2004. szeptember.17.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amely a következő tulajdonságú: bármilyen természetes számot jelöl is n, sohasem lesz prím a következő z szám
$$z = n^4 + a.$$

2 Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amely a következő tulajdonságú: Az $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ halmaz úgy bontható fel két közös elem nélküli nemüres halmazra, hogy az elemek szorzata mindkét részben ugyanannyi.

3. Mutassuk meg, hogy a $\{2^n-3\}$ (n=2, 3, 4, …) sorozat tartalmaz olyan végtelen részsorozatot, amelynek bármely két eleme relatív prím.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha m, n nemnegatív egészek, akkor a következő szám is egész lesz:
$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot 2^{3k}$$
n semmilyen természetes egész értéke esetén sem osztható 5-tel.

6. Legyen A a 4444^{4444} számjegyeinek összege. Legyen B az A jegyeinek összege. Mennyi B jegyeinek összege?

Ezek régebbi olimpiai feladatok 69/1. , 70/4. , 71/3. , 72/3. , 74/3. , 74/4.

2004. október 1.

1. Az ABC háromszögben $ABC\angle \geq 60°$ és $BAC\angle \geq 60°$. A B-ből induló belső szögfelező talppontja L, az A-ból induló magasság talppontja H. Mekkora a $AHL\angle$, ha $BLC\angle = 3AHL\angle$?

2. Határozzuk meg mindazon pozitív egész n számokat, melyekre az alábbi egyenletnek van pozitív egészekből álló (x’, y’, u’, v’) megoldása:
$$x + y + u + v = n\sqrt{xyuv}.$$

3. A k és K körök koncentrikusak, k a kisebb. A K kör AC húrja a B pontban érinti a kis kört, az AB szakasz felezőpontja D. Egy az A ponton áthaladó egyenes az E és F pontokban metszi a k kört. Tudjuk, hogy a DE és CF szakaszok felezőmerőlegeseinek M metszéspontja az AB szakaszon van. Határozzuk meg az AM : MC arányt!

4. Keressük meg az alábbi egyenlet megoldásait a természetes számok körében:
$$x^2 + y^2 = 1997(x - y).$$

5. Négy egységnégyzetből készítünk egy tetraminót: három egymás mellett van, a negyedik valamelyik szélső oldalához csatlakozik és így együtt L-alakúak. Hány 100-nál kisebb területű olyan téglalap van, amely hézag és átfedés nélkül fedhető ilyen tetraminó L-alakokkal?

6. Legyen n>1 egész szám. Hány olyan f : {1,2,3,…,n}→{1,2,3,4,5} függvény van, amelyre $|f(k+1) - f(k)| \geq 3$, ha k=1, 2, …, n-1?

Házi feladat:

7. Egy számtani sorozat tagjai és differenciája is pozitív egészek. A sorozat első n tagjának a tízes számrendszerbeli alakjában sehol sem szerepel 9-es számjegy. Legfeljebb mekkora lehet n?

8. Az ABC háromszög nem tompaszögű. Oldalaira kifele rajzoltunk egy négyzetet, egy szabályos m-szöget és egy szabályos n-szöget. (m,n>5). Ennek a három szabályos sokszögnek a középpontjai egy szabályos háromszöget alkotnak. Határozzuk meg m és n értékét és azt is, mekkorák lehetnek az ABC háromszög szögei!

2004.október 22.

1-3. Megbeszéltük a Kürschák verseny feladatait.

4. Egy $n \times n$-es sakktábla minden mezőjén egy huszár áll. Átrendezhetők úgy, hogy akik eredetileg ütötték egymást, azok szomszédosak legyenek? (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk, vagy csúcsuk.) Oldjuk meg n=3 és n=8 esetén is.

5. Igazoljuk Casey tételét! A k kört belülről érintik az a, b, c, d körök. Jelölje két kör (pl a és b) közös külső érintőszakaszának hosszát (ab). Ekkor (ab)(cd)+(bc)(da)=(ac)(bd).
   Az állítás igaz, ha mind a négy kör kívülről érint. Különböző oldalról érintő körök esetén a közös belső érintőszakaszt kell tekinteni. Az eredeti k kör lecserélhető egy egyenesre is.

6. Legyen az n pozitív egész jegyeinek összege $S(n)$, jegyeinek szorzata $P(n)$. Hány olyan n létezik, melyre $P(P(n))+P(S(n))+S(P(n))+S(S(n))=1984$?

Házi feladat:

7. Egy 4×4×4-es kocka egymáshoz csatlakozó három lapja tapétázható-e 16 darab 3×1-es csíkkal?

8. Az ABC háromszög beírt körének sugara legyen egységnyi. Jelölje r_a az AB és AC oldalakat, valamint a háromszög köréírt körét belülről érintő kör sugarát; hasonlóan értelmezzük az r_b és r_c sugarakat is. Határozzuk meg $r_a+r_b+r_c$ minimumát.

2004. november 12.

1. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre osztjuk és a megfelelő osztópontokat összekötve a háromszöget n^2 darab kis szabályos háromszögre vágjuk. Legfeljebb milyen hosszú lehet egy olyan kis háromszögekből álló lánc, melyben a szomszédos háromszögeknek van közös oldala és minden háromszög legfeljebb egyszer szerepelhet?

2. Egy társaságban 10-en vannak. Bármely három között van 2, akik ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.) Igazoljuk, hogy van 4 ember köztük, akik mind ismerik egymást!
   Gondoljuk meg, hogyan változhat a feladatban a 10-es szám! Lehet 9, vagy 8?

Beszéltünk a Ramsey számokról, megadtuk $R(3,3)$, $R(3,4)$, $R(3,3,3)$ értékét.

3. Egy hatpontú gráf éleit pirossal és kékkel színezzük. Igazoljuk, hogy legalább két egyszínű háromszög lesz!
   Megadtuk általánosan is egy n pontú teljes gráf színezésénél a keletkező egyszínű háromszögek számának minimumát.

4. Egy öt tagú sorozat elemei különböző valós számok. Bizonyítsuk be, hogy bekarikázhatunk közülük hármat úgy, hogy a bekarikázott számok vagy növekvő, vagy csökkenő sorozatot alkotnak.
   Hány tagú sorozat esetén fogunk biztosan találni négy bekarikázható számot ilyen feltételekkel?

Megmutattuk, hogy (n-1)(k-1)+1 tagú sorozat esetén biztosan lesz vagy n tagú növekvő, vagy k tagú csökkenő részsorozat.

Házi feladat:

5. Az 1, 2, …, 42 számok közül bármely kettőt összekötünk 3 szín valamelyikével. Igazoljuk, hogy lesz négy szám $x<y<z<v$ úgy, hogy a köztük futó élek azonos színűek! Élesíthetjük-e a feladatot 42 helyett kisebb számra?

6. Egy k tagú társaság tagjai közt három fajta lehet a kapcsolat, utálják egymást, szeretik egymást, vagy közömbösek. Mindegyik kölcsönös. Tudjuk, hogy minden fajta kapcsolat létezik. Mely k esetén lesz biztosan a társaság tagjai közt 4 ember, melyek között mind a három kapcsolat típus megtalálható?

2004. november 26.

1. Szerkesszük meg azt a kört, mely kívülről érinti az ABC háromszög köré írt kört és érinti az AB és AC oldalegyeneseket.

2. Igazoljuk, hogy 2^n-nek van n jegyű olyan többese, melyben csak az 1 és 2 jegyek szerepelnek.

3. A közös pont nélküli k és l körök hatványvonalának tetszőleges P pontjából érintőket húzunk a körökhöz. Igazoljuk, hogy P választásától függetlenül az érintési pontok által meghatározott konvex négyszög átlóinak metszéspontja mindig ugyanaz a pont.

4. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész k számhoz létezik olyan k jegyű szám, mely osztható jegyeinek összegével és jegyei közt nem szerepel a 0.

5. Adottak a k, l és m körök. Szerkesztendő olyan kör, mely mindhármat egy-egy átmérő végpontjaiban metszi.

6. Igazoljuk, hogy n egész szám közül kiválasztható néhány úgy, hogy összegük osztható n-nel.

7. Igazoljuk, hogy minden s pozitív egésznek van olyan többese, melyben a jegyek összege éppen s.

Házi feladat:

8. A k és l körök közös pontjai M és N. A két kör M-hez közelebbi közös érintője e, ez k-t és l-t rendre A-ban és B-ben érinti. Az M-en át e-vel párhuzamosan húzott egyenes kimetszi k-ból C-t, l-ből D-t. A CA és DB egyenesek metszéspontja E. Az AN és BN szakaszok metszéspontja CD-vel P és Q. Igazoljuk, hogy $EP=EQ$.

9. Legyen k nemnegatív egész szám és tegyük fel, hogy az a_1, a_2, …, a_n egészek legalább $2k$ különböző maradékot adnak (n+k)–val osztva. Bizonyítandó, hogy a számok között van néhány, amelyek összege osztható (n+k)–val.

2005. január 14.

1. Az ABC háromszög köré írt körének pontja P. P merőleges vetülete az oldalegyenesekre A', B', C'. Igazoljuk, hogy A', B', C' egy egyenesen vannak.

2. Vannak-e olyan a, b, c, d, x egészek, amelyekre
$$x^2+a^2=(x+1)^2+b^2=(x+2)^2+c^2=(x+3)^2+d^2.$$

3. Egy ötszög csúcsaira valós számokat írtunk. A csúcsokat összekötő szakaszokra ráírtuk a végpontokon levő két szám összegét. Ez utóbbi számok közül 7-ről tudjuk, hogy egész. Igazoljuk, hogy a többi is az.

4. Az *ABC* háromszög magasságpontja *M*, körülírt körének középpontja *O*, sugara *R*. Tükrözzük a háromszög csúcsait rendre a szemközti oldalegyenesekre; legyenek a tükörképek *X*,*Y*,*Z*, és tegyük fel, hogy ezek a tükörképek egy egyenesen vannak.
   Mutassuk meg, hogy $OM = 2R$.

5. Okos Ottó felsorolta az *n* természetes szám pozitív osztóit nagyság szerinti sorrendben. Elsőként az 1-et, majd sorban egymás után, végül nyolcadikként következett az *n*. A hatodikként felsorolt *d* osztóról tudjuk, hogy $19<d<26$. Mi lehetett *n*?

6. Az *ABCD* trapézban a párhuzamos oldalak *AB* és *CD*, $AC=BC$. Az *AB* oldal felezőpontja *F*, az *F*-et tartalmazó *e* egyenes az *AD* szárat *P*-ben, a *BD* átló *B*-n túli meghosszabbítását pedig *Q*-ban metszi. Legyen $ACP\angle = 20°$. Mekkora a $QCB\angle$ szög?

Házi feladat:

7. Egy sakk körmérkőzésnek *k* résztvevője volt (*k* páratlan); mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott; győzelemért 2, döntetlenért 1, vereségért 0 pontot kaptak. A verseny végén mindenkinek más volt az elért pontszáma. Legfeljebb mennyi lehetett a döntetlen játékok száma?

2005. január 28.

1. Az *M* halmaz elemei egészek. Az elemeket csökkenő sorrendben váltakozó előjellel összeadva kapjuk az *S*(*M*) értéket. Pl *S*({1, 2, 5, 8})=8–5+2–1=4 Mennyi lesz az *S*(*M*) értékek összege, ha *M* végigfut az {1, 2, …, 7} halmaz összes részhalmazán?

2. Adott 2005 halmaz, mindegyik 45 elemű. Bármely kettőnek pont 1 közös eleme van. Bizonyítsuk be, hogy mindnek egy közös eleme van.

3. A *H*={1, 2, …, 20) halmaz 9 elemű részhalmazaihoz az *f* függvény hozzárendel egy számot *H*-ból. Igazoljuk, hogy *H*-nak van olyan tízelemű *T* részhalmaza, melyre $f(T\setminus\{k\})\neq k$ teljesül, ha *k* eleme *T*-nek.

4. Egy vállalatnak 70 dolgozója van. Bármely két dolgozó –*A* és *B*– esetén van olyan nyelv, melyet *A* beszél, de *B* nem és van olyan nyelv, melyet *B* beszél, de *A* nem. Legalább hány nyelvet beszélnek a vállalat dolgozói?
   Ezen feladat kapcsán kimondtuk és bizonyítottuk Sperner tételét: Egy *n* elemű halmaznak legfeljebb $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ részhalmaza adható meg úgy, hogy semelyik se tartalmazza valamely másikat.

5. Egy konferencián 9 tudós vett részt. Bármelyikük legfeljebb 3 nyelven beszélt. Bármely három közt van kettő olyan, akik beszélnek közös nyelvet. Igazoljuk, hogy létezik olyan nyelv, melyen legalább hárman beszélnek.

6. Egy 100 elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy közülük bármely kettő vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat.

Házi feladat

7. Bergengócia egy városában 2004-en laknak. 3 fős klubokat alakítanak, összesen 2005-öt. Bármely két klub tagsága legalább egy emberben különbözik. Igazoljuk, hogy létezik két olyan klub, melyeknek pont 1 közös tagja van.

2005. február 11.

1. Az ABC háromszög minden csúcsa az N négyzet belsejében van. A csúcsok tükörképei a háromszög súlypontjára A', B', C'. Igaz-e, hogy ezek közül legalább egy N-nek belső pontja?

2. Az ABC háromszög B illetve C csúcsából induló szögfelezőinek talppontja M illetve N. Az M kezdőpontú MN félegyenes a köréírt kört D-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{BD}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{CD}$.

3. Az ABC háromszög magasságpontján áthalad az e egyenes. Igazoljuk, hogy e-nek az oldalegyenesekre való tükörképei egy ponton haladnak át.
   A feladat több következményét is tárgyaltuk. (1.) Parabola három érintője alkotta háromszög magasságpontján áthalad a vezéregyenes. (2.) Tetszőleges f egyenest az ABC háromszög oldalegyeneseire tükrözve a kapott egyenesek alkotta háromszög beírt körének középpontja az ABC köréírt körén van. (3.) Négy egyenes által alkotott háromszögek köréírt körei egy ponton haladnak át. Ez a pont a fókusza annak a parabolának, melynek az adott egyenesek érintői, vezéregyenese az érintők által alkotott háromszögek magasságpontjai által meghatározott egyenes.

4. Az ABC háromszög beírt köre az AB, AC, BC oldalakat rendre K, M, N pontokban érinti. AC felezőpontja F. BF és MN metszéspontja T. Igazoljuk, hogy TK merőleges AC-re.

Házi feladat:

5. Igazoljuk, hogy egy háromszög Euler egyenese akkor és csak akkor párhuzamos BC-vel, ha $\mathrm{tg}\,b \cdot \mathrm{tg}\,g = 3$.

2005. február 25.

1. A 93-as diákolimpia 3. feladata. Egy végtelen sakktábla egy n-szer n-es négyzetében minden mezőn áll egy figura. Egy lépésben egy figura átugorhat egy élszomszédos mezőn álló figurát, ha üres mezőre érkezik az ugrás, s az átugrott figurát levesszük a tábláról. Mely n-re érhető el, hogy csak egy figura maradjon néhány lépés után?

2. A 92-es diákolimpia 3. feladata. Egy 9 pontú gráf élei közül néhányat pirosra, néhányat kékre festettek. Mi a legkisebb n, melyre n színezett él esetén biztosan lesz piros, vagy kék háromszög a gráfban.

3. A 93-as diákolimpia 1. feladata. Legyen $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, ahol n legalább 2 és egész. Bizonyítsuk, hogy $f(x)$ nem írható fel két legalább elsőfokú egész együtthatós polinom szorzataként.

Házi feladat:

4. A 91-es diákolimpia 5. feladata. Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Igazoljuk hogy a $PAB\angle$, $PBC\angle$, $PCA\angle$ szögek közül legalább az egyik nem nagyobb 30˚-nál.

2005. március 11.

Megbeszéltük a válogatóverseny feladatait, megoldásait. Ezek a következők voltak:

1. Bergengóciában 2005 város van. Fejletlen a csőpostahálózat; semely két várost nem köti össze közvetlen cső. Az új szabályok értelmében kiépíthetnek közvetlen csőkapcsolatot az A és B város között, ha létezik még két további város C és D úgy, hogy nincs közvetlen csőposta sem A és C, sem C és D, sem D és B között. Legfeljebb hány csövet építhetnek ki?

2. A k kör és az l egyenes nem metszik egymást. A kör AB átmérője l-re merőleges, az átmérő végpontjai közül B van közelebb l-hez. A kör A-tól és B-től különböző pontja C. Az AC egyenes és l metszéspontja D. D-ből érintőt húzunk a körhöz, az érintési pont E. Tudjuk, hogy B és E az AC egyenesnek ugyanazon oldalán vannak. A BE egyenes és l metszéspontja F. Az AF egyenes a kört G-ben metszi. Igazoljuk, hogy az AB egyenesre tükrözve G-t a CF egyenes egy pontját kapjuk.

3. Legyen p egy 2-nél nagyobb prím. A pozitív egészek $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ sorozatáról tudjuk, hogy p nem osztja sem a_k-t, sem (a_k^k-1)-et (k=1,2, …, p–2). Igazoljuk, hogy a sorozat néhány tagjának szorzata 2 maradékot ad p-vel osztva.

A házi feladat kapcsán felelevenítettük az Erdős-Mordell egyenlőtlenséget.

4. Ha a $PAB\angle$, $PBC\angle$, $PCA\angle$ szögek egyenlők, akkor P a háromszög Brocard pontja. Igazoljuk, hogy az említett szög cotangense egyenlő a háromszög szögei kotangenseinek összegével:
$$ctg w = ctg a + ctg b + ctg g \ .$$

5. Igazoljuk, hogy egy háromszög szögeire teljesül:
$$\sqrt{3} \le ctg a + ctg b + ctg g \ .$$

A 4. és 5. feladat segítségével új bizonyítást adtunk a legutóbbi szakkör 4. feladatára.

2005. április 1.

Ezt a szakkört Hraskó András tanár úr vezette.

2005. április 15.

A szakkörön ott voltak a Gillis-Turán verseny résztvevői, így a szakkör angol nyelven folyt. Az első részben Dobos Sándor extremális gráfokkal kapcsolatos feladatai szerepeltek, aztán Kós Géza tartott előadást. A feladatokat itt is angolul közöljük.
Az Ex(n, x-részgráf)=k jelölés azt jelenti, hogy egy n pontú egyszerű gráfnak legfeljebb k éle lehet, ha nincs benne x-részgráf.

1. Determine the following numbers:
(a) Ex(10, 3-star) (b) Ex(10, 3-path) (c) Ex(10, K_3)

2. Generalise the previous problem for n and k instead of 10 and 3.

3. G is a simple graph with 10 points. The degree of each point is greater than 3. Prove that there is an even circle in G.

4. G is a simple graph with 14 points. The points are distributed into three classes. Two points are connected iff they are in different classes. At most how many edges are there in G?

5. On the circumference of a circle are 21 points. Prove that among the arcs which join any two of these points, at least 100 of them must subtend an angle at the centre of the circle not exceeding 120°.

6. A pocket radio is operated by two AA batteries. In the drawer, we have 8 batteries, four of which are flat. Unfortunately, we do not know which four. The only way we can test the batteries is by inserting two of them in the radio set. If the radio is operating, both batteries are good, otherwise at least one of them is flat. What is the minimum number of trials needed in order to be certain that the radio will operate?

7. Suppose G is a simple graph, with 10 points. Among any 5 of the vertices there are at least 2 edges. At least how many edges are there in G?

8. Suppose G is a simple graph, with 10 points and some edges. We colour all of these edges with red or blue. How many edges may G have at most if there are no unicolour triangle in it?

9. Ten points are marked in the plane so that no three of them lie on a line. Each pair of points is connected with a segment. Each of these segments is painted with one of *k* colours, in such a way that for any *k* of the ten points, there are *k* segments each joining two of them and no two being painted with the same colour. Determine the smallest *k* for which this is possible.

2005. április. 29.

A szakkör a Gillis-Turán verseny feladatainak megbeszélésével kezdődött. Ezek a következők voltak:

1.) A derékszögű *ABC* háromszög *AB* átfogójára és *BC* befogójára "kívülről" megrajzoltuk a *c*, illetve az *a* négyzeteket. A *C* ponton és a *c* négyzet *A*-val összekötött csúcsán átmenő egyenes legyen *e*, az *A* ponton és az *a* négyzet *B*-vel összekötött csúcsán átmenő egyenes pedig legyen *f*. Bizonyítsuk be, hogy az *e* és az *f* egyenesek egy olyan négyzet kerületén metszik egymást, amelynek csúcsai az *ABC* háromszög kerületén vannak.

2. Az f függvény egy adott *H* halmaz minden egyes részhalmazához a *H* egy-egy részhalmazát rendeli. A függvény *monoton*, tehát ha $X \subseteq Y \subseteq H$, akkor $\mathrm{f}(X) \subseteq \mathrm{f}(Y) \subseteq H$. Bizonyítsuk be, hogy létezik a *H* halmaznak olyan H_0 részhalmaza, amelyre $\mathrm{f}(H_0) = H_0$.

3.) Keressünk olyan különböző pozitív x_i egész számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}.$$

4.) Meg lehet-e adni 2005 szomszédos pozitív egész számot úgy, hogy pontosan 25 prímszám forduljon elő közöttük?

5.) Legyen F_n az $F_1 = F_2 = 1$ kezdeti feltétellel megadott Fibonacci sorozat *n*-edik tagja. Tekintsük az $\mathrm{f}_n(x) = \left\| \ldots |x| - F_n| - F_{n-1}| - \ldots - F_2| - F_1 \right|$ és a $\mathrm{g}_n(x) = \left\| \ldots |x| - 1| - 1| - \ldots - 1| - 1 \right|$ függvényeket, ahol az utóbbi formulában $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ darab 1-es szerepel. Bizonyítsuk be, hogy minden valós *x* számra $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{g}_n(x)$.

6.) Egy szabályos hétszög alapú terület csúcsaiban egy-egy oszlop áll. Minden egyes rúd tetejét egy egyenes huzal köti össze a két másodszomszédos rúd tetejével oly módon, hogy felülről nézve minden egyes huzal két másikat metsz. Meg lehet-e választani az egyes oszlopok magasságát úgy, hogy semelyik négy oszlop teteje ne legyen egy síkban, továbbá valamennyi huzal egyszer felülről, egyszer pedig alulról haladjon át a megfelelő két kereszteződésen?

A szakkör hátralevő részében a 98-as olimpia első két feladatával foglalkoztunk:

7. Az *ABCD* konvex négyszög belső pontja *P*, *AP*=*BP* és *CP*=*DP*. Az *AC* és *BD* átlók merőlegesek. Igazoljuk, hogy az *ABP* és *PCD* háromszögek területe akkor és csak akkor egyenlő, ha *ABCD* húrnégyszög.

8. Egy versenyen a versenyző és b bíró volt, $b>2$ páratlan szám. A bírók minden versenyzőt ***megfelelt***, vagy ***nem felelt meg*** minősítéssel értékeltek. Bármely két bíró legfeljebb k versenyzőt értékelt azonos módon. Igazoljuk, hogy $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

2005. május 13.

Jankó Zsuzsi és Mészáros Gábor röviden beszámoltak a Balkán Olimpiáról ill. az olasz OKTV és csapatversenyről.

1. Az ABC háromszög beírt köre az AB és AC oldalakat D és E pontokban érinti. Igazoljuk, hogy az AB oldallal párhuzamos középvonal egyenese, a DE egyenese és a B-ből induló szögfelező egy ponton mennek át.

2. Határozzuk meg a pozitív valós számok halmazán értelmezett összes olyan pozitív értékű f függvényt, amely kielégíti a következő feltételeket: (1) $f(xf(y))=yf(x)$ minden pozitív x, y számra; (2) $f(x)$ 0-hoz tart, ha x tart a végtelenhez.

3. Az egy síkban fekvő O és K középpontú körök metszik egymást, egyik metszéspontjuk A. Közös érintőik az egyik kört P és Q, a másik kört R és S pontokban érintik. A PQ és RS szakaszok felezőpontjai M és N. Igazoljuk, hogy $\angle OAK = \angle MAN$.

4. Kiválasztható-e a százezernél nem nagyobb pozitív egészek közül 2005 különböző szám úgy, hogy közülük semelyik három se alkosson számtani sorozatot?

5. Az ABC szabályos háromszög kerületének minden pontja piros vagy kék. Igazoljuk, hogy ekkor kiválasztható a kerületen három azonos színű pont, melyek derékszögű háromszöget alkotnak.

6. Jelölje a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Igazoljuk, hogy
$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Házi feladatként kiosztottam a Balkán Olimpia feladatait, melyek a következők voltak:

7. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, amire p^2-p+1 egy egész szám köbe.

8. Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$
Határozzuk meg, mikor áll fenn egyenlőség.