10 társaság úgy, hogy bármely út mentén mind a 10 társaságnak legyen szakasza.

2010. február 5.

Ezt a szakkört Hraskó András tanar úr tartotta.

2010. március 5.

Ezen a szakkörön a mat II és III kategóriák OKTV döntős feladatait beszéltük meg.

2010. március 19.

1. Egy $n \times n$-es sakktábla mezőibe különböző poz egészeket írunk. Igazoljuk, hogy lesz két (él)szomszédos mező, melyeknek különbsége legalább n.

Feladatok a nagyvilágból 1. 3. 5. 6. 7. 9.

2010. április 9.

Ezt a szakkört Kós Géza vezette.