A Fazekas SpecMat Matektábor feladatai

Kismaros, 2016. szept. 19-23., lejegyezte: Hujter Bálint

A következőkben egy összeállítás olvasható a tábor legérdekesebb feladataiból és megoldásaiból. A feladatokat a nemzetközi versenyeken szokásos kategorizálás szerint csoportosítottam. A feladatoknál jeleztem, hogy melyik diák hozta a táborba; igyekeztem a feladat eredeti forrását is jelölni. A hozott feladatokhoz megoldásokat is készítettek a diákok a táborba, az esetek zömében ezek kerültek be az összeállításba (néhol átdolgozva). Ahol különösen szellemes második megoldás született, ott azt is lejegyeztem.

1. Algebra és analízis

Az első feladat valószínűségszámításból jön, de a megoldási módszere erősen algebrai.

1.1. feladat (Glattfelder Hanna)**.** *Cinkelt kockáink vannak, szám szerint kettő. Az* $1, 2, 3, \ldots, 6$ *számok különböző valószínűséggel fordulnak elő. Lehetséges, hogy amikor egyszerre gurítunk velük, a dobott számok összege egyenlő valószínűséggel lesz* $2, 3, 4, \ldots$ *és 12?*

Glattfelder Hanna megoldása. Nem lehetséges. Indirekt tegyük fel, hogy léteznek ilyen kockák. Jelölje p_i ill. q_i annak a valószínűségét, hogy az első ill. második kockán i-t dobunk ($i = 1, \ldots, 6$). Ekkor $P(\text{az összeg } 2) = p_1 \cdot q_1$ és $P(\text{az összeg } 2) = p_6 \cdot q_6$, így: $p_1 \cdot q_1 = p_6 q_6 = \frac{1}{11}$.

Annak a valószínűsége, hogy az összeg 7, legalább $p_1 q_6 + p_6 q_1$, tehát $p_1 q_6 + p_6 q_1 \leq \frac{1}{11}$. Ezekből:

$$p_1 q_6 + p_6 q_1 = \frac{1}{11}\left(p_1 \frac{1}{p_6} + p_6 \frac{1}{p_1}\right) \geq \frac{1}{11} \cdot 2$$

amivel ellentmondásra jutottunk. □

1.2. feladat (Vankó Mila)**.** *Keressük meg az összes olyan* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, melyre*

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ *számpárra.* (EGMO 2012, 3. feladat)

Vankó Mila megoldása.

1. $y = 0$ helyettesítéssel adódik, hogy $f(f(x)) = 4x$. Ebből következik, hogy f függvény injektív, hiszen ha $f(a) \neq f(b)$, akkor $a = \frac{1}{4} f(f(a)) = \frac{1}{4} f(f(b)) = b$.
2. $x = f(0)$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $4f(0) = f(f(f(0))) = f(4 \cdot 0) = f(0)$, tehát $f(0) = 0$.
3. Helyettesítsünk be $x = 0$-t és $y = 1$-et: $f(f(1)) = 2f(1)$, így a fentebb belátottak miatt $4 = f(f(1)) = 2f(1)$, azaz $f(1) = 2$, és így $f(2) = 4$.
4. Helyettesítsünk $y = 1 - x$-et: $f(2(1-x) + f(x)) = 4x + 4(1-x) = 4 = f(2)$ minden valós x-re. f injektív, így $2 = 2(1-x) + f(x)$, azaz $f(x) = 2x$ minden valós x-re.

$f(x) = 2x$ esetén teljesül az eredti egyenlet, hiszen ekkor

$$f((yf(x+y) + f(x)) = 2yf(x+y) + 2f(x) = 4x + 2yf(x+y).$$

Így az egyetlen függvény, ami megfelel a feladat feltételeinek az $f(x) = 2x$. □

1.3. *megjegyzés.* A megoldás kulcsa az volt, hogy az f injektív voltát észrevegyük, majd jól kihasználjuk. Az $y = 1 - x$ helyettesítés már erre játszik: így kaphatunk a jobb oldalon konstans értéket, amivel az injektivitás jól kihasználható.

1.1. Irracionális számok

1.4. feladat (Alexy Marcell). *Bizonyítsd be, hogy* $\sum_{i=1}^{\inf} 2^{-2^i}$ *irracionális.*

(Róka Sándor: 2000 feladat)

Alexy Marcell megoldása. A szám kettes számrendszerbeli alakjában tetszőlegesen sok nulla lehet egymás mellett a tizedesvessző után, és emiatt nem lesz benne ismétlődő szakasz. □

1.5. feladat (Csitári Nóra). *Igaz-e, hogy minden irracionális számnak van olyan pozitív egész számú többszöröse, amelynek tizedes jegyei között végtelen sokszor szerepel a 0 és 9 számjegyek egyike?* (KöMaL N.83.)

Megoldás a KöMaLból. Megmutatjuk, hogy igenlő a válasz a kérdésre. Legyen α a szóban forgó irracionális szám, amelyről feltehetjük, hogy pozitív.

Kiindulási ötletünk az, hogy ha két pozitív többszörös megegyezik az n-edik tizedesjegyében, akkor nemnegatív különbségük n-edik jegye 0 vagy 9. Valóban, legyenek $k \leq l$ olyan egészek, amelyekre $k\alpha$ és $l\alpha$ megegyezik az n-edik tizedesjegyben, más szóval

$$[10^n k\alpha] \equiv [10^n l\alpha] \pmod{10}.$$

Ekkor a valós számok körében könnyen ellenőrizhető

$$[x] - [y] - 1 < [x - y] \leq [x] - [y]$$

egyenlőtlenséget az előző kongruenciával egybevetve kapjuk, hogy

$$[10^n(k - l)\alpha] \equiv 0 \text{ vagy } 9 \pmod{10}.$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, éppen azt kaptuk, hogy a nemnegatív $(k - l)\alpha$ különbség n-edik tizedesjegye 0 vagy 9.

Ezek után a skatulya-elv kétszeri alkalmazásával érünk célba. Először is, mivel egy adott helyen álló tizedesjegy értéke egy számban csak 10-féle lehet, ezért minden n-hez található olyan $1 \leq k_n < l_n \leq 11$ egész számpár, amelyre $k_n\alpha$ és $l_n\alpha$ megegyezik az n-edik tizedesjegyében. Másodszor, a (k_n, l_n) párokat egy véges, $\binom{11}{2}$ elemű halmazból válogattuk, ezért kell lennie egy (k, l) párnak, amely végtelen sokszor szerepel. Ekkor $k\alpha$ és $l\alpha$ tizedestört alakja végtelen sok jegyben megegyezik, azaz a fenti észrevétel alapján $(k-l)\alpha$ olyan többszöröse α-nak, amelynek jegyei között végtelen sokszor szerepel 0 vagy 9. Ezzel a feladatot megoldottuk. □

1.2. Három tanulságos egyenlőtlenség

1.6. feladat (Bosits Balázs). *Az r és s pozitív számok összege 1. Mutassuk meg, hogy*

$$r^r \cdot s^s + r^s \cdot s^r \leq 1.$$

Pap Benedek megoldása. Írjuk fel a jobb oldalt trükkösen: $1 = r + s = r^1 + s^1 = r^{r+s} + s^{r+s}$. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség átírható:

$$0 \leq r^r \cdot r^s + s^s \cdot s^r - r^r \cdot s^s - r^s \cdot s^r = (r^r - s^r)(r^s - s^s).$$

Mivel az $x \to x^p$ függvény szigorúan monoton növő, ha $p > 0$, ezért $(r^r - s^r)$ és $(r^s - s^s)$ kifejezések azonos előjelűek (vagy egyszerre nullák), így szorzatuk nemnegatív.
Egyenlőség pedig csak $r = s = \frac{1}{2}$ esetben lehet. □

1.7. feladat (Zólomy Kristóf)**.** *Bizonyítsuk be, hogy négy különböző valós szám között van olyan kettő: a és b, amelyekre*

$$\frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} > \frac{1}{2}.$$

(KöMaL B.3358.)

Németh Balázs megoldása. Vegyük észre, hogy $\sqrt{1+a^2}$ és $\sqrt{1+b^2}$ éppen az $(1,a)$ és $(1,b)$ vektorok hossza, míg $1+ab$ ezen két vektor skaláris szorzata. Ismeretes, hogy ekkor a bal oldali hányados éppen ezen vektorok bezárt szögének koszinusza.

Legyen most $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ négy tetszőleges valós szám és legyen $O=(0,0)$ és $P_i=(1,y_i)$. Ekkor $P_1OP_2\sphericalangle + P_2OP_3\sphericalangle + P_3OP_4\sphericalangle = P_1OP_4\sphericalangle < 180°$, tehát legalább egy $i \in \{1,2,3\}$ esetén $P_iOP_{i+1}\sphericalangle < 60°$. Így az $(1,y_i)$ és $(1,y_{i+1})$ vektorok által bezárt szögre: $\cos(P_iOP_{i+1}\sphericalangle) > \frac{1}{2}$. □

A következő feladat megoldása a rövidsége ellenére sem könnyű, a táborlakóknak csak segítségadás után sikerült.

1.8. feladat (Imolay András)**.** *Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq -1$ valós számok, melyekre $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}$.*

Megoldás. A $p(x) = (x+1)(2x-1)^2 = 4x^3 - 3x + 1$ polinom nemnegatív, ha $x \geq -1$. Így $0 \leq \sum_{i=1}^n p(x_i) = 4\sum_{i=1}^n x_i^3 - 3\sum_{i=1}^n x_i + n = -3\sum_{i=1}^n x_i + n$, ami éppen a bizonyítandó állítást adja.

Érdekes megvizsgálni, mikor van egyenlőség. Ehhez minden x_i-nek -1 vagy $\frac{1}{2}$ értéket kell felvennie, így a $\sum_{i=1}^n x_i^3$ csak $9 \mid n$ esetén teljesülhet. □

1.9. feladat (Tanári – Fazakas Tünde)**.** *Az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $0 \leq a, b, c \leq 1$. Bizonyítsuk be, hogy:*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Bukva Balázs bizonyítása. Rögzítsük a b, c értékét, és tekitsük a-t változónak. Ekkor az

$$f_a : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_a(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-x)(1-b)(1-c)$$

függvény konvex, hiszen a $\frac{x}{1+K}$, $\frac{K_1}{x+1+K_2}$ és $(1-x)K'$ típusú függvények tetszőleges nemnegatív K, K_1, K_2, K' konstansok esetén konvexek, és konvex függvények összege is konvex függvény.

Mivel f_a konvex, felveszi a maximumát a $[0,1]$ intervallum valamelyik szélén. Így az egyenlőtlenség bal oldalának fel kell vennie a maximális értékét olyan helyen is, ahol $a \in \{0,1\}$. Ugyanez elmondható b-vel és c-vel is, tehát elegendő az $(a,b,c) \in \{0,1\}^3$ által szolgáltatott 8 esetben ellenőrizni az egyenlőtlenséget. □

1.10. *megjegyzés.* Az

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) = 1.$$

egyenlőség a következő esetekben áll fenn: $a = b = c = 1$ vagy ha a három változó között legalább kettő 0 van (ekkor a harmadik változó tetszőleges 0 és 1 közti érték lehet). Tehát az $(a,b,c) \in \{0,1\}^3$ eseteken kívül is felvétetik az optimum; ez azért lehetséges, mert $b = c = 0$ esetén az f_a függvény nem szigorúan konvex (hanem konkrétan a konstans 1 függvény).

1.3. A Cauchy-féle függvényegyenletről

A táborba Bege Áron hozta az alábbi, igen tanulságos függvényegyenletet (Áronnak a szegedi Williams Kada ajánlotta a figyelmébe ezt a feladatot):

1.11. feladat (Bege Áron)**.** *Melyek azok az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, melyekre $f(x+y) = f(x) + f(y)$ minden (x, y)-ra és $f(x^7) = f(x)^7$ minden x-re?*

A megoldás előtt érdemes bemutatni a feladat hátterét.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$ függvényegyenletet *Cauchy-féle függvényegyenlet*nek nevezzük. Könnyű ellenőrizni, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ konstans esetén az $f(x) = c \cdot x$ alakú lineáris függvény kielégíti a Cauchy-féle egyenletet. Azonban léteznek más megoldások is, amelyek az ún. Hamel-bázisok segítségével konstruálhatók. Ezek konstrukcióját itt nem részletezzük, az érdeklődőknek ajánljuk *Laczkovich Miklós: Sejtés és bizonyítás* [**?**] című kiváló könyvének *A Cauchy-féle függvényegyenlet* című fejezetét. Általában elmondható, hogy a lineáris függvényektől különböző megoldások igen furcsák (csúnyák), például a grafikonjuk sűrű (ami azt jelenti, hogy az $\{(x, f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ halmazból a koordinátasík minden – tetszőlegesen kicsiny – körlapja tartalmaz pontot).

Annyi azért igaz, és nem is nehéz bizonyítani, hogy a racionálisakra megszorítva csak a $c \cdot x$ alakú függvények jöhetnek szóba, pontosabban:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$$

Általában egy érdekes kérdés az, hogy milyen pluszfeltételt kell tennünk, hogy már csak a lineáris függvények adjanak megoldást. Néhány ismert példa ilyen pluszfeltételre:

- f folytonos;
- van olyan $[a, b]$ intervallum, ahol f alulról korlátos[1];
- f monoton.

A monoton eset bizonyítása könnyű, röviden le is írjuk. Tudjuk, hogy $c = f(1)$-gyel minden racionális számra $f(x) = cx$. Ha $c \geq 0$, ekkor persze csak monoton növő lehet a függvény. Indirekt tegyük fel, hogy valamilyen irracionális y számra $f(y) \neq cy$. Ha $f(y) < cy$, akkor van olyan x' racionális szám, amelyre $\frac{1}{c}f(y) < x' < y$, de ekkor $f(x') = cx' > f(y)$, ellentmondva f monoton növő voltának. Hasonlóan kezelhető az $f(y) > cy$ és a $c < 0$ eset is.

Áron feladata azt mondja, hogy az „$f(x^7) = f(x)^7$ minden x-re” feltétel is kizárja a nemlineáris megoldásokat (a cx alakúak közül pedig csak azok maradnak meg, ahol $c \in \{-1, 0, 1\}$) Azonban mielőtt annak megoldására térnénk, nézzünk egy egyszerűbb feladatot.

1.12. feladat. *Az*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x^2) &= f(x)^2 \end{aligned}$$

függvényegyenlet-rendszernek csak két megoldása van: az identitás ($f(x) = x$) és a konstans 0 ($f(x) = 0$).

[1] Bizonyítását ld. itt: [**?**]

Bizonyítás. Belátjuk, hogy f monoton növő. Legyen $a < b$ két tetszőlegese valós szám, ekkor $d = \sqrt{b-a}$ választással $b = a + d^2$, azaz $f(b) = f(a) + d(d^2) = f(a) + f(d)^2$, amiből $f(a) \leq f(b)$, ezzel a monotonitást beláttuk. Tehát csak az $f(x) = f(1) \cdot x$ alakú függvények lehetnek megoldások $f(1^2) = f(1)^2$ miatt csak $f(1) \in \{0, 1\}$ jöhet szóba. $\square$

Most már következhet az 1.11. feladat megoldása.

Williams Kada megoldása a 1.11. feladatra. Könnyű belátni, hogy $f(qx) = qf(x)$ minden q racionális számra (itt nem részletezzük). Ezt felhasználva, egyrészt:

$$f(x+q)^7 = (f(x) + f(q))^7 = (f(x) + qf(1))^7,$$

másrészt:

$$f(x+q)^7 = f((x+q)^7) = f\left(x^7 + \binom{7}{1}x^6q + \cdots + q^7\right) = f(x^7) + \binom{7}{1}qf(x^6) + \cdots + (qf(1))^7.$$

Azaz minden x és q esetén:

$$(f(x) + qf(1))^7 = f(x^7) + \binom{7}{1}qf(x^6) + \cdots + (qf(1))^7.$$

Rögzítsük x-et, míg q-t tekintsük változónak, ekkor a két kifejezés, mint q polinomfüggvénye megegyezik; ami azt jelenti, hogy együtthatónként is meg kell egyezniük. Az elsőfokú tag együtthatóinak összevetéséből adódik, hogy:

$$f(x^6) = f(1)f(x)^6.$$

Mivel minden pozitív szám x^6 alakú, ezért minden pozitív szám azonos előjelű: mind ≥ 0 vagy mind ≤ 0 attól függoen, hogy $f(1)$ milyen elojelu. Ezért ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_2) = f(x_1) + f(x_2 - x_1)$, ahol $x_2 - x_1 > 0$ miatt tudjuk $f(x_2 - x_1)$ elojelét: mindig ≥ 0 vagy mindig ≤ 0. Mindenesetre f monoton. Ebből a már megismert módon következik, hogy $f(x) = cx$ valami c konstansra. Visszahelyettesítve $c \in \{-1, 0, 1\}$ adódik, így $f(x) = x$, $f(x) = -x$, $f(x) = 0$ a három megoldás.

$\square$

2. Kombinatorika

2.1. feladat (Nagy Dávid)**.** *Lehetséges-e leírni egy sorba az* $1, 2, \ldots, 10$ *számokból 2-2 darabot úgy, hogy az ugyanolyan számok között annyi másik szám legyen, mint amennyi az értékük? (Pl. jó leírás 3-ig: 3 1 2 1 3 2.)* (Berzsenyis dolgozatfeladat)

A táborban Kovács Benedek mondott el az alábbihoz nagyon hasonló megoldást:

Nagy Dávid megoldása. Vegyünk egy tetszőleges leírási sorrendet. Rendeljük ehhez a leíráshoz a következő számot:

$$\text{a két 1-es távolsága} \ + \ \text{a két 2-es távolsága} \ + \ldots + \ \text{a két 10-es távolsága}$$

(távolságon most a közöttük lévő számok számát értem). Ennek a számnak a paritása minden leírási sorrendnél ugyanaz. Ez azért igaz, mert bármely sorrendből bármelyikbe eljuthatunk szomszédos számok felcserélésével és két szomszédos szám felcserélésénél -2-vel, 0-val vagy 2-vel változik a leírási sorrendhez rendelt összeg (attól függően, hogy a felcserélt számok közül hány jut 1-gyel közelebb (vagy 1-gyel távolabb) a párjához). Mivel az 11223344556677889910 10 sorozatban ez az összeg 0, minden leírási sorrendben páros lesz a hozzárendelt összeg. Viszont ahhoz, hogy egy sorrend teljesítse a feladat feltételeit, $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$-nek kéne lennie az összegnek. Tehát nem lehet így leírni. □

2.2. feladat (Harsányi Benedek)**.** *Egy néző véletlenszerűen kiválaszt 5 lapot egy 52 lapos francia kártyapakliból. Ezt az öt lapot odaadja egy segédnek. A segéd tanulmmányozza az 5 lapot és átad közülük egyesével 4-et egy bűvésznek, aki ezekből az információkból ki tudja találni az ötödik lapot. Lehetséges-e ez?* (folklór)

Harsányi Benedek és Szakály Marcell megoldása. Lehetséges. A kihúzott 5 lap közül biztosan lesz 2 ugyanolyan színű (kör, káró, pikk, treff). Ezek közül fogjuk az egyiket megtartani. Megnézzük ennek a két lapnak az értékét, ezek legyenek $A < B$ (itt bubi, dáma, király, ász értéke rendre 11,12,13,1).

Ha $A + 6 \geq B$, akkor A-t adjuk tovabb. Ebben az esetben a segédünk tudni fogja, hogy a megtartott kártya milyen színű, és azt, hogy az értéke 6 féle lehet: $A + 1, A + 2, A + 3, A + 4, A + 5, A + 6$. Amennyiben $A + 6 \leq B$, akkor B-t adjuk tovább, így a segédnek (modulo 13 értve) $B + 1, \ldots, B + 6$ közül kell kitalálnia A értékét.

A maradék 3 kártyát éppen $3! = 6$ féleképpen adhatja át a segéd, azaz egy előre megbeszélt stratégia alapján könnyedén lekódolható, hogy mennyit kell hozzáadnia, és így kitalálható az 5. lap. □

2.3. feladat (Szakály Marcell)**.** *Tekintsünk egy végtelen negyed-négyzetrácsot. A* $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ *pontokban börtön cellák vannak, és minden cellában 1 rab. Egy rab arra képes, hogy ha jelenleg az* (i, j) *pontban van, és az* $(i + 1, j)$ *továbbá az* $(i, j + 1)$ *pontokban nincs rab, akkor osztódik, az* (i, j) *pontban nem lesz, és a* $(i + 1, j)$ *és* $(i, j + 1)$ *pontokban lesz rab. Létezik-e véges lépés sorozat, mely után nem marad rab a börtönben?*

A táborban Bukva Balázs mondott el az alábbival lenyegében megegyező megoldást a táblánál:

Szakály Marcell megoldása. Nem létezik ilyen sorozat, indirekt bizonyítunk.

Az (i,j) mezőhöz rendeljük az $\frac{1}{2^{i+j}}$ számot. A rab osztódási lépése az elfoglalt cellák értékének összegére nézve invariáns, hiszen $\frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+1+j}} + \frac{1}{2^{i+j+1}} = \frac{2}{2^{i+j+1}}$.

Most lássuk az egész negyedsík összegét. Az első sor: $S_1 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = 2$. A második sor: $S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = \frac{S_1}{2} = 1$. A teljes táblázat hasonlóan $S = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = 4$.

A börtönbéli cellák összege $s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2$. A börtönön kívüli végtelen sok cella összege tehát $Q = S - s = 2$.

Véges sok lépés után véges sok rab lesz. Ha sikerült kiürítenünk a börtönt, akkor a véges számú rab által elfoglalt mezők értékeinek összege $K < Q$. Az invariancia miatt $K = s < Q$, azaz $2 < 2$, ellentmondás. □

Bosits Balázs megoldása. Indirekt tegyük fel, hogy ki lehet üríteni a börtönt. Tekintsünk egy ilyen lépéssorozatot. Minden mezőre írjuk rá, hogy összesen hány rab járt valaha az adott mezőn (hagyta ott a lábnyomát).

Ha egy mezőn $k \geq 1$ ilyen lábnyom van, akkor legalább $k-1$-szer osztódást kellett végezni ezen a mezőn. Minden osztódás 1-gyel növeli a lábnyomok számát a tőle jobbra és a felette levő mezőn. Így minden (i,j) mezőre igaz, hogy a rajta levő lábnyomok száma legalább az $(i-1,j)$ és az $(i,j-1)$ mezőkön levő lábnyomok számának összege -2.

Felhasználva még azt, hogy a bal alsó 3 cellát teljesen ki kell üríteni, a következő alsó becslések írhatók a végtelen negyed-négyzetrács bal alsó sarkába:

1	2	6	10	
1	3	6	6	
2	4	3	2	
1	2	1	1	

Figyeljük most a főátlót. Ha az (i,i) mezőn k alsó becslés áll, akkor az $(i+1,i+1)$ mezőre legalább $2k-4$ kell kerüljön. Látható, hogy így a főátlón mindenütt pozitív egész számú lábnyom kell legyen, tehát nem lehet elég egy véges lépéssorozat. □

2.4. feladat (Molnár-Sáska Zoltán)**.** *Egy köralakú asztal körül összesen* $2n$ *gyerek ül,* n *darab piros és* n *darab kék pólóban. Az a céljuk, hogy a piros pólós gyerekek egymás melletti* n *darab székre kerüljenek (egy félkörben). Egy lépésben két szomszédos gyerek helyet cserélhet. Keressük azt a legkisebb* k *számot, melyre igaz, hogy legfeljebb* k *lépéssel biztosan elérhetik a céljukat!*

(saját feladat)

Molnár-Sáska Zoltán megoldásvázlata. A válasz páros n-re $(\frac{n}{2})^2$, páratlan n-re pedig $(\frac{n-1}{2})(\frac{n+1}{2})$. Ha felváltva vannak a piros és a kékpólós gyerekek, akkor megszámolható, hogy szükség van legalább ennyi lépésre. Másrészt, be lehet látni, hogy ennyi lépés mindig elég. Ehhez az a fő gondolat, hogy mindig kör helyett elég egy láncként gondolni az egészre optimális esetben – mert valahol „szétvághatjuk” a kört és a vágás mentén soha nem lesz csere. □

2.5. feladat (Török Péter)**.** *Egy* $5 \times 5 \times 10$*-es téglatestben adott 2001 pont. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk közülük választani kettőt, amelyek távolsága kisebb, mint 0,7.* (KöMaL A.242.)

Ha fel lehetne bontani 2000 darab olyan téglára a nagy téglatestet, amelyek átmérője legfeljebb 0.7, akkor a skatulyelv szerint készen lennénk. Ilyen felosztást azonban senkinek nem sikerült találnia. Ehelyett egy eggyel trükkösebb skatulyaelvet alkalmazunk.

Török Péter megoldása. Tekintsük azt a 2001 darab 0,35 sugarú gömböt, amelyek középpontjai az adott pontok. Ezek térfogatának összege $2001 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 0,35^3 \approx 359,37$.

Ha a téglatest mindegyik lapsíkját 0,35 egységgel kifelé toljuk, akkor az így kapott téglatest már mindegyik gömböt tartalmazza. A kibővített téglatest mérete $5,7 \times 5,7 \times 10,7$, térfogata $5,7^2 \cdot 10,7 \approx 347,64$.

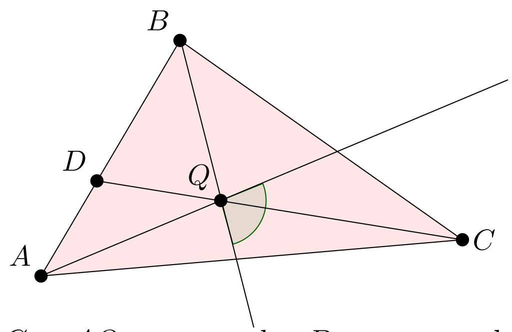
Mivel a kibővített téglatest térfogata kisebb, mint a gömbök térfogatának összege, biztosan van két olyan gömb, amelyeknek van közös belső pontja. Két metsző gömb középpontjának távolsága pedig kisebb, mint sugaraik összege, 0,7. □

2.1. Kombinatorikus geometria

2.6. feladat (Bursics Balázs)**.** *Adott a síkon $n+1$ pont, $P_1, P_2, \dots, Pn$ és Q, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Tudjuk, hogy bármelyik két különböző P_i, P_j ponthoz található olyan P_k pont, hogy Q a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejében van. Mutassuk meg, hogy n páratlan szám.*
(Kürschák 1983/3.)

Megoldás. A megoldáshoz a feltételt átfogalmazzuk.

Megmutatjuk a következőt: Ha A, B és Q nem egy egyenesen levő pontok, akkor síkjuknak azokra és csak azokra a C pontjaira tartalmazza az ABC háromszög belsejében a Q pontot, amelyek az $AQB\sphericalangle$ konvex szög csúcsszögtartományának belsejében vannak.



Valóban, ha Q a háromszög belsejében van, akkor C az AQ egyenesnek a B-t nem tartalmazó partján van, a BQ egyenesnek pedig az A-t nem tartalmazó partján. Így C a két félsík közös részében, tehát az állításban szereplő szögtartományban van. A konvex szögtartományról van szó, tehát arról, amelyik bármely két pontjával azok összekötő szakaszát is tartalmazza, miután a félsík konvex tartomány és konvex tartományok közös része is konvex. Fordítva, ha C a mondott szögtartományban van, akkor a CQ egyenes Q-n túli meghosszabbítása metszi az AB szakaszt egy belső D pontjában. A CD szakasz az ABC háromszögben van, tehát annak Q belső pontja a háromszög belső pontja.

Most visszatérünk az eredeti feladathoz. A P_1Q egyenes egyik, mondjuk jobb partján levő pontok számát (P_1-et nem számítva) jelöljük r-rel, a bal parton levőket s-sel. A jelölést, ha kell, változtassuk meg úgy, hogy a jobb parton a $P_2, \dots, P_{r+1}$ pontok legyenek, mégpedig úgy, hogy $P_1QP_2\sphericalangle < P_1QP_3\sphericalangle < \dots < P_1QP_{r+1}\sphericalangle < 180°$ teljesüljön. A P_iQ és $P_{i+1}Q$ félegyenes Q-n túli félegyenesei közti szögtartományok a bal parton vannak és a különböző i-khez tartozóknak nincs közös pontjuk. Minden ilyen tartományban van legalább egy a bal parti pontok közül, mert a P_i, P_{i+1}-hez megfelelő P_k pontoknak segédtételünk szerint itt kell lenniük. A szögtartományok száma r, így $r \le s$. A bal és jobb part szerepét felcserélve ugyanígy azt nyerjük, hogy $s \le r$. Így az összes P_i pontok száma: $n = r + s + 1 = 2r + 1$, tehát páratlan szám, és ezt kellett bizonyítanunk. □

2.7. feladat (Záhorsky Ákos)**.** *Adott egy szabályos háromszög. Fel lehet-e osztani legalább 10000 részre úgy, hogy egyetlen egyenes sem megy át 26 vagy több részen?*

(Szlovákiai levelezős verseny)

Záhorsky Ákos és Molnár-Sáska Zoltán megoldása. Igen, fel lehet így osztani.

A következőkben megadunk egy jó konstrukciót. Vágjuk le a háromszög csúcsait úgy, hogy egy konvex hatszöget kapjunk (szabályosat, aminek 3 oldala illeszkedik az eredeti oldalakhoz). Ennek a hatszögnek is vágjuk le a csúcsait... egészen addig vagdossuk így le a csúcsokat a $3 \cdot 2^n$ szögekről, amíg középen egy $3 \cdot 2^1 2$ szög nem marad. Ez összesen $3(1 + 2 + 4 + ...2^{11}) + 1 = 3(2^{12} - 1) + 1 = 12286 > 10000$ rész.

Most ellenőrizzük, hogy valóban legfeljebb 25 részen megy-e át bármilyen egyenes. Az egyszerre levágott háromszögek közül nyilván legfeljebb 2-t metszhet el, és a középen lévő $3 \cdot 2^1 2$-szöget is átmetszheti 1-szer. Ez összesem legfeljebb $2 \cdot 12 + 1 = 25$ rész. □

2.2. Gráfelméleti feladatok

2.8. feladat (Nagy Ábel)**.** *Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, az idő múlásával nem változnak).*

Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak.

A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok.

Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?

(Arany Dániel verseny 2013/haladók/III/döntő.)

Nagy Ábel megoldása. Rendeljünk a lovagokhoz és az ellenségekhez egy gráfot: a lovagok a csúcsok, az ellenséges lovagok csúcsait összekötjük. Mivel a csúcsok két csoportra bonthatók úgy, hogy egy csoporton belül ne legyen él, ezért a gráf páros gráf. A két asztalnál ülő lovagok halmazai legyenek $A = \{A_1, A, 2, \dots, A_n\}$ és $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy legalább 22 lovag érkezett a vendégségbe. Ehhez először konstrukciót fogunk mutatni $n = m = 11$ lovagra. Egy teljes páros gráfból töröljük ki az $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{10}B_{10}$ éleket. A lovagok érkezzenek $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{11}, B_{11}$ sorrendben. Ekkor a lovagok valóban 12 asztalhoz ültek le:

1. A_1 és B_1 az első asztalhoz ülnek mert barátok;
2. A_2 és B_2 a második asztalhoz ülnek, mivel mindkettejüknek van ellensége az első asztalnál és egymás barátai;

⋮

10. A_{10} és B_{10} a tizedik asztalhoz ülnek, mivel mindkettejüknek van ellensége az első kilenc asztal mindegyikénél és egymás barátai;
11. A_{11} a tizenegyedik asztalhoz ül le, mivel az első tíz asztal mindegyikénél ül ellensége;
12. B_{11} a tizenkettedik asztalhoz ül le, mivel az első tizenegy asztal mindegyikénél ül ellensége.

Most azt is belátjuk, hogy a lovagok száma legalább 22. Legyen a tizenkettedik asztalhoz leülő egyik lovag B-beli (az általánosság rovása nélkül feltehetjük ezt). Mivel a tizenkettedik asztalhoz ült le, ezért az első tizenegy asztal mindegyikénél ül A-beli lovag, azaz $n \geq 11$. Ekkor a tizenegyedik asztalnál is ül egy A-beli lovag, ezért az első tíz asztal mindegyikénél kell, hogy üljön B-beli lovag. Vagyis $m \geq 11$, mivel a tizenkettedik asztalnál is ül egy B-beli lovag. Tehát a lovagok száma $m + n \geq 22$. □

2.9. feladat (Kovács Benedek)**.** *Nevezzünk egy egyszerű gráfot szépnek pontosan akkor, ha teljesül rá az alábbi feltételek mindegyike:*

(1) nincsen 0 fokú pontja,

(2) létezik két olyan pontja, amelyek különböző fokúak, és nincsenek éllel összekötve,

(3) két pont között pontosan akkor van él, ha fokszámaik egymáshoz relatív prímek.

Mi az a legkisebb n, amelyre létezik n csúcsú szép gráf?

(Nagy Kartal feladata)

Kovács Benedek megoldása. A legkisebb lehetséges csúcsszám 12.

Egy 12 csúcsból álló példa fokszámai: 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 11. Látható, hogy ez jó konstrukció, minden csúcshoz a fokszámával megegyező számú relatív prím fokszámú másik csúcsot találunk, és a (2) feltétel is teljesül (például a 6 és 9 fokú pontok létezése miatt).

Belátjuk most, hogy legfeljebb 11 csúcsú szép gráf nem létezik. Tegyük fel, hogy mégis van ilyen.

Egy ilyen gráfban nem lehet 1 fokú pont. Az 1 ugyanis minden pozitív egészhez relatív prím, így a (3) feltétel alapján ez a csúcs mindegyik másikkal össze lenne kötve. Mivel az 1 fokú pont 1 ponttal van összekötve, ez alapján a gráfban 2 pont lenne, mindkettő 1 fokú, erre a gráfra azonban a (2) feltétel nem teljesülne.

Minden fok továbbá legfeljebb 10 (mivel ≤ 11 csúcs van). Így a lehetséges fokszámok 2-től 10-ig terjednek.

A (2) feltétel azt jelenti, hogy van 2 olyan csúcs, melyek fokszámai különbözőek és nem relatív prímek.

Most belátjuk, hogy a gráfban nem létezhet egyszerre két olyan pont, melyek fokszámai különbözők, de pontosan ugyanazokat a prímtényezőket tartalmazzák. Tegyük fel, hogy mégis létezik két ilyen fokszámú pont, A és B, melyre tehát $deg(A) \neq deg(B)$ és minden p prímre $p|deg(A) \Leftrightarrow p|deg(B)$. Ekkor minden x pozitív egészre igaz lesz, hogy $(x, deg(A)) = 1 \Leftrightarrow (x, deg(B)) = 1$, és így A és B pontosan ugyanazokkal a csúcsokkal lesznek összekötve, így fokszámuknak azonosnak kellene lennie, ami ellentmondás. Emiatt nem lehet egyszerre több fokszám a gráfban a $\{2, 4, 8\}$, valamint a $\{3, 9\}$ halmazokból.

Ha a gráfban nem lenne sem 6, sem 10 fokszámú pont, akkor minden fok a $\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ halmazból kerülne ki, de mivel ebben csak prímhatványok szerepelnek, és egy prím hatványai közül csak legfeljebb 1 szerepelhet, ekkor bármely két különböző fokszám relatív prím lenne egymáshoz, ami a (2) feltételnek ellentmond. Így szerepel 6 vagy 10 fokú pont.

10 fokú pont viszont csak úgy lehet, ha 11 pont van, és a 10-es minden más ponttal össze van kötve. Ekkor minden más pont foka a 10-hez relatív prím, tehát a $\{3, 7, 9\}$ közül kerül ki, de ekkor nem lehetne a (2) feltételnek megfelelő két csúcs, hiszen a 3 és 9 fokok közül csak az egyik lehet, minden más fokszám-pár pedig relatív prím lenne egymáshoz. 10 fokú pont így nem lehet. Tehát kell lennie 6 fokúnak.

Ekkor 2 fokú pont nem létezik: ha mégis lenne, akkor a 2 fokú pont minden olyannal össze lenne kötve, amivel a 6-os, mivel tetszőleges n-re $(n, 6) = 1 \Rightarrow (n, 2) = 1$. Emiatt viszont a 2-es pont foka legalább annyi lenne, mint a 6-osé, ellentmondás. Ugyanígy nem lehet sem 3-as, sem 4-es fok. A gráf fokszámai így az $\{5, 6, 7, 8, 9\}$-ből kerülnek ki.

Ha most minden i-re az i fokú pontok számát a_i-vel jelöljük, akkor a 6 fokú ponttal szomszédos pontokat felírva $6 = a_5 + a_7$.

Tegyük fel most, hogy sem 8-as, sem 9-es fok nem létezik. Ekkor minden fok a $\{5, 6, 7\}$ közül kerül ki, de ekkor a (2) feltétel nem teljesülhetne (a halmaz bármely két eleme relatív prím). Így vagy 8-as, vagy 9-es fok létezik.

Ha van 8-as fokú pont, akkor arra felírva $8 = a_5 + a_7 + a_9$, tehát $8 = 6 + a_9$, így $a_9 = 2$. Ha pedig van 9-es fokú, akkor arra $9 = a_5 + a_7 + a_8 = 6 + a_8$, amiből $a_8 = 3$. Így mindkét fajta pont létezik, 8-asból 3, 9-esből pedig 2 van.

Ekkor ha létezik 5-ös pont, akkor $5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9$. Azonban 6-os létezik, így $a_6 \geq 1$, és tudjuk, hogy $a_8 + a_9 = 3 + 2 = 5$, így $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq 6$, ellentmondás. 5-ös így nincsen.

Ha létezik 7-es, akkor $7 = a_5 + a_6 + a_8 + a_9 = 0 + a_6 + 3 + 2$, amiből $a_6 = 2$. A 9-esre felírva ekkor $9 = a_5 + a_7 + a_8 = 0 + a_7 + 3$, amiből $a_7 = 6$, de ekkor a pontok száma $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 2 + 6 + 3 + 2 = 13$, ami túl sok. Tehát 7-es nem létezik, így viszont a 9-esre felírva $9 = a_5 + a_7 + a_8 = 0 + 0 + 3$, ellentmondás. Így 12-nél kevesebb csúcsú szép gráf nem létezik.

□

2.10. feladat (Bálint Martin). *Bizonyítsuk hogy egy n csúcsú egyszerű gráfnak, ha nincs benne páros kör, maximum $\frac{3}{2}(n-1)$ éle lehet.* (folklór)

Janzer Lili megoldásának vázlata. (Feltehető, hogy a gráf összefüggő). Legyen r egy tetszőleges csúcs és végezzünk a gráfban szélességi keresést r-ből. Jelölje F a megtalált fa éleit, míg E az ezen kívüli éleket. F éleinek száma $n - 1$. A szélességi keresés tulajdonságai miatt E élei legfeljebb egy szintet lépnek. De egy 1 szintet lépő él rögtön adna egy páros kört (az él két végétől a közös ősükig haladó utak és az él együtt ilyet alkot), így minden él csak szinten belül haladhat. Azonban minden v csúcsból legfeljebb 1 szinten belüli él haladhat, mivel ha v_1-be és v_2-be is menne ilyen, akkor a v_1-ből és a v_2-ből a közös ősükbe vezető út és a vv_1 ill. vv_2 élek együtt páros kört adnának. Így E minden éle szinten belül halad és lefog két szintbeli csúcsot, így E-nek nem lehet $\frac{1}{2}(n-1)$-nél több éle (a -1-et az okozza, hogy r-ből egyáltalán nem mehet szintbeli él). □

2.3. Chip-firing

2.11. feladat (Tanári – Hujter Bálint). *Egy asztal körül n ember ül, akik között valahogyan szétosztunk $n - 1$ korongot. Ezután a játékosok a következő szabály szerint cserélgetik egymás közt a lapjaikat: ha létezik olyan játékos, akinél legalább két korong van, akkor valamelyik ilyen játékos átad egy-egy korongot a két szomszédjának. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is cserélgetnek, előbb-utóbb minden játékosnál legfeljebb egy korong lesz.*

(Kürschák verseny, 2006/3.)

Janzer Lili megoldása. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a kívánt állapot soha nem áll elő, azaz a játék soha nem ér véget. A lehetséges helyzetek száma véges, így mindenképpen lesz olyan játékhelyzet, ami többször is előáll. Jelöljön egy ilyen ismétlődő helyzetet H, és tekintsük a játék lefolyását H első két előfordulása között.

Jelölje r, hogy legfeljebb hányszor osztott egy játékos ez idő alatt. Ha egy r-szer osztó A játékos mellett ülne egy r-nél kevesebbszer osztó B játékos, akkor A-nak kevesebb korongja lenne a végén, mint volt az elején (hiszen $2r$ korongott adott ki a kezéből, miközben szomszédaitól legfeljebb $r + (r - 1)$-et kaphatott). Így minden játékos pontosan r-szer osztott a H első két előfordulása között.

A H helyzetben még nem állt meg a játék, tehát kell legyen legalább két játékos, akinél nincs korong (különben $n - 1$ embernél oszolna el az $n - 1$ korong és így mindenkinél csak 1 lehetne). Azt fogjuk bebizonyítani, hogy ha H-ban egy korong nélküli embertől elindulunk óramutató körüljárása szerinti irányba, akkor előbb fogunk találni valakit, akinél legalább 2 korong van, mint valakit, akinél 0 van. Ebből az következik, hogy 2 vagy több korongú emberből legalább annyi van, mint 0 korongúból, így az egy főre jutó korongok átlagos száma legalább 1, ellentmondva a összes korong számának.

Vegyünk most egy tetszőleges, H-ban korong nélkül levő embert, jelölje A_0, tőle óramutató irányban elindulva az embereket sorra $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ahol A_k a következő korong nélküli ember.

Egy H-ban korong nélküli játékosnak mindkét szomszédjánál később kellett megtennie utolsó, r-edik osztását. Közvetlenül az r-edik osztása előtt ugyanis a nála levő korongok száma $x_b + x_j - 2(r - 1) \geq 2$, (ahol x_b és x_j jelöli, hogy a bal- ill. jobbszomszédja hányszor osztott addig); ez pedig csak $x_b = x_j = r$ esetén lehetséges.

Ebből egyrészt következik, hogy A_1 és A_k nem lehetnek szomszédosak, azaz $k > 1$. Másrészt, így kell lennie egy olyan A_i embernek, aki mindkét szomszédjánál, A_{i-1}-nél és A_{i+1}-nél is hamarabb tette meg r-edik osztását. Ahhoz, hogy A_i az r-edik osztását elvégezhesse, H-ban legalább 2 korong kellett legyen nála, hiszen az r-edik osztása végére – multiplicitással számolva – már a $2r$-édik korong is elhagyja a kezét, pedig korábban legfeljebb $2(r - 1)$-et kaphatott szomszédaitól. Tehát valóban hamarabb találtunk valakit, akinél legalább 2 korong van, mint valakit, akinél 0 van.

□

Bursics Balázs, Molnár-Sáska Zoltán és a Lakatos Ádám–Pap Benedek csapat is megoldotta a feladatot, az ő megoldásuk kulcsa a következő lemma volt.

2.12. lemma. *Egy adott kezdőhelyzetből indulva a játék vagy minden lejátszásnál véget ér véges sok lépésben, vagy minden lejátszásnál végtelen sokáig tart.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy egy H korongkiosztásból indulva egyféle lejátszással véget ér a játék, míg egy másikkal folytatódik a végtelenségig.

Egy lejátszást egyszerűen leírhatunk azzal a sorozattal, amilyen sorrendben az egyes játékosok osztottak. Legyen most a H-ból indított véges játék ilyen sorozata $x_1, x_2, \ldots, x_t$ (ami tehát a t-edik osztás után leállt, mindenkinél max. 1 korong van); míg a végtelen játék ilyen sorozata $y_1, y_2, \ldots$.

Az x_i sorozat elemeinek feleltessük meg y_j sorozat elemeit a következőképpen. Ha x_i a k-adik olyan elem ($k = 1, 2, \ldots$) a sorozatában, ahol az A játékos oszt, akkor a párja legyen az y_j sorozatban a k-adik olyan elem, ahol A ember oszt. Lehetséges, hogy néhány x_i-nek így nem lesz párja, de ez nem baj. A skatulyaelv miatt $y_1, y_2, \ldots, y_{t+1}$ között biztosan lesz olyan, akinek nincs párja, a legkisebb indexű ilyet jelölje y_s, és legyen B az az ember, aki y_s lépésben oszt. Azt állítjuk, hogy B tudna osztani az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ osztássorozat után is, azaz ekkor legalább 2 korong van nála ekkor. Valóban,

- egyrészt B pontosan annyiszor osztott $x_1, x_2, \ldots, x_t$ osztássorozatban, mint $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$-ben;

- másrészt mindenki más legalább annyiszor osztott $x_1, x_2, \ldots, x_t$ osztássorozatban, mint $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$-ben;

és így B embernél legalább annyi korong kellett legyen az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ osztássorozat végeztével, mint az $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$ osztássorozat után. Utóbbi végén legalább 2 korong volt nála (hiszen rögtön tudott osztani): így ellentmondáshoz jutottunk, az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ osztássorozat végén is van olyan játékos, akinél legalább 2 korong van; így az a játék sem állhatott meg. □

A lemma után már lényegesen könnyebb dolgunk van, elég egy konkrét lejátszást mutatni, ami mentén véges sok lépésben véget ér a játék (többféleképp lehet ilyet megadni, ezt itt most nem részletezzük).

2.13. feladat. *Most n korongot osztunk szét az asztal körül ülő n ember között. Hogyan lehet gyorsan eldönteni, hogy véges sok osztás után véget ér-e majd a játék, vagy a végtelenségig folytatódik?*

Chip-firing néven ismert a játék általánosabb, gráfokon játszott változata. Itt a játékosok egy gráf csúcsaiban ülnek, mindegyiküknél nemnegatív egész számú korong („chip”) van. Egy játékos akkor oszthat („lőhet”), ha legalább annyi korongja van, mint az általa elfoglalt gráfbéli csúcs fokszáma. Ilyenkor minden él mentén átad egy-egy korongot az él másik végén ülő játékosnak.

2.14. feladat. *A G gráfon chip-firing játékot játszunk.* ***a)*** *Bizonyítsuk be, hogy ha kevesebb korongot osztunk ki a játékosok között, mint ahány éle van G-nek, akkor a játék biztosan leáll véges sok lépésben.* ***b)*** *Mutassuk meg, hogy élszámnyi koronggal már lehetséges úgy játszani (alkalmasan választott kezdőhelyzettel), hogy soha ne érjen véget a játék.*

A feladatról egyébként részletes és érdekes írás olvasható a KöMaL 2007/2. számában. Akit még mélyebben érdekel a téma annak ajánlom Björner, Lovász és Shor *Chip-firing games on graphs* című remek cikkét: `http://www.cs.elte.hu/~lovasz/morepapers/chips.pdf`.

3. Geometria

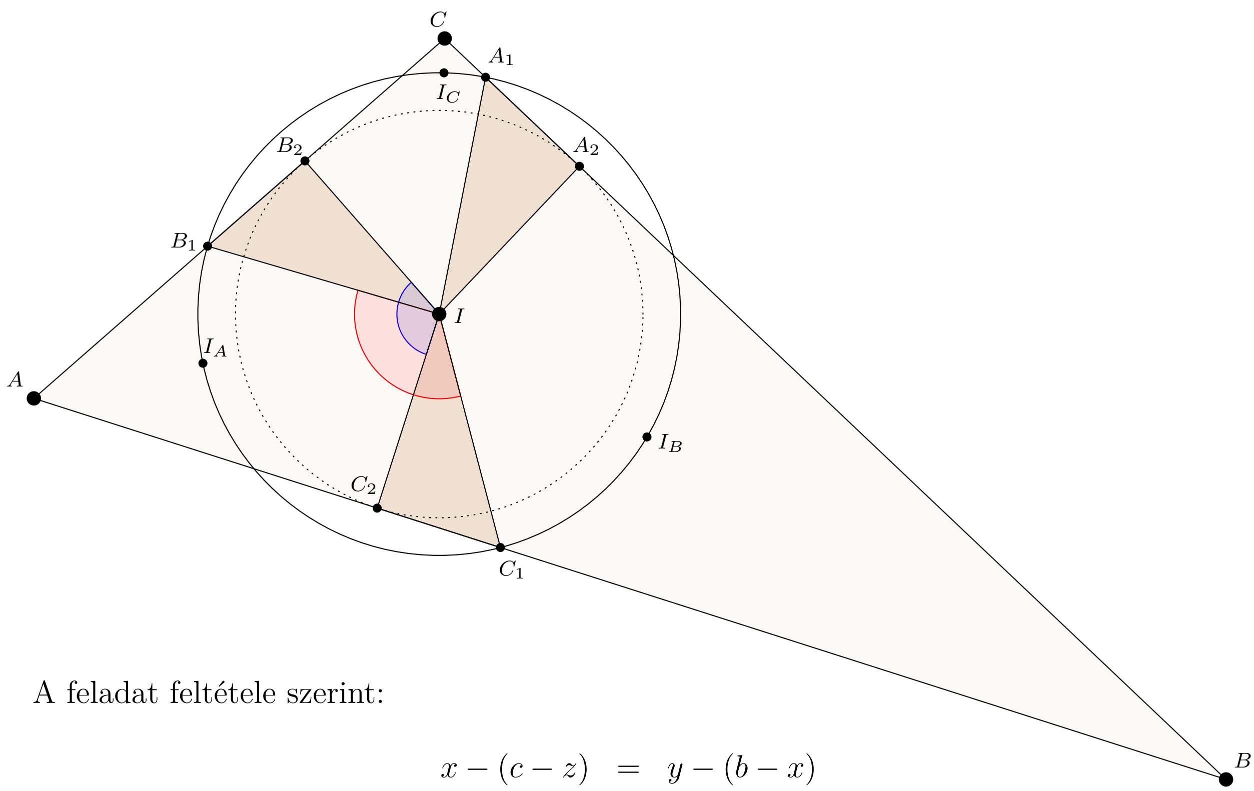
3.1. feladat (Barabás Ábel). *Az ABC háromszög A-ból induló magasságának talpontja D. Legyenek E és F egy, a D ponton átmenő egyenesnek olyan - D ponttól különböző pontjai - amelyekre AE merőleges BE-re, AF merőleges CF-re. A BC és EF szakaszok felezőpontja M, illetve N. Bizonyítsuk be, hogy AN és MN merőlegesek.*

Barabás Ábel megoldása . AFC és AEB háromszögek hasonlóak. Biz.: Mindkettőjüknek van derékszöge, és $FCA\sphericalangle = FDA\sphericalangle$, $EDA\sphericalangle = EBA\sphericalangle$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek és $FDA\sphericalangle = EDA\sphericalangle$. Az oldalak arányainak vizsgálatával kijön, hogy ABC és AEF háromszögek is hasonlók. AN szakasz az AEF háromszög súlyvonala, így $AN/AM = AE/AB$. $MAN\sphericalangle = BAE\sphericalangle$, mivel $NAE\sphericalangle = MAB\sphericalangle$. Tehát a MAN és BAE háromszögek hasonlóak, így AN és MN merőlegesek. □

3.2. feladat (Németh Balázs). *Legyenek az ABC háromszög AB, BC és CA oldalán C_1, A_1 és B_1 olyan belső pontok, amelyre $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Legyenek az AB_1C_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek beírható köreinek középpontja rendre I_A, I_B és I_C. Bizonyítsuk be, hogy az I_A, I_B és I_C pontok köré írható kör középpontja megegyezik az ABC háromszögbe írható kör I középpontjával.*

A táborban Pap Benedek mondta el a táblánál a megoldást, ami lényegében megegyezett a most következő megoldással:

Németh Balázs megoldása. Legyenek az ABC háromszög beírható körének érintési pontjai az AB, BC és CA oldalakon rendre C_2, A_2 és B_2. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon, valamint legyen $AB_1 = x$, $CA_1 = y$ és $BC_1 = z$.



A feladat feltétele szerint:

$$\begin{aligned} x-(c-z) &= y-(b-x) \\ y-(b-x) &= z-(a-y) \\ z-(a-y) &= x-(c-z) \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer két független egyenletből áll. Megoldása:

$$y = x + a - c$$
$$z = x + a - b$$

Vegyük észre, hogy:

$$AB_1 + AC_1 = x + c - z = b + c - a = AB_2 + AC_2$$
$$BC_1 + BA_1 = c + a - b = BA_2 + BC_2$$
$$CA_1 + CB_1 = a + b - c = CA_2 + CB_2$$

Innen látszik, hogy: $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$.

Azt fogjuk a továbbiakban igazolni, hogy a B_1, C_1, A_1, I_A, I_B és I_C mind egy körön vannak, és azt, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írható körének középpontja az I pont. Eme két állítás együttese elegendő a feladat megoldásához.

Vegyük észre először is, hogy az IA_1A_2, IB_1B_2 és IC_1C_2 háromszögek egybevágó derékszögű háromszögek, hiszen $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, és $IA_2 = IB_2 = IC_2$, valamint az érintés miatt derékszögek vannak. Emiatt $IA_1 = IB_1 = IC_1$, tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írható kör középpontja az I pont. Szimmetria okokból elég annyit igazolnunk, hogy az $I_AB_1A_1C_1$ négyszög húrnégyszög, amihez az kell, hogy: $B_1I_AC_1\sphericalangle + C_1A_1B_1\sphericalangle = 180°$. Ha az A csúcsnál lévő belső szöget α-val jelöljük, akkor: $B_1I_AC_1\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$. A kerületi és középponti szögek tétele szerint: $B_1A_1C_1\sphericalangle = \frac{B_1IC_1\sphericalangle}{2}$. Mivel $B_1IB_2\sphericalangle = C_1IC_2\sphericalangle$, azért $B_1IC_1\sphericalangle = B_2IC_2\sphericalangle = 180° - \alpha$, és így $B_1A_1C_1\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Tehát $B_1I_AC_1\sphericalangle + C_1A_1B_1\sphericalangle = 180°$. □

3.3. feladat (Szarka Álmos és Záhorský Ákos)**.** *Az ABC háromszögben $|BC| = 1$ és BC oldalon pontosan egy olyan pont van, amire $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Határozzuk meg a háromszög kerületének összes lehetséges értékét!* (Szlovák Matematikai Olimpia 2016)

A megoldás fontos eszköze a Stewart-tétel.

3.4. tétel (Stewart-tétel)**.** *Az ABC háromszög BC oldalán adott D pontra $BD = m$, $DC = n$, $AD = d$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$b^2m + c^2n = a(mn + d^2)$$

3.5*. megjegyzés.* Könnyen megjegyezhető, mert: $man + dad = bmb + cnc$, avagy *„A man and his dad puts a bomb in a sink”*. A tétle egyébként koszinusz-tételek segítségével bizonyítható.

Szarka Álmos megoldása. Legyeg $BAD\sphericalangle = \alpha_1$ és $CAD\sphericalangle = \alpha_2$! Ekkor az eredeti összefüggést a szinusztétel szerint átírva:

$$\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|DC|}{|DA|} \Longleftrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_2} \Longleftrightarrow \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 = \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Ebből tudjuk, hogy a megfelelő D pont csakis az A-ból induló szögfelező talppontja lehet, hiszen az $\alpha_1 \neq \alpha_2$ esetben felvehetnénk azt a D' pontot is a BC oldalon, amelyikre AD' éppen az AD tükörképe az A csúcs belső szögfelezőjére (azaz $BAD'\sphericalangle = \alpha_2$ és $CAD'\sphericalangle = \alpha_1$), és ez szintén teljesítené a feltételt[2].

[2]Érdemes megjegyezni: ez a D' éppen a D csúcs *izogonális konjugáltja.*

Írjuk fel a háromszögre a Stewart-tételt (az oldalakat a szokásos módon, DA-t d-vel, DB-t,DC- t m-mel, n-nel jelölve): $a(d^2 + mn) = mb^2 + nc^2$. Felhasználva, hogy a feladat feltétele szerint $d^2 = mn$, ez ekvivalens:

$$2a = \frac{b^2}{n} + \frac{c^2}{m}.$$

Most kihasználjuk, hogy szögfelezőtétel és $a = 1$ miatt $n = \frac{b}{b+c}$ és $m = \frac{c}{b+c}$, amiből:

$$2 = \frac{b^2}{\frac{b}{b+c}} + \frac{c^2}{\frac{c}{b+c}} \Longrightarrow 2 = b \cdot (b + c) + c \cdot (b + c) = (b + c)^2 \Longrightarrow \sqrt{2} = b + c$$

Tudjuk, hogy $a = 1$, így $k = a + b + c = 1 + \sqrt{2}$. Ehhez az értékhez létezik is megfelelő konfiguráció, például a $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oldalakkal rendelkező derékszögű háromszögben ez könnyen ellenőrizhető.

Tehát egy ilyen háromszög kerülete csak $1 + \sqrt{2}$ lehet. □

3.1. Két szép feladat, ahol a Feuerbach-kör segít a megoldásban

3.6. feladat (Kovács Kitti). *Legyenek az ABC háromszög hozzáírt köreinek középpontjai O_a, O_b és O_c, beírt körének középpontja I, köré írt körének sugara R. Legyen továbbá az O_b pontból az AB egyenesre és az O_c pontból az AC egyenesre állított merőlegesek metszéspontja A_1. Mutassuk meg, hogy $A_1I = 2R$.* (KöMaL B.4248.)

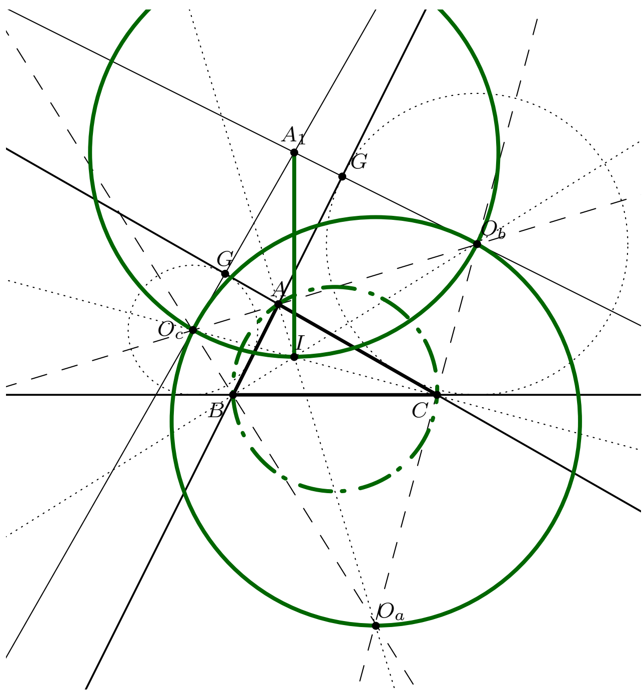
A táborban Harsányi Benedek mondott el erre egy igen ötletes megoldást (amely lényegében megegyezett Kovács Kitti megoldásával).

A megoldás az alábbi három észrevételen alapul:

(i) A_1 az O_bO_cI kör középpontja.

(ii) O_bO_cI és $O_aO_bO_c$ körök sugara megegyezik.

(iii) $O_aO_bO_c\triangle$ háromszög Feuerbach-köre éppen az $ABC\triangle$ körülírt köre.



Ez a három észrevétel együttesen éppen elegendő. (i) értelmében ugyanis A_1I éppen az O_bO_cI kör r sugarával egyezik meg. (ii) miatt $O_aO_bO_c$ kör sugara is r, aminek (iii) miatt éppen a fele R.

Most bizonyítsuk egyenként az állításainkat. Az ABC háromszög szögeit jelölje a szokásos módon α, β, γ.

(i) bizonyítása: Egyszerű szögszámolással megállapítható, hogy: $O_bIO_c\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$, $O_cA_1O_b\sphericalangle = 180° - \alpha$, $O_bO_cA_1\sphericalangle = O_cO_bA_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Emiatt $O_bA_1 = O_cA_1$, és az így létező A_1 középpontú O_b-n és O_c átmenő körön I rajta kell legyen a kerületi és középponti szögek tétele szerint. □

(ii) bizonyítása: Kiszámolható, hogy $O_cO_aO_b\sphericalangle = 90° - \alpha$, azaz az O_cO_b ívhez ugyanakkora kerületi szög tartozik az $O_aO_bO_c$ körön, mint az O_bOC_I körön, tehát a két kör sugara megegyezik. $\square$

(iii) bizonyítása: Mivel az egy csúcsnál levő belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, az ABC éppen a talpponti háromszöge az $O_aO_bO_c$ háromszögnek. A talpponti háromszög körülírt köre pedig éppen a Feuerbach-kör. $\square$

3.7. feladat (Németh Balázs)**.** *Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA és AB oldalakat rendre az A_1, B_1 és C_1 pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög köré írható kör O középpontja rajta van az $A_1B_1C_1$ háromszög Euler-egyenesén.*

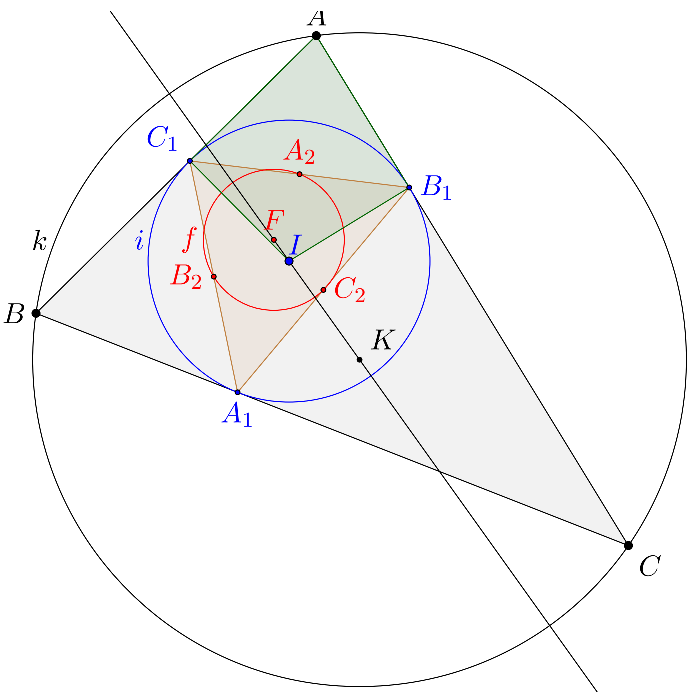
A feladat megoldása már könnyen fog következni az alábbi tételből.

3.8. tétel. *Érintse az ABC háromszög beírt köre az oldalakat rendre A_1, B_1, C_1 pontokban. Ha ABC körülírt körét invertáljuk a beírt körére, akkor éppen $A_1B_1C_1$ Feuerbach-körét kapjuk.*

Németh Balázs bizonyítása. Jelöljük az

- az $ABC\triangle$ körülírt körét k-val, középpontját K-val.
- az $ABC\triangle$ beírt (egyben $A_1B_1C_1$ körülírt) körét i-vel, középpontját I-vel.
- az $A_1B_1C_1\triangle$ Feuerbach-körét f-fel, középpontját F-fel.

Azt kell tehát belátnunk, hogy k inverze i-re éppen f. Jelölje az i-re való inverzió transzformációját $\mathcal{I}(\cdot)$.



Legyenek A_2, B_2 és C_2 az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1, B_1 és C_1 csúcsaival szemközti oldalainak felezőpontjai. Ekkor f az $A_2B_2C_2$ háromszög köré írható köre lesz.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{I}(A_2) = A$. Az AC_1IB_1 négyszög deltoid, hiszen $AC_1 = AB_1$ (érintők) és $IC_1 = IB_1$ (a beírt kör sugarai). Ennek AI szimmetriaátlója felezi a másik B_1C_1 átlót, ezért

AI és B_1C_1 metszéspontja A_2. Másrészt AC_1IB_1 négyszög húrnégyszög is, hiszen $AC_1I\sphericalangle = IB_1A\sphericalangle = 90°$.

Amikor invertáljuk a B_1C_1 egyenest i-re, B_1 és C_1 fixpontok, a kép így az IB_1C_1 kör lesz. Mi lesz az A_2 képe? Nyilván rajta lesz az IB_1C_1 körön, de ezen felül az IA egyenesen is rajta lesz, mivel az $\mathcal{I}$-nek fixegyenese. Tehát A_2 képe IB_1C_1 kör és IA egyenes (I-től különböző) metszéspontja, ami AC_1IB_1 húrnégyszög volta miatt éppen A.

A „demokrácia nevében" $\mathcal{I}(B_2) = B$ és $\mathcal{I}(C_2) = C$ is teljesül, ami együtt azt jelenti, hogy $\mathcal{I}(f) = k$, azaz f és k egymás inverzei i-re nézve. □

A 3.7 feladat bizonyítása a tétel segítségével. Az $A_1B_1C_1$ háromszög Euler-egyenese éppen az IF egyenes. IF egyenesre, mint tengelyre szimmetrikus az f kör, így mivel I az inverzió középpontja, a $k = \mathcal{I}(f)$ körnek is szimmetrikusnak kell lennie IF tengelyre, ami éppen azt jelenti, hogy IF átmegy a k kör K középpontján.

(Érdemes megjegyezni, hogy $\mathcal{I}(F) \neq K$, hiszen az inverzió egy kör középpontját nem a képének közáppontjába viszi). □

3.2. A Pascal-tétel

Lakatos Ádám igen nehéz geometria-feladata kapcsán került szóba a Pascal-tétel.

3.9. feladat (Lakatos Ádám)**.** *Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz AB alapján P az a pont, amelyre $AP - BP = AC - BC$. A P-ben AB-re állított merőleges a CD, AC és BD egyeneseket rendre a Q, az R, illetve az S pontban metszi. Legyen k_1 az a kör, amely az AC és BD egyeneseket az R, illetve az S pontokban érinti, és legyen k_2 a PQ átmérőjű kör. Mutassuk meg, hogy k_1 és k_2 érintik egymást.* (KöMaL B.4551.)

A megoldás elolvasható a KöMaL honlapján: `http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4551&l=hu`. Itt csak a megoldás fő segédeszközét, a Pascal-tételt ismertetjük.

3.10. tétel. *Jelöljön egy körön fekvő hat pontot:* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *és jelölje* ij *az* i *és* j *pontot összekötő egyenest. Ekkor az*

$$12 \cap 45, 23 \cap 56 \text{ és } 34 \cap 61$$

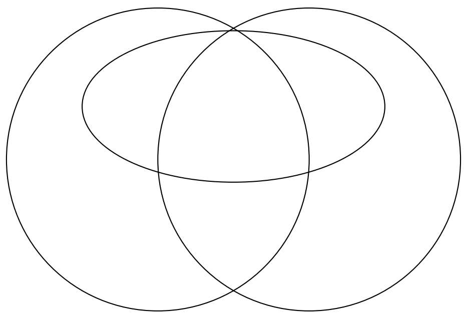
pontok egy egyenesre esnek.
Másképpen: egy körbe írt hatszög szemközti oldalpárjainak metszéspontjai egy egyenesbe esnek.

3.11. *megjegyzés.*

1. A pontok tetszőleges sorrendben lehetnek a körön.
2. A tétel akkor is értelmes, ha például $12 \parallel 45$. Ilyenkor az állítás úgy értendő, hogy a $23 \cap 56$ és $34 \cap 61$ összekötésével párhuzamos egyenes (projektív geometriában ideális pontok segítségével, ez egységesen kezelhető).
3. Az 1 és 2 egybe is eshetnek, ilyenkor 12 egyenesnek az érintőt vesszük.
4. A tétel kör helyett tetszőleges kúpszelettel is igaz.

4. Számelmélet

4.1. feladat (Tanári – Gyenes Zoltán)**.** *Az halmazábra egyes halmazainak cimkéi: „A valódi osztói", „B valódi osztói", „C valódi osztói". Lehet-e olyan A, B, C pozitív egész számokat választani, hogy mindegyik síkrészbe kerüljön szám (és minden pozitív egész számot be is lehessen írni valahova, esetleg kívülre).*



(A 7c diákjainak feladata)

Megoldás. Csak annyit árulunk el, hogy vannak ilyen számok :-). □

4.2. feladat (Keresztfalvi Bálint)**.** *Lássuk be, hogy ha p prímszám, akkor*

$$np \mid \binom{np}{p} - n.$$

. (OKTV 2012. III./1. ford.)

A táborban Barabás Ábel mondott el rendkívül szórakoztató módon egy megoldást, amely lényegében megegyezett az alábbival.

Keresztfalvi Bálint és Barabás Ábel megoldása. Ismeretes, hogy: $\binom{np}{p} = n\binom{np-1}{p-1}$.
Tehát az állítás: $np \mid n\binom{np-1}{p-1} - n$, ami ekvivalens a következővel:

$$p \;\Bigg|\; \binom{np-1}{p-1} - 1 = \frac{(np-1)(np-2)\cdot\ldots\cdot(np-p+1) - (p-1)!}{(p-1)!} - 1$$

A Wilson-tétel felhasználásával:

$$(np-1)(np-2)\cdot\ldots\cdot(np-p+1) \equiv (p-1)! \equiv -1 \quad (p).$$

Így a vizsgált tört számlálója osztható p-vel, míg a nevezője nem. Mivel a tört értéke egész szám (binomiális együttható mínusz 1), így p-vel is osztható. □

A megoldást követően Imolay Andris mutatta be a Lucas-lemmát, amiből az előző megoldás második fele már könnyen következik.

4.3. tétel (Lucas-lemma)**.** *Tetszőleges nemnegatív m egészek n és p prímszám esetén igaz a következő kongruencia:*

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod p,$$

ahol:

$$\begin{aligned} m &= m_k p^k + m_{k-1}p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0 \\ n &= n_k p^k + n_{k-1}p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0 \end{aligned}$$

és $\binom{m_i}{n_i} = 0$, *ha* $m_i < n_i$.

4.4. feladat (Janzer Lili)**.** *Nevezzünk egy pozitív egész számot varázslatosnak, ha felírható $n = a^b + b$-ként valamilyen egész $a, b \geq 2$-re! Létezik-e 102 egymást követő pozitív egész, melyek közül éppen 100 varázslatos?*

Janzer Lili megoldása. Tudunk találni 100 egymás utáni varázslatos számot, hiszen a $2^{100!} + 2$, $2^{100!}+3, \ldots, 2^{100!}+100$ számok mind varázslatosak, hiszen felírhatóak $\left(2^{\frac{100!}{2}}\right)^2+2$, $\left(2^{\frac{100!}{3}}\right)^3+3, \ldots$ alakban, és az $a = 2^{\frac{100!}{k}}$ kitevője egész lesz, mert 100! osztható 1-től 100-ig a számokkal, azaz a szám valóban jó a lesz, és hozzá a választott b-k is megfelelnek a követelményeknek.

De így a $2^{100!}$-t és $2^{100!} + 1$-et hozzávéve találtunk 102 számot, amik közül legalább 100 varázslatos. Ha pont 100, akkor készen vagyunk; egyébként nézzük azt a 102 egymást követő számot, amelyek közül az első a $2^{100!} - 1$. Így pontosan a sorozat utolsó számát cseréltük ki egy másik számra, azaz maximum eggyel változott a varázslatos számok darabszáma. Folytassuk ezt az eljárást, amíg a legkisebb szám végül az 1 nem lesz. Az 1 és 2 számok nem varázslatosak, azaz ezen 102 szám közül maximum 100 a varázslatos. A mozgatás közben $x \geq 100$ varázslatos számról eljutottunk $y \leq 100$ varázslatos számig, és egyesével változott az összeg 2 lépés között, tehát a kettő között valamikor volt éppen 100. □

4.1. A kvadratikus maradékokról

4.5. feladat (Tanári – Fazakas Tünde)**.** *Tekintsük az $f(x) = x^6 - 11x^4 + 36x^2 - 36$ polinomot. Bizonyítsuk be, hogy minden p prímre létezik olyan n szám, amire $p \mid f(n)$.*

A megoldás előtt rövid összefoglalást adunk a kvadratikus maradékok elméletéről. Csak prímmodulusokkal foglalkozunk: p legyen egy páratlan prímszám.

4.6. definíció. Legyen $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Ha létezik olyan x egész, amelyre:

$$x^2 \equiv a \mod p$$

akkor a-t *kvadratikus maradék*nak, egyébként *kvadratikus nemmaradék*nak nevezzük (mod p).

4.7. állítás. *A kvadratikus maradékok és nem-maradékok száma egyaránt $\frac{p-1}{2}$.*

Bizonyítás. Ha valamilyen x-re $x^2 \equiv a \pmod p$, akkor $(-x)^2 \equiv a \pmod p$. Nem lehet ezeken kívül más y, amire $y^2 \equiv a \pmod p$ lenne, hiszen $0 \equiv y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \pmod p$ miatt, mivel p prím $y \equiv x$ vagy $y \equiv -x$ következne.

Mivel p páratlan, $x \not\equiv -x \pmod p$; tehát a modulo p RMR (redukált maradékrendszer) elemei kettesével tartoznak egy-egy kvadratikus maradékhoz. □

4.8. állítás. *Két kvadratikus maradék szorzata kvadratikus maradék.*
Kvadratikus maradék és nemmaradék szorzata kvadratikus nemmaradék.

Bizonyítás. Ha $x^2 \equiv a \pmod p$ és $y^2 \equiv b \pmod p$, akkor $(xy)^2 \equiv ab \pmod p$.
Másrészt, ha az $a \equiv x^2 \pmod p$ kvadratikus maradék szorzata b-vel egy $c = z^2$ kvadratikus maradék volna, akkor $b = \frac{c}{a} = \left(\frac{z}{x}\right)^2$ is kvadratikus maradék kellene legyen. □

4.9. állítás. *Két kvadratikus nemmaradék szorzata kvadratikus maradék.*

Bizonyítás. Legyen a tetszőleges kvadratikus nemmaradék, és tekintsük a modulo p RMR-en ható

$$x \mapsto a \cdot x$$

leképezést. Ez bijekció a RMR-en. A kvadratikus maradékokat nemmaradékokba képezi. Mivel az RMR fele kvadratikus maradék és fele nemmaradék, a nemmaradékokat muszáj maradékokba képeznie. $\square$

Előző állításaink könnyen következnek az alábbi tételből is:

4.10. tétel (Euler-kritérium)**.** *Ha $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, akkor $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p$. a pontosan akkor kvadratikus maradék, ha $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ és akkor kvadratikus nemmaradék, ha $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.*

Bizonyítás. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ a kis Fermat-tétel miatt. Mivel p páratlan:

$$0 \equiv a^{p-1} - 1 \equiv \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \pmod p$$

tehát (mivel p prím) valamelyik tényező 0-val kongruens kell legyen.
Ha a kvadratikus maradék, akkor van olyan x, amire $x^2 \equiv a \pmod p$, akkor a kis Fermat-tétel felhasználásával:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Ez ugyanakkor azt is jelenti, hogy mind a $\frac{p-1}{2}$ darab kvadratikus maradék gyöke az

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

egyenletnek. Ennek több gyöke nem lehet (hiszen a bal oldai polinom fokszáma $\frac{p-1}{2}$), így egyetlen kvadratikus nemmaradék sem lehet gyöke, azokra szükségképpen $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$ teljesül. $\square$

A 4.5. feladat megoldása. A polinomunk szorzattá bontható: $f(x) = x^6 - 11x^4 + 36x^2 - 36 = (x^2-2)(x^2-3)(x^2-6)$. $p = 2$ esetén $x = 1$, $p = 3$ esetén $x = 3$ jó helyettesítést ad. Ha $p > 3$, akkor sem 2, sem 3 sem 6 nem kongruens 0-val mod p. $2 \cdot 3 = 6$, így a 4.9. állítás alapján 2,3 és 6 közül legalább az egyik kvadratikus maradék kell legyen mod p; azaz van olyan x egész szám, amire $x^-2, x^2 - 3$ és $x^2 - 6$ közül legalább az egyik osztható p-vel. $\square$

A táborban nem került említésre, de a kvadratikus maradékok témakörében érdemes megemlíteni a kvadratikus reciprocitási tételt.

4.11. tétel (Kvadratikus reciprocitási tétel)**.** *Tételezzük fel, hogy p és q különböző páratlan prímek. Ha legalább az egyikük az 1 maradékot adja 4-gyel osztva, akkor az $x^2 \equiv p \pmod q$ és az $y^2 \equiv q \pmod p$ kongruenciák egyszerre megoldhatóak vagy megoldhatatlanok (az x és y megoldások nem szükségképp azonosak); továbbá, ha mindkét prím a 3 maradékot adja 4-gyel osztva, akkor viszont a fenti kongruenciáknak pontosan egyike oldható meg.*

4.2. Vieta Jumping

Több tábori feladat is kapcsolódott a hírhedt Vieta Jumping technikához (ld. pl. https://en.wikipedia.org/wiki/Vieta_jumping), amely az Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1988/6. feladata által született meg.

4.12. feladat (Szakály Marcell, Szakács Lili Kata). *Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbb{Z}^+$ és $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ egész, akkor négyzetszám.* (IMO 1988./6.)

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy k nem négyzetszám, mégis vannak olyan $a, b \in \mathbb{Z}^+$ számok, amelyekre $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = k$. Egy ilyen k persze pozitív kell legyen. Ehhez a k-hoz vegyünk egy minimális összegű a, b párt. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a \leq b$.

Feltéve, hogy k nem négyzetszám, ellentmondásra fogunk jutni: gyártunk ugyanis egy kisebb összegű (a, b') párt.

A $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = k$ egyenlet átírható így $a^2+b^2 = (ab+1)k$, ami b szerint rendezve $b^2 - kab + (a^2 - k)$. Tekintsük az

$$x^2 - kax + (a^2 - k)$$

másodfokú egyenletet. Ennek egyik gyöke b, a másik gyöke b'. Nyilvánvalóan az (a, b') pár kielégíti az $\dfrac{a^2+b'^2}{ab'+1} = k$ egyenletet. Ha sikerül belátnunk a következőket:

(i) b' egész;

(ii) $b' < b$;

(iii) $b' > 0$.

akkor tehát (a, b') kisebb összegű megoldáspár, mint (a, b), és ezzel beteljesítjük ellentmondásunkat. Az (i),(ii) belátásához segítségül hívjuk a Viète-formulákat:

$$b + b' = ka; \tag{1}$$
$$b \cdot b' = a^2 - k. \tag{2}$$

$b' = ka - b$, tehát egész. Ha $b' \geq b$ lenne, akkor $a^2 - k = b \cdot b' \geq b^2 \geq a^2$ ellentmondás lenne.

A (iii) feltételhez először gondoljuk meg, hogy ha $b' < 0$ lenne, akkor $k = \dfrac{a^2+b'^2}{ab'+1}$ negatív lenne. Másrészt, ha $b' = 0$ volna, akkor $k = \dfrac{a^2+b'^2}{ab'+1} = a^2$, tehát négyzetszám lenne, amit az elején kizártunk. □

A táborban két további feladat is kapcsolódott a Vieta Jumpinghoz. Az első egy jó gyakorlófeladat a Vieta Jump technikára. A második egy jóval nehezebb felhasználás, amely az IMO 2007/5. feladat tovább csavarásával született.

4.13. feladat (Tanári – Hujter Bálint). *Legyenek x és y pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $xy \mid x^2+y^2+1$, akkor $\frac{x^2+y^2+1}{xy} = 3$.* (folklór)

4.14. feladat (Pap Benedek, Zólomy Kristóf). *Határozzuk meg mindazokat az a egész számokat, amikhez léteznek olyan különböző x, y pozitív egészek, amikre $(ax^2+1)^2$ osztható $(axy+1)$-gyel.* (KöMaL A.432.)

A megoldás megtalálható itt: http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A432&l=hu.

Tartalomjegyzék