Fazekas Matektábor

Kismaros, 2013. szeptember 25-29.

Válogatás a kitűzött feladatokból

Tartalomjegyzék

1. Feladatok

1.1. Emigránát

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőtlenség tetszőleges pozitív valós x, y, z-re teljesül:

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+yz}{(1+x+y)^2}\geq 1$$

(Jenei Adrienn)

2. Lássuk be, hogy 99 szomszédos egész szám négyzetének az összege nem lehet teljes hatvány (azaz egy egész szám egynél nagyobb, egész kitevőjű hatványa). *(Öreg Botond)*

3. Keressük az összes $p < q < r$ prímeket, amelyekre $p + q = r$ és $(r - p)(q - p) - 27p$ teljes négyzet. *(Tulassay Zsolt)*

4. Egy folytonos f függvényre teljesül, hogy $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ minden x valósra, és tudjuk, hogy $f(1000) = 999$. Mennyi $f(500)$? *(Weisz Ambrus)*

1.2. Evil-α

5. 100 ideális matematikus összebeszél, majd elmennek egy-egy szobába, melyben végtelen sok doboz van, melyek a természetes számokkal vannak megszámozva. A matematikusok tudják (még a megbeszélés előtt), hogy minden dobozban egy valós szám van, és bármely természetes számra a vele megszámozott 100 doboz ugyanazt a valós számot tartalmazza. Miután a matematikusok beléptek szobájukba (és ezután már nem kommunikálhatnak), mindegyik kinyithat akármennyi dobozt és megnézheti melyik valós számot tartalmazza, azzal a feltétellel, hogy legalább egyet bontatlanul hagy. Ezután pedig minden matematikus (még a szobájában) tippelhet, hogy melyik valós szám van az egyik, ő általa meg nem bontott dobozban. Ha eltalálja, megmenekül, de ha nem, elégetik a KöMaL-ját. Mutassuk meg, hogy megfelelő stratégiával legfeljebb egy KöMaL jut erre a szörnyű sorsa.
(*Üzenet a kétkedőknek: nem butaság a feladat, meg lehet csinálni.*) *(Homonnay Bálint)*

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges m, n pozitív egészekhez végtelen sok a, b egymáshoz relatív prím pozitív egészek alkotta számpár létezik, amire $a + b \mid am^a + bn^b$. *(Maga Balázs)*

7. Legyünk pontszerű (síkbeli) jedik egy négyzet alakú tükörfalú szoba belsejében. Egyszer csak a szoba egy másik belső pontjában feltűnik egy pontszerű droid, mely jól látható módon az életünkre akar támadni. A nagy ijedtségtől mozgásképtelenné válunk, de nagy szerencsére a droid is. A rövid idő alatt míg a droid megölésünk módján gondolkozik az Erő segítségével (pontszerű) szakadásokat hozhatunk létre a tér-idő kontinuum-ban, melyek a rajtuk áthaladó lézernyalábot a négyzeten kívülre és egy másik időbe röpíti, így biztos nem minket talál fejbe, vagy legalábbis addig nem, amíg a szobában vagyunk. Elég-e véges sok szakadást kell létrehoznunk, hogy az immár mozgásképtelen droid ne találhasson el minket lézerfegyverével, vagy megszámlálható végtelen sok szakadásra van szükségünk, esetleg kontinuum sokra? *(Tossenberger Tamás)*

1.3. Ez a mondat hamis

8. Adjunk meg egy olyan ponthalmazt a térben, aminek minden síkon van pontja, de egyiken sem végtelen! *(Göde Ábel)*

9. Szerkesszünk meg egy ötszöget az oldalfelezőpontjai alapján! *(Khayouti Sára)*

10. Az A, B és C betűk felhasználásával szavakat (véges hosszúságú betűsorozatokat) készítünk. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

a) A szóban kiválasztunk néhány egymás utáni betűt – esetleg csak egyetlen egyet, vagy akár a teljes szót – és megduplázzuk, például: $B\underline{BCA}C \to BBCABCAC$

b) Az a) lépés visszafelé: Ha valahol a szóban két egymás utáni részlet megegyezik, akkor az egyiket elhagyjuk: $\underline{ABCABC}BC \to ABCBC$.

Igazoljuk, hogy ilyen lépések sorozatával bármelyik szóból eljuthatunk egy legfeljebb 8-betűs szóhoz. *(Talyigás Gergely)*

1.4. Micimackó

11. Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 4$ egészre igaz az alábbi állítás: ha $f(x)$ egész együtthatós polinom, amire $0 \leq f(c) \leq k$ minden $c \in \{0, 1, 2, ...k + 1\}$-re, akkor $f(0) = f(1) = \cdots = f(k + 1)$. *(Kabos Eszter)*

12. O_1 és O_2 kör metszéspontjai A és B. Legyen r egy olyan egyenes, mely átmegy a B ponton, és O_1-et C, O_2-t D pontban metszi, úgy, hogy a B pont C és D között helyezkedik el. Legyen s az AD-hez közelebbi, azzal párhuzamos egyenes, mely E-ben érinti O_1-et. EA O_2-vel vett A-tól különböző metszéspontja legyen F, és O_2 F-ben húzott érintője t. Bizonyítsuk be, hogy

a) t párhuzamos AC-vel,

b) r, s és t egy pontban metszik egymást.

(Németh Ilona)

13. Adott ABC háromszög. Szerkesztendő D pont a háromszög körülírt körének B-t nem tartalmazó AC ívén, úgy hogy az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög legyen. *(Simon Péter)*

14. Legyen ABC háromszög beírt körének középpontja I. Szokásos jelölések mellett bizonyítsuk be, hogy tetszőleges P pontra fennáll az

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 + (a + b + c)PI^2$$

egyenlőség. *(Szabó Barnabás)*

1.5. Pángalaktikus Gégepukkasztó

15. Adott a síkon két kör úgy, hogy a kisebbik a nagyobbik belsejében van. Tudjuk, hogy a nagy körbe rajzolható egy olyan húrnégyszög, melynek oldalfelezőpontjai a kis körön vannak. Milyen összefüggés áll fenn r, R és d (a két kör sugara és a két kör középpontjának távolsága) között?
(Csigi Máté, a feladat Hraskó Andrástól származik)

1.6. Sötét fény

16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder mind a négy lapjának a területe egyenlő, akkor a lapok egybevágóak. *(Badacsonyi András)*

17. A k_1 és k_2 egyenlő sugarú körök két pontban metszik egymást. Az ℓ egyenes a k_1 kört az A és C, k_2-t a B és D pontokban metszi úgy, hogy az egyenesen a pontok sorrendje A, B, C és D. A k_3 és k_4 körök mindketten érintik a következőket: az ℓ egyenest, k_1-et belülről, és k_2-t kívülről; továbbá ℓ különböző oldalain vannak. Tegyük fel, hogy k_3 érinti k_4-et. Bizonyítsuk be, hogy $AB = CD$.
(Fehér Zsombor)

18. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, melyekre $abc = 1$, akkor

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}\,.$$

(Janzer Barnabás)

19. Van-e olyan pozitív valós számokból álló $x_1, x_2, \ldots$ végtelen sorozat, amelyre $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén? *(Mócsy Miklós)*

1.7. Tökéletesített forma

20. Hívjuk az A-val jelölt, n-jegyű szám csonkjának azokat az $(n-1)$-jegyű számokat, amiket úgy kapunk, hogy az A-nak töröljük az egyik számjegyét. Például, az 2012 csonkjai a 212, a 202 és a 201; 0-val nem kezdődhet az $(n-1)$-jegyű csonk. Hány olyan 7-jegyű szám van, amely nem állítható elő egy szám és egy csonkjának összegeként? *(Csepregi-Horváth Zsófia)*

21. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén létezik olyan n-jegyű szám, amely nem tartalmaz 0-t és osztható a számjegyei összegével. *(Csernák Tamás)*

22. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és legyen M, N, P három pont a BC, CA, AB oldalakon, úgy, hogy AM, BN, CP egy pontban metszik egymást. Az AB-vel N-en keresztül húzott párhuzamos az MP-t az E pontban metszi, és ugyanígy az AB-vel M-en keresztül húzott párhuzamos az NP-t F-ben metszi. Mutassuk meg, hogy CP, MN, és EF egy pontban metszik egymást!
(Németh Gergely)

1.8. XKCD csapat

23. Fel lehet-e bontani egy $\sqrt{2} \times 1$-es téglalapot véges sok négyzetre?

(Ágoston Péter, forrás: KöMaL)

24. Ketten játszanak egy $n \times m$-es pontrácson. A kezdő játékos behúz egy egyenes vonalat két szomszédos (nem átlós) pont közé. Ezután felváltva lépnek és mindketten behúzhatnak egy vonalat két olyan szomszédos pont közé, melyek közül az egyikből egy vonal indul ki, a másikból egy sem, más szóval folytatniuk kell a kígyót, ami nem metszheti önmagát. Amelyik játékos nem tud lépni, veszít. Állapítsuk meg, hogy n és m függvényében melyik játékosnak van nyerő stratégiája!

(Kalló Kristóf, forrás: Glen Vecchione Játékos fejtörők c. könyve)

25. Tekintsünk két koncentrikus kört és n darab, a közös középpontjukból kiinduló félegyenest, ezek $2n$ darab véges területrészt (továbbiakban: mezőt) határoznak meg. Az így létrejött mezőkre elhelyezünk összesen $4n + 1$ békát. Amennyiben legalább három béka van egy mezőn, akkor a három szomszédos mezőre átugrik egy-egy béka, egyébként helyben maradnak. Bizonyítsuk be, hogy idővel minden mezőre igaz lesz, hogy van rajta béka vagy minden szomszédján van béka.

(Nagy Bence Kristóf, forrás: Kínai IMO-válogató, 2005)

2. Megoldások

2.1. Emigránát

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőtlenség tetszőleges pozitív valós x, y, z-re teljesül:

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+yz}{(1+x+y)^2}\geq 1$$

(Jenei Adrienn)

Megoldás: A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből kapjuk:

$$\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)(1+xy+xz)\geq(1+y+z)^2.$$

Mindkét oldalt megszorozva $\dfrac{x}{(x+y+z)(1+y+z)^2}$-tel kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}\geq\frac{x}{x+y+z}.$$

Ehhez hasonlóan $\dfrac{1+yz+zx}{(1+z+x)^2}\geq\dfrac{y}{x+y+z}$ és $\dfrac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geq\dfrac{z}{x+y+z}$.

A három egyenlőtlenséget összeadva megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

2. Lássuk be, hogy 99 szomszédos egész szám négyzetének az összege nem lehet teljes hatvány (azaz egy egész szám egynél nagyobb, egész kitevőjű hatványa). *(Öreg Botond)*

Megoldás: A középső számot jelöljük x-szel. Azt kell igazolnunk, hogy az

$$(x-49)^2+(x-48)^2+\cdots+(x+49)^2=y^k$$

egyenletnek nincs egész x, y és $k\geq 2$ megoldása. Elvégezve a műveleteket és beírva az első 49 négyzetszám összegére vonatkozó képletet, a bal oldalon $99x^2+49\cdot 50\cdot 33$ adódik. Ez a szám bármely egész x esetén osztható 3-mal, azonban 9-cel már nem, és így nem lehet teljes hatvány.

3. Keressük az összes $p<q<r$ prímeket, amelyekre $p+q=r$ és $(r-p)(q-p)-27p$ teljes négyzet.

(Tulassay Zsolt)

Megoldás: $p+q=r$ miatt p páros kell legyen, tehát $p=2$. Az $(r-p)(q-p)-27p$ kifejezést átalakítva (kihasználjuk, hogy $p=2$ és $2+q=r$) kapjuk: $q(q-2)-27\cdot 2=u^2$, ahol u pozitív egész. Azaz $q^2-2q+1-u^2=55$, szorzattá alakítva:

$$(q-1-u)(q-1+u)=(q-1)^2-u^2=q^2-2q+1=55.$$

Innen két lehetőség van:

- $(q-1-u)=1$ és $(q-1+u)=55$ azaz $q=29, r=31$;
- vagy $(q-1-u)=5$ és $(q-1+u)=11$ azaz $q=9$, ami ellentmondás.

Tehát az egyetlen megoldás $p = 2, q = 29, r = 31$.

Megjegyzés: $q^2 - 2q - 54(-1+1) = u^2$ után nem minden megoldó alakított szorzattá. Rendezés után:

$$(q-1)^2 - u^2 = q^2 - 2q + 1 - u^2 = 55$$

Ezután két négyzetszám különbségét vizsgálták, amely (ismert módon) egymást követő páratlan számok összegeként írható fel. Innen nem túl sok eset vizsgálatával a fenti eredmény adódik.

4. Egy folytonos f függvényre teljesül, hogy $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ minden x valósra, és tudjuk, hogy $f(1000) = 999$. Mennyi $f(500)$? *(Weisz Ambrus)*

Megoldás: Ha $y = f(x)$ valamilyen x-re, akkor $f(y) = \frac{1}{y}$. $f(1000) = 999 \Rightarrow f(999) = \frac{1}{999}$. Mivel folytonos függvény, ezért 999 és $\frac{1}{999}$ között minden értéket, így az 500-at is felveszi, tehát $f(500) = \frac{1}{500}$.

2.2. Evil-α

5. 100 ideális matematikus összebeszél, majd elmennek egy-egy szobába, melyben végtelen sok doboz van, melyek a természetes számokkal vannak megszámozva. A matematikusok tudják (még a megbeszélés előtt), hogy minden dobozban egy valós szám van, és bármely természetes számra a vele megszámozott 100 doboz ugyanazt a valós számot tartalmazza. Miután a matematikusok beléptek szobájukba (és ezután már nem kommunikálhatnak), mindegyik kinyithat akármennyi dobozt és megnézheti melyik valós számot tartalmazza, azzal a feltétellel, hogy legalább egyet bontatlanul hagy. Ezután pedig minden matematikus (még a szobájában) tippelhet, hogy melyik valós szám van az egyik, ő általa meg nem bontott dobozban. Ha eltalálja, megmenekül, de ha nem, elégetik a KöMaL-ját. Mutassuk meg, hogy megfelelő stratégiával legfeljebb egy KöMaL jut erre a szörnyű sorsa. (*Üzenet a kétkedőknek: nem butaság a feladat, meg lehet csinálni.*) *(Homonnay Bálint)*

Megoldás: A matematikusok osztályokba sorolják az a valós számokból álló sorozatokat úgy, hogy pontosan azok kerülnek egy osztályba, melyek csak véges sok helyen különböznek (ez valóban ekvivalenciareláció), majd minden osztályból kiválasztanak egy kitüntetett sorozatot (ezen a ponton bizonyításunk felhasználja a *kiválasztási axiómát*).

A stratégia a követező:
A matematikusok megszámozzák magukat 1-től 100-ig. Az i sorszámú matematikus kinyit minden dobozt, kivéve azokat, melyek sorszáma i-t ad maradékul 100-zal osztva. Jelölje $d(k)$ a k számú doboz által tartalmazott valós számot. Jelölje $f(i)$ azt a számot, ahányadik elemtől a sorozat megegyezik az ő osztályából kiválasztott sorozattal.

Legyen $g(i) = \max\{f(1), f(2), \ldots, f(i-1), f(i+1), \ldots, f(100)\} + 1$. Így az i-edik matematikus ismeri $g(i)$ értékét. Ezután az i-edik matematikus a $g(i)$-edik i maradékot adó sorszámú doboztól kezdve minden i maradékot adó sorszámú dobozt is kinyit ($g(i) \geq 2$, tehát marad még bontatlan doboz), megnézi, hogy ezen sorozat melyik osztályba tartozik, majd azt tippeli, hogy a $(g(i)-1)$-edik i maradékot adó sorszámú doboz azt a valós számot tartalmazza, mely az osztály kiválasztott sorozatának $(g(i)-1)$-edik tagja. Így ha az i-edik matematikus téved, az azt jelenti, hogy $f(i)$ szigorúan nagyobb az összes többi $f(i)$-nél, így legfeljebb egy matematikus tévedhet.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges m, n pozitív egészekhez végtelen sok a, b egymáshoz relatív prím pozitív egészek alkotta számpár létezik, amire $a + b \mid am^a + bn^b$. *(Maga Balázs)*

Megoldás: Amennyiben $mn = 1$, tetszőleges $(a, b) = 1$ feltételnek eleget tevő a, b számpár megfelel. Ha $mn \geq 2$, szorozzunk fel n^a-nal:

$$n^a(am^a + nb^n) = (a+b)n^{a+b} + a\big((mn)^a - n^{a+b}\big)$$

Amennyiben $(a + b, n) = 1$, az n^a-nal való felszorzás az $a + b$-vel való oszthatóságot nem befolyásolja. Így olyan a, b relatív prím párból szeretnénk végtelen sokat, amire teljesül, hogy $(a + b, n) = 1$, és

$a+b|n^a(am^a+nb^n) = (a+b)n^{a+b} + a\big((mn)^a - n^{a+b}\big)$. Ebben az összegben az első tag osztható $a+b$-vel, a második tag pedig egy olyan szorzat, melynek első tényezője relatív prím $a+b$-hez. Így az kell, hogy $a+b$ ossza a második tényezőt, azaz $a+b|(mn)^a - n^{a+b}$.

Legyen p prím, továbbá legyen $p = a+b$. Azt akarjuk megmutatni, hogy végtelen sok p prímhez létezik $1 \le a \le p-1$ pozitív egész, amire $p|(mn)^a - n^p$. A kis Fermat-tétel alapján $n^p \equiv n \pmod p$, így a kifejezésünk átírható: $p|(mn)^a - n$. Indirekte tegyük fel, hogy csak véges sok p prímhez van ennek megfelelő a. Legyenek ezen prímek $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Ekkor $(mn)^2 - n = p_1^{q_1}p_2^{q_2}\ldots p_r^{q_r}$, ahol a q_i-k nemnegatív egészek. Most trükkösen fogunk a-t választani: legyen $a = p_1^{q_1}p_2^{q_2}\ldots p_r^{q_r}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_r-1)+2$. Ennek a választasnak majd még később hasznát látjuk. Az indirekt feltevés alapján $(mn)^a - n = p_1^{q_1'}p_2^{q_2'}\ldots p_r^{q_r'}\ldots$ ahol a q_i'-k nemnegatív egészek.

Ha $p_i|n$, akkor az iménti összefüggés alapján $p_i^{q_i'}|n$. Ennek azonban következménye, hogy $p_i^{q_i'}|(mn)^2 - n$, így $q_i' \le q_i$.

Ha viszont p_i nem osztja n-t, akkor p_i nem osztja m-t sem. Így $(p_i^{q_i+1}, mn) = 1$. Az Euler-Fermat tétel alapján, mivel $\varphi(p_i^{q_i+1}) = p_i^{q_i}(p_i-1)$ osztja $a-2$-t (itt villan meg a jó a választás haszna), $(mn)^a - n \equiv (mn)^2 - n \bmod p_i^{q_i+1}$. Ez azonban azt jelenti, hogy $p_i^{q_i+1}$ nem osztja $(mn)^a - n$-t sem. Tehát $q_i' \le q_i$ ebben az esetben is. Mindezek alapján viszont:

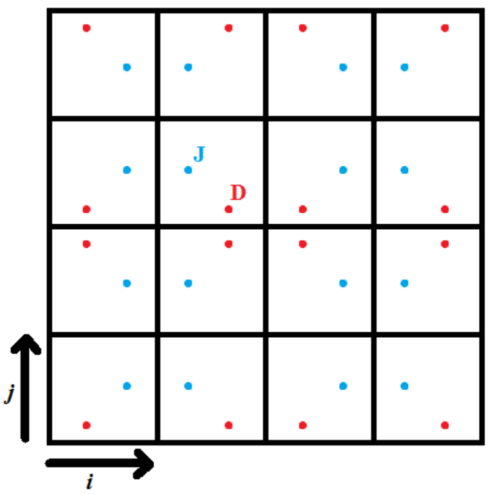
$$(mn)^a - n = p_1^{q_1'}p_2^{q_2'}\ldots p_r^{q_r'} \le p_1^{q_1}p_2^{q_2}\ldots p_r^{q_r} = (mn)^2 - n$$

Ez nyilván ellentmondás, mivel $a > 2$. Így készen vagyunk.

7. Legyünk pontszerű (síkbeli) jedik egy négyzet alakú tükörfalú szoba belsejében. Egyszer csak a szoba egy másik belső pontjában feltűnik egy pontszerű droid, mely jól látható módon az életünkre akar támadni. A nagy ijedtségtől mozgásképtelenné válunk, de nagy szerencsére a droid is. A rövid idő alatt míg a droid megölésünk módján gondolkozik az Erő segítségével (pontszerű) szakadásokat hozhatunk létre a tér-idő kontinuum-ban, melyek a rajtuk áthaladó lézernyalábot a négyzeten kívülre és egy másik időbe röpíti, így biztos nem minket talál fejbe, vagy legalábbis addig nem, amíg a szobában vagyunk. Elég-e véges sok szakadást kell létrehoznunk, hogy az immár mozgásképtelen droid ne találhasson el minket lézerfegyverével, vagy megszámlálható végtelen sok szakadásra van szükségünk, esetleg kontinuum sokra? *(Tossenberger Tamás)*

Megoldás: Elegendő 16 ilyen pontot létrehoznunk.

Tükrözzük a négyzetet az oldalaira, majd ezeket is, és így tovább, kitöltve az egész síkot. Így azt kapjuk, hogy egyrészt a tükrözgetés valóban folytatható, másrészt a sík 2×2-es blokkokkal lesz kitöltve négyzetrács szerűen (ezt azzal igazolhatjuk, hogy egyik négyzetből kiindulva és valamilyen módon oldalakra való tükrözgetéssel eljutva egy másik négyzetbe a függőleges tengelyű tükrözések számának paritása megegyezett a kiindulási és a másik négyzet vízszintes távolságának (négyzetoldalakban mérve) paritásával, és hasonló a helyzet a vízszintes tengelyekre való tükrözésekkel; továbbá ezt úgy is igazolhatjuk, hogy a feltételezett ábra valóban minden oldalmenti tengelyre szimmetrikus).



Jedi és droid

Az ábrán látható módon jelölje D a droid, J a Jedi helyét, és jelölje a két oldalvektort i, illetve j, továbbá legyen D az origó. Az ábra fent megállapított tulajdonsága miatt (2×2-es blokkokkal van kitöltve négyzetrács szerűen) az ábrának $2i$-s és $2j$-s eltolási szimmetriái vannak, így a szakadásoknak is.

A fényvisszaverődés geometriai tulajdonságai miatt (ugyanakkora szögben verődik vissza a felületről) a droid egy lövése pontosan akkor találja el a jedit, ha az előbb definiált síkon a droidból (D-ből) a lövés irányába elindított félegyenes átmegy egy kék ponton (J-n, vagy egy képén), úgy hogy előtte nem megy át szakadáson (beleértve a szakadások képeit is). Vegyünk egy 4×4-es blokkot, és az ezen lévő kék pontokat (J képeit) jelölje (lényegtelen, milyen sorrendben) $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$, és hozzunk létre összesen 16 szakadást az $DA_1, DA_2, \ldots, DA_{16}$ szakaszok felezőpontjaiban. Jelöljön B egy tetszőlegesen kiválasztott pontot J képei közül. Ekkor létezik olyan $1 \leq k \leq 16$ egész, amire $B = A_k + 4ni + 4kj$, és mivel az $A_k/2$ helyvektorú pontban szakadás van, ezért a fent említett szimmetria miatt $\frac{A_k}{2} + 2ni + 2kj$ pontban is, azaz $B/2$ helyvektorú pontban is, vagyis DB szakasz felezőpontján. Ezzel tehát beláttuk, hogy ezen 16 szakadást létrehozva nem lesz olyan D-ből induló félegyenes, amely átmenne J egyik képén, de előtte ne menne át egy szakadáson, azaz ezen 16 szakadás létrehozásával a jedi sebezhetetlenné válik.

2.3. Ez a mondat hamis

8. Adjunk meg egy olyan ponthalmazt a térben, aminek minden síkon van pontja, de egyiken sem végtelen!

(Göde Ábel)

Megoldás: Vegyünk azon pontok halmazát, melyek $(x; y; z)$ koordinátáira teljesül, hogy $y = x^3$ és $z = x^5$. Ez jó megoldás, mert egy sík egyenlete $ax + by + cz + d = 0$. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $cx^5 + bx^3 + ax + d = 0$. Közismert, hogy az ilyen egyenleteknek mindig van gyöke, de sose végtelen.

9. Szerkesszünk meg egy ötszöget az oldalfelezőpontjai alapján! *(Khayouti Sára)*

1. megoldás: Legyenek az ötszög csúcsai A, B, C, D, E. Legyenek a csúcsokkal szembenlévő felezőpontok A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. ACD_Δ-ben C_1B_1 középvonal, tehát AD-nek a fele, és párhuzamos vele. Szimmetrikusan minden háromszögre megcsinálva megkapjuk azt, hogy a belső csillag (átló oldalakkal) megkapható a középvonalak kétszereséből, és páronként megfelelő szögeiből. Ha pedig a csillag megszerkeszthető, akkor az ötszög is (ugyanazok a csúcsaik).

2. megoldás: Egy tetszőleges P pontot sorra tükrözve a csúcsokra, kapjuk a P^* pontot. PP^*szakasz felezőpontja a transzformáció fixpontja. (Mert 5 középpontos tükrözésnek megfeleltethető egy középpontos tükrözés, ami nyilván a szakasz felezőpontjára kell, hogy történjen.) Az ötszög csúcsai az egyedüli fixpontok a transzformációban, tehát egy csúcsot kaptunk meg, innen az ötszög sorra tükrözve megkapható.

3. megoldás: Az ötszög csúcsaihoz vezető vektorok legyenek a, b, c, d, e. Ezek szerint a felezőpontjaihoz vezető vektorok $(a+b)/2, (b+c)/2, (c+d)/2, (d+e)/2, (a+e)/2$. $(a+b)/2 + (b+c)/2(c+d)/2 + (d+e)/2 - (a+e)/2 = b+c+d$. Ebből kivonva $(b+c)/2$-t kétszer megkapjuk C csúcs vektorát, tehát tükrözve C csúcsot minden csúcs megkapható. (Vagy szimmetrikusan végrehajtva az eljárást, az összes csúcsvektor megkapható.)

4. megoldás: $ABCD$ négyszög, tehát felezőpontjai egy paralelogramma csúcsai. $\Rightarrow$ a paralelogramma megyedik csúcsát megszerkesztve megkapjuk AD felezőpontját. $\Rightarrow$ megvannak AED háromszög felezőpontjai $\Rightarrow$ megszerkeszthető a háromszög $\Rightarrow$ megvan A, E, D. (Például úgy, hogy B_1-et tükrözöm C_1E_1 felezőpontjára, így megkapom A-t. Vagy AD felezőpontján keresztül párhuzamost szerkesztek C_1B_1-gyel és C_1B_1-et felmérve mindkét irányba megkapom A-t és D-t.) Innen a többi csúcs megkapható.

10. Az A, B és C betűk felhasználásával szavakat (véges hosszúságú betűsorozatokat) készítünk. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

a) A szóban kiválasztunk néhány egymás utáni betűt – esetleg csak egyetlen egyet, vagy akár a teljes szót – és megduplázzuk, például: $B\underline{BCA}C \to BBCABCAC$

b) Az a) lépés visszafelé: Ha valahol a szóban két egymás utáni részlet megegyezik, akkor az egyiket elhagyjuk: $\underline{ABCABC}BC \to ABCBC$.

Igazoljuk, hogy ilyen lépések sorozatával bármelyik szóból eljuthatunk egy legfeljebb 8-betűs szóhoz.

(Talyigás Gergely)

Megoldás: Ha az u és v szavak átalakíthatók egymásba, azt így fogjuk jelölni: $u \sim v$, és azt mondjuk, hogy a két szó ekvivalens. Az u és v szavak egymás után írását pedig uv-vel jelöljük. Először bebizonyítjuk a következő lemmát.

Lemma. Ha az u szó az A, B, C betűk mindegyikét tartalmazza, akkor tetszőleges v szóhoz létezik olyan w szó, amelyre $uvw \sim u$.

Bizonyítás. Ha v csak egyetlen betű, akkor – mivel u ezt a betűt is tartalmazza –, u felírható $u = u_1vu_2$ alakban; ekkor legyen $w = u_2$. Ezzel a választással:

$$uvw = (u_1vu_2)vu_2 = u_1((vu_2)(vu_2)) \sim u_1(vu_2) = u.$$

Az általános esetben legyenek v betűi sorrendben $a_1, \ldots, a_k$. Mint láttuk, választhatók olyan $w_1, ..., w_k$ szavak, amelyekre $(ua_1)w_1 \sim u, (ua_1a_2)w_2 \sim ua_1, \ldots, (ua_1 \ldots a_k)w_k \sim ua_1...a_{k-1}$. Ekkor $u \sim ua_1w_1 \sim ua_1a_2w_2w_1 \sim \cdots \sim ua_1 \ldots a_kw_k \ldots w_1 = uv(w_k...w_1)$, vagyis $w = w_k \ldots w_1$ egy jó választás. Ezzel a lemmát igazoltuk. $\square$

Legyen most a egy olyan szó, amely legalább 9 betűből áll. Megmutatjuk, hogy ez ekvivalens egy rövidebb szóval.

Legyen $a = bcd$, ahol b az első 4 betűt tartalmazza, d pedig az utolsó 4-et. Könnyű ellenőrizni, hogy ha b vagy d csak kétféle betűből áll, akkor tartalmaz két megegyező, egymás utáni részletet, és ilyenkor a b) lépés közvetlenül alkalmazható. Ha b és d mindhárom fajta betűt tartalmazza, akkor megmutatjuk, hogy $a \sim bd$. A lemma alapján létezik egy olyan e szó, amelyre $b(cd)e \sim b$, és létezik egy olyan f szó is, amelyre $def \sim d$. Ezek felhasználásával:

$$a = bcd \sim bc(def) \sim bc(dedef) = (bcde)(def) \sim bd.$$

2.4. Micimackó

11. Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 4$ egészre igaz az alábbi állítás: ha $f(x)$ egész együtthatós polinom, amire $0 \leq f(c) \leq k$ minden $c \in \{0, 1, 2, ...k + 1\}$-re, akkor $f(0) = f(1) = \cdots = f(k + 1)$. *(Kabos Eszter)*

1. megoldás: Használjuk, hogy egy $f(x)$ egész együtthatós polinomnál $a-b|f(a)-f(b)$. Ez azért van, mert $a - b$ minden tagból kiemelhető, kivéve a konstans tagot, de az a kivonásnál kiesik. Tudjuk, hogy $f(k + 1) - f(0)$ többszörse $k + 1$-nek, másrészt nem nagyobb, mint k, tehát 0, tehát $f(k + 1) = f(0)$. Tehát létezik egy egész együtthatós $g(x)$ polinom, hogy $f(x) - f(0) = x(x - k - 1) \cdot g(x)$ (azért egész együtthatós $g(x)$, mert $f(x) - f(0)$ polinomnak 0 és $k + 1$ is gyöke).

Így $k \geq |f(c)-f(0)| = c(k+1-c)\cdot g(c)$ minden feladatban megengedett c-re. Másrészt $c(k+1-c) > k$, azaz $(c - 1)(k - c) > 0$ ami akkor teljesül, ha $2 \leq c \leq k - 1$. Tehát ezekre c-kre akkor $|g(c)| < 1$, tehát $g(c) = 0$.

Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $h(x)$ egész együtthatós polinom, hogy

$$f(x) - f(0) = x(x - 2)(x - 3) \cdots (x - k + 1)(x - k - 1) \cdot h(x).$$

Tehát már csak azt kell megmutatni, hogy $h(1) = h(k) = 0$. $c =$ 1-re ekkor $|f(1) - f(0)| = (k - 2)! \cdot k \cdot |h(1)|$, valamint $c = k$-ra $|f(k) - f(0)| = (k - 2)!k \cdot |h(k)|$. Továbbá $k \geq f(c) - f(0)$. Tehát ha $k \geq 4$, akkor $(k - 2)! > 1$, tehát $|h(c)| = |h(1)| = |h(k)| = 0$.

2. megoldás: Használjuk, hogy $(a - b)|f(a) - f(b)$. Ekkor ahogy az előbb is, nyilván $f(0) = f(k+1)$. Egyelőre feltesszük, hogy $k \geq 5$, a $k = 4$ esetet majd külön vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy $f(k) \neq f(0)$. Ekkor $f(0) = f(k+1) = 0$ és $f(k) = k$, vagy fordítva (mert a különbségük osztható k-val és a megadott értékek közt mozoghatnak). Így ebben az esetben $(k+1) - 2|0 - f(2)$, azaz $f(2) = 0$ vagy $f(2) = k-1$. Azonban $k-2|k-f(2)$, amely egyik esetben sem lehetséges (ha $k \geq 5$). Ha az előbb fordítva volt, akkor $(k+1)-2|k-f(2)$, azaz $f(2) = 1$ vagy k illetve $k-2|0-f(2)$, ami egyik esetben sem lehetséges.

Így itt ellentmondásra jutottunk, azaz $f(k) = f(0)$. Teljesen szimmetrikusan $f(1) = f(k+1)$, azaz tudjuk, hogy $f(0) = f(1) = f(n) = f(n+1)$.

Vegyünk egy $l \geq \frac{k+1}{2}$ egészet. Tegyük fel, hogy $f(k) \neq f(0)$. Ekkor $l|(f(l) - f(0)$ és $(l-1)|f(l) - f(1) = f(l) - f(0)$, ami $(l, l-1) = 1$ miatt $f(l) - f(0) \geq l(l-1) \geq \frac{k+1}{2} \cdot \frac{k-1}{2} \geq k^2 - 14 \geq k+1$ ha $k \geq 5$. Ez pedig ellentmonás. Hasonlóan szimmetrikusan működik ez $k \leq \frac{k+1}{2}$-re is.

Kimaradt még, ha $k = 4$. Ekkor is $f(0) = f(5)$. $3|f(3) - f(0) = f(3) - f(5)$ és $2|f(5) - f(3)$, azaz $f(5) = f(3) = f(0)$. Valamint ugyanígy $f(2)$ egyenlő az előzőekkel. $f(4) - f(1)$ 0 vagy 3, azonban ha 3, akkor különbözik a paritásuk, ami nem lehet, mert $2|f(4) - f(0) = f(4) - f(3)$ és $2|f(1) - f(3)$. Tehát $f(1) = f(4)$ és $f(0) = f(2) = f(3) = f(5)$. Ez csak úgy lehet, ha az egyik 4 a másik 0. Ekkor $f(x) - f(0)$ az első megoldásban szereplők miatt $x(x-5)(x-2)(x-3)g(x)$, ami $x = 4$-ben csak 8 többszörösét veheti fel, azaz 4-et nem. Ekkor 0-át vesz fel, így a feladat állítását igazoltuk.

(Janzer Barnabás és Maga Balázs megoldása alapján)

Megjegyzés: $k = 1, 2, 3$-ra van ellenpélda:
$f_1(x) = x(2-x)$, $f_2(x) = x(3-x)$ és $f_3(x) = x(4-x)(x-2)^2$.

12. O_1 és O_2 kör metszéspontjai A és B. Legyen r egy olyan egyenes, mely átmegy a B ponton, és O_1-et C, O_2-t D pontban metszi, úgy, hogy a B pont C és D között helyezkedik el. Legyen s az AD-hez közelebbi, azzal párhuzamos egyenes, mely E-ben érinti O_1-et. EA O_2-vel vett A-tól különböző metszéspontja legyen F, és O_2 F-ben húzott érintője t. Bizonyítsuk be, hogy

a) t párhuzamos AC-vel,

b) r, s és t egy pontban metszik egymást.

(Németh Ilona)

Megoldás: a) Lássuk be, hogy CEA háromszög hasonló AFD háromszöghöz.
$ECA\angle = FAD\angle$, mivel $FAD\angle$ egyenlő s és EAF egyenes szögével ($s \parallel AD$) és s és EAF egyenes szöge egyenlő ECA szöggel, a kerületi szögek tétele alapján (O_1 kör EA húrjának kerületi szöge, és az E-be húzott érintővel való szöge).

$CEA\angle = AFD\angle$, mivel $AFD\angle = ABD\angle$ (kerületi szögek tétele: O_2 kör, AD húr), ekkor $CBA\angle = 180° - ABD\angle$ (r egy egyenes) $CEA\angle = 180° - CBA\angle$ (kerületi szögek t.: O_1 kör, CA húr, a húr különböző oldalán lévő szögek), tehát $CEA\angle = 180° - (180° - ABD\angle) = ABD\angle = AFD\angle$

Tehát $CEA_\triangle \simeq AFD_\triangle$, így $CAE\angle = ADF\angle$, ami már az, amit szeretnénk, mivel $CAE\angle$ az AC egyenes és EAF egyenes szöge, azt szeretnénk bizonyítani, hogy t és EAF egyenes szöge is ennyi. t és EAF egyenes szöge éppen $ADF\angle$ a kerületi szögek tétele alapján (O_2 kör AF húrjának kerületi szöge, és az F-be húzott érintővel való szöge)

b) Lássuk be, hogy r és t, valamint s és r metszéspontja is rajta van $BFE_\triangle$ körülírt körén. Jelölje M_1 a kör és t, míg M_2 a kör és s metszéspontját.

- $BM_1F\angle = BEF\angle$ (a köréírt körben BF húrhoz tartozó kerületi szögek)
- $BM_1F\angle = BCA\angle$ ($t \parallel CA \Rightarrow$ váltószögek, hiszen r egy egyenes)
- $BCA\angle = BEA\angle$ ($= BEF\angle$) (kerületi szögek t.: O_1 kör, BA húr)

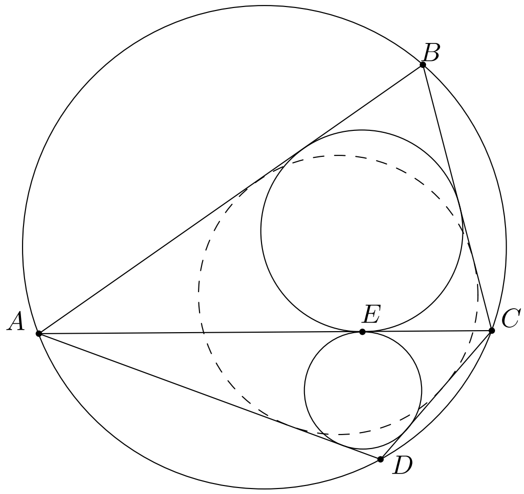
másrészt:

- $BM_2E\angle = BFE\angle$ (a köréírt körben BE húrhoz tartozó kerületi szögek)
- $BM_2E\angle = BDA\angle$ ($s \parallel DA \Rightarrow$ párhuzamos állású szögek, hiszen EAF egy egyenes)
- $BDA\angle = BFA\angle$ ($= BFE\angle$) (kerületi szögek t.: O_2 kör, BA húr)

Tehát $M_1 = M_2$, mivel r egyenesnek B ponton kívül csak egy metszéspontja van $BFE_\triangle$ körülírt körével.

13. Adott ABC háromszög. Szerkesztendő D pont a háromszög körülírt körének B-t nem tartalmazó AC ívén, úgy hogy az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög legyen. *(Simon Péter)*

1. megoldás:

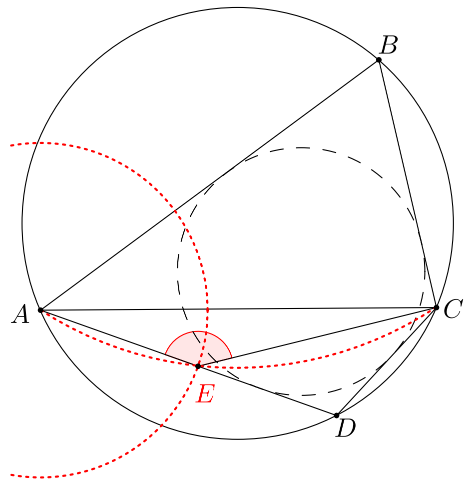


Lemma: Egy $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha ABC és ADC háromszögek beírt köre ugyanott érintik az AC oldalt.
Bizonyítás: Érintse ABC háromszög beírt köre az AC oldalt E-ben. Ekkor $AE - EC = (s - BC) - (s - AB) = AB - BC$, ahol $s = (AB + BC + CA)/2$. Ekkor ha ADC háromszög beírt köre az AC-t E'-ben érinti, akkor hasonlóan $AE' - E'C = AD - CD$.
Ismeretes, hogy $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha $AB + CD = AD + BC$, azaz $AB - BC = AD - CD$, tehát $AE - EC = AE' - E'C$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $E' = E$. Ezzel a lemmát bizonyítottuk. $\square$

Mivel az ABC háromszög adott, ezért ezt az E pontot meg tudjuk szerkeszteni. Ha ebből az E-ből merőlegest bocsátunk az AC oldalra, akkor egy olyan egyenest kapunk, melyen rajta van az ADC háromszög beírt körének középpontja.

Tetszőleges ADC háromszögre igaz, hogy ha vesszük a körülírt körének D-t nem tartalmazó AC ívének F felezőpontját, akkor F középpontú FA sugarú körön rajta van az ADC beírt körének középpontja. Mivel F-et meg tudjuk szerkeszteni, ezért ezt a kört is, így megszerkeszthetjükaz ADC háromszög beírt körének középpontját, amivel D szerkesztése már egyértelmű.

2. megoldás: Egy $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha $AB - BC = AD - CD$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $AB \geq BC$. Arra hajtunk, hogy megszerkesszük az AD oldal azon E pontját, melyre $ED = DC$.



Erre az E pontra teljesül, hogy $AE = (AE + ED) - ED = AD - DC = AB - BC$. Tehát AE távolságot meg tudjuk szerkeszteni, így A középpontú AE sugarú körön rajta van E. Viszont tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned} AEC\angle &= 180^\circ - DEC\angle = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - EDC\angle}{2} = 90^\circ + \frac{ABC\angle}{2}. \end{aligned}$$

Tehát ezt a szöget meg tudjuk szerkeszteni, amivel meg tudjuk szerkeszteni az AC-hez tartozó ilyen szögű látókörívet.
Így a szerkesztett körünk és látókörívünk metszéspontja megadja az E pontot, ahonnan a szerkesztés egyértelmű.

14. Legyen ABC háromszög beírt körének középpontja I. Szokásos jelölések mellett bizonyítsuk be, hogy tetszőleges P pontra fennáll az

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 + (a+b+c) \cdot PI^2$$

egyenlőség. *(Szabó Barnabás)*

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőség ekvivalens alakja:

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = a \cdot (PI^2 + IA^2) + b \cdot (PI^2 + IB^2) + c \cdot (PI^2 + IC^2) + (a+b+c) \cdot PI^2$$

Ha vektoroknak fogjuk fel a szakaszokat és $PX = PI + IX$ helyettesítéseket elvégezzük (ahol $X = A, B, C$), majd skalárszorzatként tekintünk a négyzetre emelésre, akkor az jön ki, hogy a bizonyítandó állítás ekvivalens a következővel:

$$a \cdot IA + b \cdot IB + c \cdot IC = 0$$

Legyen D a C-ből induló belső szögfelező és AB egyenes metszéspontja. Ekkor szögfelező tétel alapján $\frac{AD}{DB} = \frac{a}{b}$, innen meg már világos, hogy $\frac{a}{a+b}IA + \frac{b}{a+b}IB = ID$, amiből $a \cdot IA + b \cdot IB = (a+b) \cdot ID$. Ebből következik, hogy az $a \cdot IA + b \cdot IB + c \cdot IC$ vektor iránya párhuzamos a C-ből induló szögfelezővel.

Ugyanezt a gondolatmenetet persze másik szögfelezőre is eljátszhatnánk. $a \cdot IA + b \cdot IB + c \cdot IC$ pedig csak akkor lehet több különböző irányú vektorral is párhuzamos egyszerre, ha nullvektor.

2.5. Pángalaktikus Gégepukkasztó

15. Adott a síkon két kör úgy, hogy a kisebbik a nagyobbik belsejében van. Tudjuk, hogy a nagy körbe rajzolható egy olyan húrnégyszög, melynek oldalfelezőpontjai a kis körön vannak. Milyen összefüggés áll fenn r, R és d (a két kör sugara és a két kör középpontjának távolsága) között?

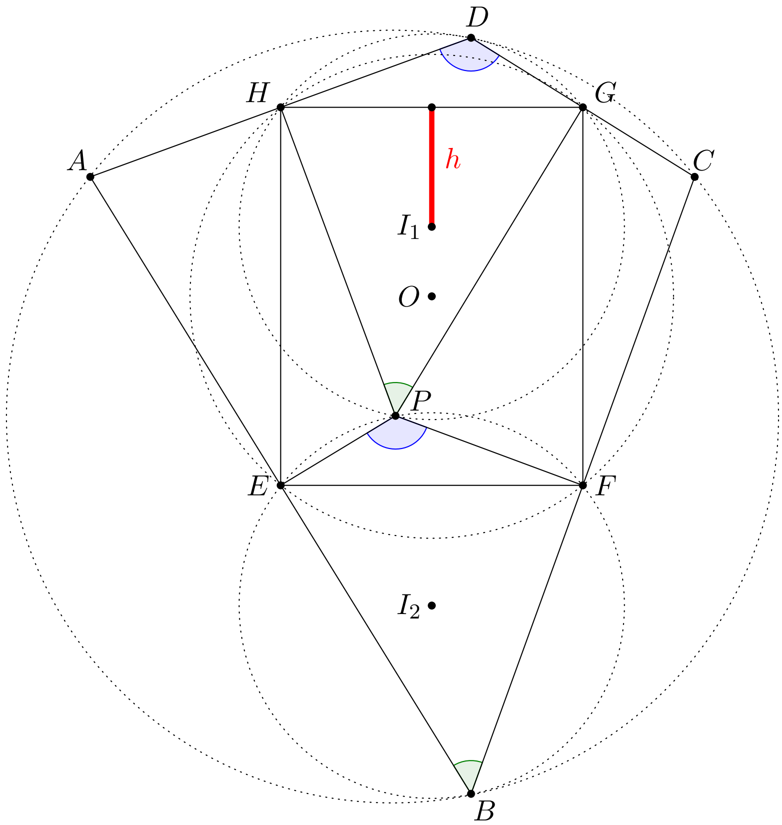
Megoldás: Használjuk a következő jelöléseket:

A nagy körbe rajzolt húrnégszög legyen $ABCD$, az oldalfelezőpontjai $EFGH$. A nagy kör sugara R, középpontja P; a kis kör sugara r, középpontja O.

Az oldalfelező pontok által alkotott $EFGH$ négyszög paralelogramma, ugyanis bármely négyszög oldalfelezői egy paralelogrammát határoznak meg. Továbbá, mivel ezek a pontok egy körön vannak, a szembelevő szögek 180 fokra egészítik ki egymást. Ezekből következik, hogy az $EFGH$ négyszög téglalap. A téglalapba legyen $EF = GH = a$ és $FG = HE = b$.

Mivel P az $ABCD$ oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja, így nagy kör O középpontja a téglalapon belül kell elhelyezkedjen. Továbbá, az $DHPG$ négyszögben H-nél és G-nál derékszög van, így $GPH\angle = 180° - HDG\angle$. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha az $ABCD$ körülírt körét D-ból felére kicsinyítjük, a kapott k_1 kör éppen átmegy P-n. (k_1 középpontját jelölje I_1.)

Hasonlóan, ha az $ABCD$ körülírt körét B-ból kicsinyítjük a felére, a kapott I_2 középpontú k_2 kör is átmegy P-n, hiszen $EPF\angle = 180° - FBE\angle$. A k_1 és k_2 körök sugara $R/2$.



Könnyen látható, hogy k_2 kör megkapható a k_1-nek HE vektorral való eltolásaként, így $I_1I_2 = b$. Jelöljük h-val az I_1 pont és a GH szakasz távolságát. Felhasználva, hogy P rajta van az I_1I_2 felezőmerőlegesén, kapjuk a következőket:

$$r^2 = HO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \tag{1}$$

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 = HI_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \tag{2}$$

$$d^2 = PO^2 = \left[r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] + h^2 \tag{3}$$

Innen már könnyen leolvasható a keresett összefüggés:

$$d^2 + r^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

(Csigi Máté megoldása)

2.6. Sötét fény

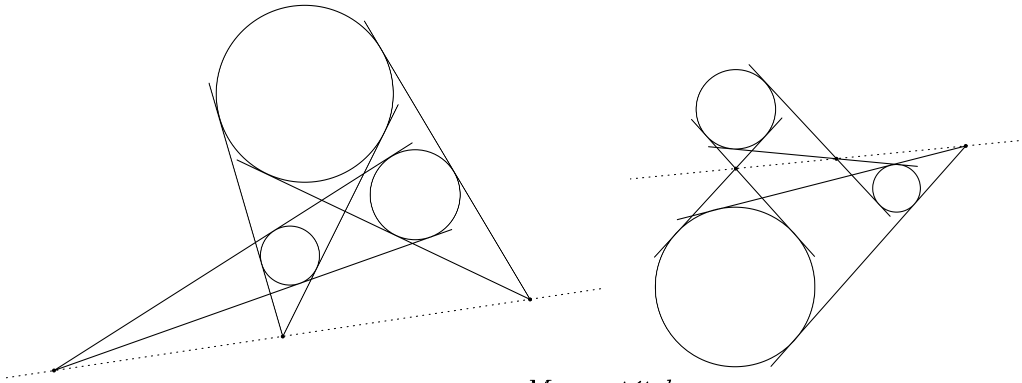
26. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder mind a négy lapjának a területe egyenlő, akkor a lapok egybevágóak. *(Badacsonyi András)*

Megoldás: Megtalálható a Sklarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből – Geometria II. (Sztereometria) c. kötetben.

16. A k_1 és k_2 egyenlő sugarú körök két pontban metszik egymást. Az ℓ egyenes a k_1 kört az A és C, k_2-t a B és D pontokban metszi úgy, hogy az egyenesen a pontok sorrendje A, B, C és D. A k_3 és k_4 körök mindketten érintik a következőket: az ℓ egyenest, k_1-et belülről, és k_2-t kívülről; továbbá ℓ különböző oldalain vannak. Tegyük fel, hogy k_3 érinti k_4-et. Bizonyítsuk be, hogy $AB = CD$. *(Fehér Zsombor)*

1. megoldás: Legyen E a k_1 és k_2 körök közös húrjának felezőpontja, K és L a k_3 és k_4 körök érintési pontja k_1-en, N és M pedig k_2-n. Legyen továbbá P, T az L, K pontok tükörképe E-re.

A körök egyenlő sugarúak, ezért E a hasonlósági pontjuk, így T és P rajta van k_2-n. Monge tételéből a k_1, k_2, k_3 körök K, N, E hasonlósági pontjai (2 belső, 1 külső) egy egyenesen vannak. Ugyanígy L, M, E is egy egyenesen van.

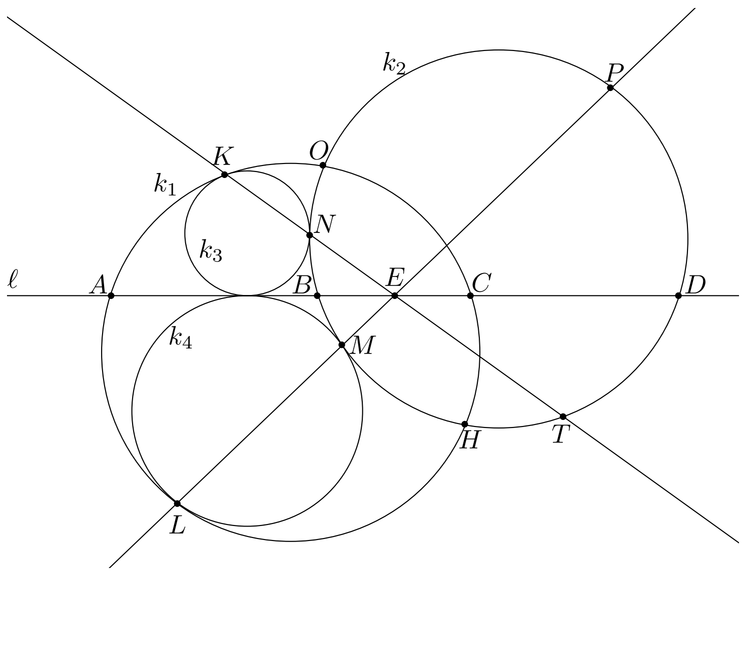


Monge tétele

Felhasználva az E-re való tükrözést, és az E pont k_2 körre való hatványát,

$$EL \cdot EM = EP \cdot EM = ET \cdot EN = EK \cdot EN.$$

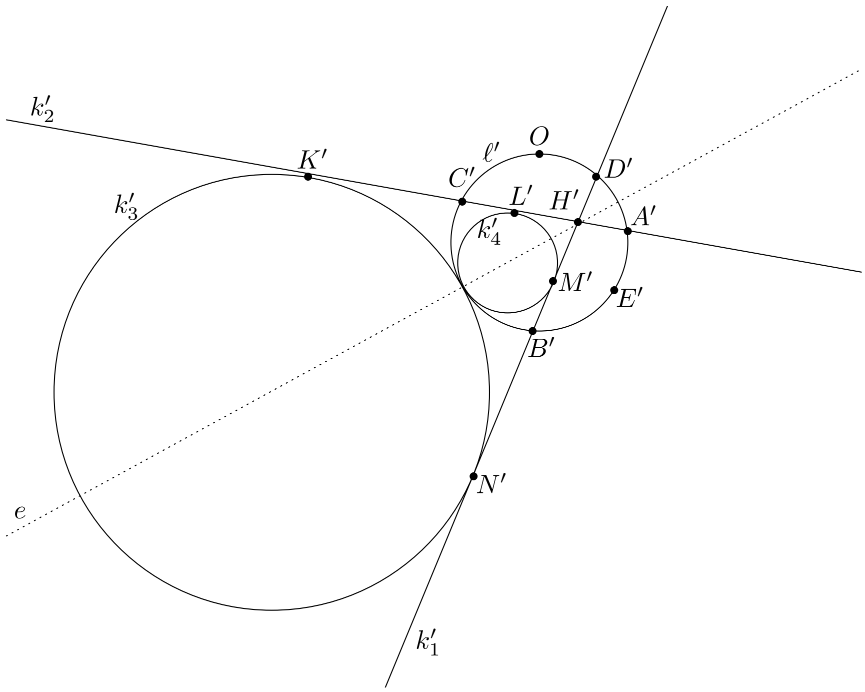
Tehát E hatványa a k_3 és k_2 körökre megegyezik. Így E rajta van az ℓ hatványvonalon. AB képe az E-re való tükrözésnél CD, ezért $AB = CD$.



2. megoldás: Legyen O és H a k_1 és k_2 körök két metszéspontja. Alkalmazzunk egy O középpontú inverziót. k_1 és k_2 képei egyenesek lesznek, k_3 és k_4 képei körök, ℓ képe O-n átmenő kör.

Az érintések megtartása miatt k_3' és k_4' érinti a k_1' és k_2' egyeneseket, így a körök középpontjai rajta vannak a két egyenes egyik szögfelezőjén, e-n. Az ℓ' kör érinti a k_3, k_4 köröket azok érintési pontjában, ezért ℓ' középpontja is rajta van e-n.

Mivel E az OH szakasz felezőpontja volt, ezért H' is felezőpontja OE'-nek. Mivel a k_1, k_2 körök egyenlő sugarúak, ezért O egyenlő távol van a k_1', k_2' egyenesektől. Így O rajta van a másik szögfelezőn, tehát OH' merőleges e-re. Az ábra tehát teljesen szimmetrikus e-re, így az ℓ' kör átmegy O tükörképén, E'-n is. Tehát az ℓ egyenes átmegy E-n, ahonnan $AB = CD$.



17. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, melyekre $abc = 1$, akkor

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}\,.$$

(Janzer Barnabás)

Megoldás:

$$\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(c+a)} = \frac{a^2c^2}{abc^2(a+b)}+\frac{b^2a^2}{a^2bc(b+c)}+\frac{c^2b^2}{abc^2(c+a)} = \frac{(ca)^2}{c(a+b)}+\frac{(ab)^2}{a(b+c)}+\frac{(bc)^2}{b(c+a)}$$

Titu-lemmával:

$$\frac{(ca)^2}{c(a+b)} + \frac{(ab)^2}{a(b+c)} + \frac{(bc)^2}{b(c+a)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}$$

A számtani és mértani közép közti összefüggés szerint

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2} = 1$$

ezzel a feladat állítását bizonyítottuk. Egyenlőség a számtani–mértani miatt csak $ab = bc = ca$, tehát $a = b = c = 1$ esetén lehetséges, és akkor tényleg egyenlőség van.

18. Van-e olyan pozitív valós számokból álló $x_1, x_2, \dots$ végtelen sorozat, amelyre $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén? *(Mócsy Miklós)*

Megoldás: Ha van a sorozatnak 1-nél nagyobb x_m eleme, akkor $x_m > x_{m+1}$ (hiszen a gyökéből vonunk ki egy számot); ezért $\sqrt{x_{m+1}} < \sqrt{x_m}$, vagyis x_{m+2} negatív lenne. Tehát a sorozatnak nincsen 1-nél nagyobb eleme.

Ha $x_m = 1$, akkor ha x_{m+1} a fentiek miatt legfeljebb 1; ha $x_{m+1} = 1$, akkor $x_{m+2} = 0$, x_{m+3} negatív; ha x_{m+1} 1-nél kisebb, akkor már x_{m+2} is negatív. Tehát a sorozat 1-nél kisebb nemnegatív számokból áll.

A sorozat szigorúan monoton nő, mivel máskülönben az egyik tag negatív lenne. Emiatt a gyökök különbsége is nő. Mivel a különbség nő, legkésőbb $\left[\frac{1}{2x_1}\right]$ lépés múlva a sorozatnak lesz 1-nél nagyobb eleme. Tehát nincs a feltételeknek eleget tevő végtelen sorozat.

2.7. Tökéletesített forma

19. Hívjuk az A-val jelölt, n-jegyű szám csonkjának azokat az $(n-1)$-jegyű számokat, amiket úgy kapunk, hogy az A-nak töröljük az egyik számjegyét. Például, az 2012 csonkjai a 212, a 202 és a 201; 0-val nem kezdődhet az $(n-1)$-jegyű csonk. Hány olyan 7-jegyű szám van, amely nem állítható elő egy szám és egy csonkjának összegeként? *(Csepregi-Horváth Zsófia)*

Megoldás: Az $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ és $B = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ csonkjának összege $11B + a_7$, ami előállít minden $11 \cdot 105$-nél nagyobb számot, ami nem 10-et ad 11-es maradékként.
Ugyanígy a $C = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$ és csonkja a $D = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ előállítja a kisebb, nem 10 maradékokat modulo 11.
Ha nem az utolsó számjegyet vesszük le, akkor a szám és csonkja ugyanarra a számjegyre végződik, azaz az összege páros. Így a $22p + 21$, $p \in \mathbb{N}$ semmiképp sem állítható elő. Megmutatjuk, hogy a $22p + 10$ viszont előáll ilyen formában ($n \in \{6, 7\}$): $\overline{a_1a_2 \dots a_{n-2}a_{n-1}a_n} + \overline{a_1a_2 \dots a_{n-2}a_n} = 110 \cdot \overline{a_1a_2...a_{n-2}} + 10a_{n-1} + 2a_n$ Valóban, ha $22p + 10$-et modulo 5 vizsgáljuk, $110k + 10$, $110k + (10 + 22) = 110k + 32$, $110k + 54$, $110k + 76$, $110k + 98$-at kapunk, ahol behelyettesíthetjük k helyébe $\overline{a_1a_2 \dots a_{n-2}} - t$ és $(a_{n-1}, a_n) \in \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)\}$ egyikét, tehát a $22p + 10$ alak is előáll. Vagyis összesen a $22p + 21$ alakú számok nem állnak elő, ahol $106 \leq 22p + 21 \leq 107?1$, azaz $45454 \leq p \leq 454544$, azaz 409091 darab nem előálló szám van.

20. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén létezik olyan n-jegyű szám, amely nem tartalmaz 0-t és osztható a számjegyei összegével. *(Csernák Tamás)*

1. megoldás: Legyen k pozitív egész. Készítsünk olyan számokat, amelyek számjegyeinek összege 2^k, és oszthatóak is vele. Egy szám 2^k-nal való oszthatóságát az utolsó k jegy határozza meg. Először csináljunk olyan 2^k-nal osztható k-jegyű számot, ami nem tartalmaz 0-t. Induljunk ki abból a számból, ami csak 1-eseket tartalmaz, és ebből k darabot. Ezután sorba 0-tól $(k-1)$-ig minden i-re érjük el, hogy a szám osztható legyen 2^{i+1}-nel a következő módon: ha a szám már osztható vele, akkor meghagyjuk, ha nem, akkor hozzáadunk 10^i-t, ezzel egy 1-est 2-esre cserélünk. Mivel a szám az előző lépés miatt osztható 2^i-nel, de 2^{i+1}-nel nem, és a 10^i is ilyen az összegük osztható lesz 2^{i+1}-nel. Így az utolsó lépés után kapott szám osztható lesz 2^k-nal. Nézzük meg, hogy egy adott k milyen n-re ad megoldást. Ha az utolsó k-jegyű rész előtt van 1-estől különböző jegy, azt kisebbekre bontva növelhető 1-gyel a jegyek száma, tehát egy adott k esetén a legkisebb és legnagyobb megfelelő n között mindegyik megfelel. A legnagyobb n akkor jön létre, ha minden jegy az utolsó kivételével 1-es. A legrosszabb esetben az utolsó k jegy összege $2k$ a konstrukció miatt. Ekkor még hozzárakhatunk $2^k - 2k$ jegyet, tehát az összes jegy száma felvihető $(2^k - k)$-ra. A legkisebb n akkor van, ha az utolsó k jegy kivételével mindegyik 9. Ekkor a legrosszabb esetben az utolsó k jegy összege k, így a jegyek száma $\frac{2^k-k}{9} + k$. Ahhoz, hogy minden n-re legyen megoldás azt kell bizonyítani, hogy

$$2^k - k \geq \frac{2^{k+1} - k - 1}{9} + k + 1.$$

Beszorozva és rendezve: $9 \cdot 2^k - 9k \geq 2^{k+1} + 8k + 8$, vagyis $7 \cdot 2^k \geq 17k + 8$. Ha k elég nagy, ez nyilván igaz, mert egy exponenciális függvény egy lineáris fölött van, sőt ez már $k = 4$-től kezdődően igaz. Van a feladatnak megoldása $k = 4$, $n = 6$ esetre: 912112. Mivel innen minden n-re van megoldás már csak az ennél kisebb eseteket kell megnézni. Ezekre pedig adjunk egy-egy megoldást külön-külön: 91312, 4112, 112, 12 és végül 1.

2. megoldás (vázlat): A végződések úgy is elkészíthetők, hogy az utolsó jegy 2-es, előtte pedig 1-es és 3-as jegyek vannak. Itt már eggyel hátrébb lévő számjeggyel lehet a megfelelő 2 hatvánnyal való oszthatóságot elérni.

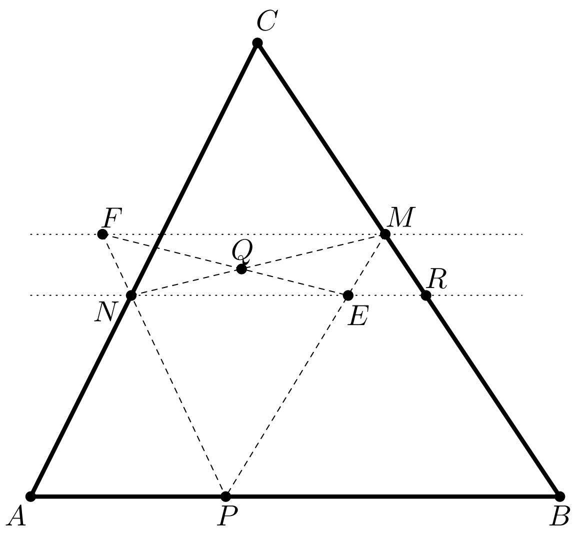
3. megoldás (vázlat): Csináljunk olyan számokat, amelyek számjegyeinek összege $9 \cdot 2^k$ és oszthatók is azzal. A 9-cel való oszthatóságot már a számjegyek összege adja, a végződést pedig az előzőhöz hasonló módszerrel adhatjuk meg. Itt kevesebb speciális esetet kell megnézni az elején.

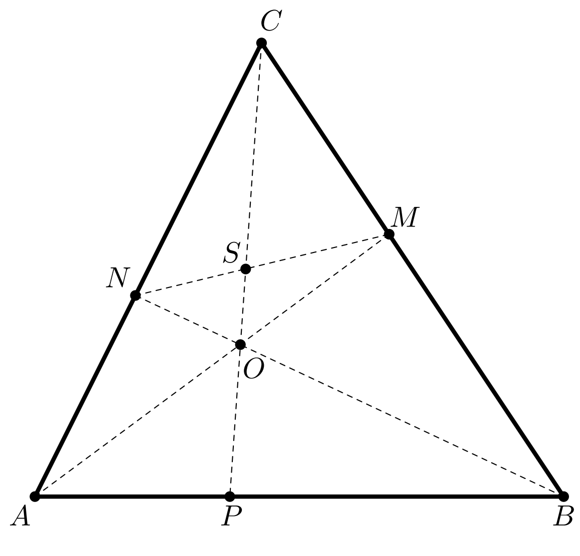
21. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és legyen M, N, P három pont a BC, CA, AB oldalakon, úgy, hogy AM, BN, CP egy pontban metszik egymást. Az AB-vel N-en keresztül húzott párhuzamos az MP-t az E pontban metszi, és ugyanígy az AB-vel M-en keresztül húzott párhuzamos az NP-t F-ben metszi. Mutassuk meg, hogy CP, MN, és EF egy pontban metszik egymást! *(Németh Gergely)*

1. megoldás: Abban az elfajuló esetben, amikor $MN \parallel AB$, $M \equiv E$ és $N \equiv F$, tehát a feladat állítása triviálisan teljesül.

Ha MN és AB nem párhuzamosak, akkor az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy N távolabb van AB egyenestől, mint N. Ekkor $(N \in (PF)$ és ha R jelöli az NE és a BC metszéspontját, akkor $E \in (NR)$.

Legyen O az AM, BN, és CP metszéspontja, Q az MN és az EF metszéspontja, és S a CP és az MN metszéspontja. Azt kell bizonyítanunk, hogy $Q \equiv S$.





Használva a Menelaosz-tételt a BMN háromszöget metsző OSC egyenesre, és az ABN háromszöget metsző POC egyenesre, valamint a Ceva-tételt az ABC háromszögre, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

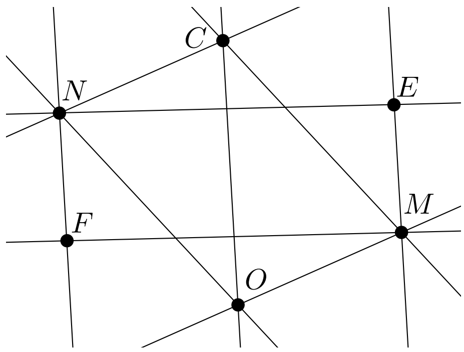
$$\left.\begin{array}{l}\frac{SN}{SM}\cdot\frac{OB}{ON}\cdot\frac{CM}{CB}=1\\ \frac{ON}{OB}\cdot\frac{CA}{CN}\cdot\frac{PB}{PA}=1\\ \frac{PA}{PB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}=1\end{array}\right\}\xrightarrow{(\cdot)}\frac{SN}{SM}\cdot\frac{MB}{CB}\cdot\frac{CA}{AN}=1\text{ azaz }\frac{SN}{SM}=\frac{BC}{BM}\cdot\frac{AN}{AC}.$$

A NEQ és a MFQ háromszögek hasonlóságából, és szintén, a PEN és a PMF hasonlóságából, valamint a PBM és az ERM, és az ABC az NRC és a C, M, és a megfelelő pont általi háromszögekből:

$$\frac{QN}{QM}=\frac{NE}{MF}=\frac{PE}{PM}=\frac{BR}{BM}=\frac{BR}{BC}\cdot\frac{BC}{BM}=\frac{AN}{AC}\cdot\frac{BC}{BM}=\frac{SN}{SM}$$

Mivel Q és S mindketten rajta vannak az MN egyenesen, következésképpen $Q\equiv S$ és ezzel bizonyítottuk az állítást.

2. megoldás: Projektív leképezést hajtunk végre, úgy, hogy az AB egyenes legyen az ideális egyenes. Ekkor $NE\parallel MF$ és $CN\parallel MO$, valamint $NF\parallel CO\parallel EM$, vagyis $CNOM$ és $NFME$ paralelogrammák, és az egyik átlójuk, NM egybe esik. Azt kell belátni, hogy a három különböző átló egy pontban metszi egymást, viszont, egy paralelogrammában egy átló meghatározza az átlók metszéspontját, mivel a paralelogramma átlói felezik egymást. Vagyis NM felezőpontján megy át CO is és FE is. Mivel a projekció érintkezéstartó, az állítást bizonyítottuk.



(Kalló Kristóf és Machó Bónis megoldása)

2.8. XKCD csapat

22. Fel lehet-e bontani egy $\sqrt{2}\times 1$-es téglalapot véges sok négyzetre? *(Ágoston Péter)*

Megoldás: Könnyen belátható, hogy egy jó felbontásban a négyzetek oldalainak párhuzamosnak kell lennie a téglalap oldalaival: vegyünk egy olyan négyzetet, amely legalább egy közös szakaszban érintkezik a téglalap szélével. Ilyen van, hiszen a téglalap véges sok oldalszakaszból áll, és ezek mindegyike csak egy pontban (egy csúcsban) érintkezhetne egy tetszőleges négyzettel, de mivel végtelen sok pontja van minden oldalnak, még így is végtelen sok pontja maradna. Tehát ezt a négyzetet elhagyhatjuk a téglalapból, de a fenti állítások az elhagyással keletkezett sokszögre is igazak (azzal a különbséggel, hogy később a négyzet egy csúcsán kívül a sokszög egy csúcsa is lehetséges érintési pont lesz), tehát ebben is van egy oldalakkal párhuzamos négyzet, amit elhagyhatunk, stb. És mivel véges sok négyzetre bontottuk fel a négyzetet, beláttuk, hogy ezek mindegyike oldalpárhuzamos.

Vegyünk fel a valós számok halmazában mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortérben egy olyan bázist, amelyik tartalmazza az 1-et és a $\sqrt{2}$-t! Ilyen létezik, mert az 1 és a $\sqrt{2}$ a $\mathbb{Q}$ fölött függetlenek. f legyen egy olyan $\mathbb{Q}$ fölött lineáris függvény, amely az 1-ben 1-et, az említett bázis többi elemében pedig 0-t vesz fel! Ekkor definiáljuk úgy egy vízszintes és függőleges oldalakkal rendelkező téglalap területét, amelynek vízszintes oldala a hosszú, míg a függőleges b, hogy az új terület $a \cdot f(b)$. Ha egy téglalap téglalapok közös belső pont nélküli uniója, akkor a téglalap most definiált területe a kis területek összege: teljes oldalas érintkezésnél ez következik az f linearitásából, akár a függőleges, akár a vízszintes oldallal érintkeznek a kis téglalapok, így ha berácsozunk egy téglalapot téglalapokra, arra is működik. Ha viszont nem így bontjuk fel a téglalapot, akkor is könnyen tovább bontható olyan módon, hogy minden téglalap vízszintes és függőleges oldalegyenesét is behúzzuk.

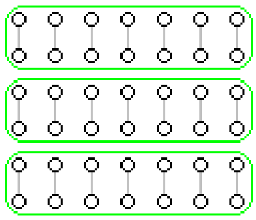
Azonban ha egy $\sqrt{2} \times 1$-es téglalapot fel tudnánk bontani véges sok négyzetre, akkor egy $90°$-os elforgatással képzett $1 \times \sqrt{2}$-es téglalapot is fel tudnánk bontani ugyanilyen négyzetekre. Azonban míg a négyzetek területe az elforgatástól nem változik, a téglalapok közül az előbbié $\sqrt{2}$, míg az utóbbié 0, tehát ellentmondásra jutottunk, vagyis nem lehet felbontani a téglalapot.

23. Ketten játszanak egy $n \times m$-es pontrácson. A kezdő játékos behúz egy egyenes vonalat két szomszédos (nem átlós) pont közé. Ezután felváltva lépnek és mindketten behúzhatnak egy vonalat két olyan szomszédos pont közé, melyek közül az egyikből egy vonal indul ki, a másikból egy sem, más szóval folytatniuk kell a kígyót, ami nem metszheti önmagát. Amelyik játékos nem tud lépni, veszít. Állapítsuk meg, hogy n és m függvényében melyik játékosnak van nyerő stratégiája! *(Kalló Kristóf; Glen Vecchione Játékos fejtörők c. könyvéből)*

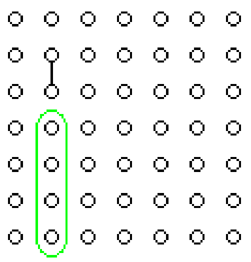
1. megoldás: Az világos, hogy az első lépés két pontot foglal el, és innen kezdve minden lépés további egyet. Kezdő lépései után tehát páros sok pont lesz lefedve, míg Második lépései után páratlan sok. Tehát minden olyan játék esetén, ahol a kígyó az összes pontot lefedi, ha páros sok pont van (vagyis n és m közül legalább az egyik páros), Kezdő nyer, egyébként Második.

Most megmutatjuk, hogy ezekben az esetekben valóban az említett játékosoknak van nyerőstratégiája, vagyis mindig páros sok pont fog kimaradni. Ehhez párosítsuk a pontokat úgy, hogy minden párban két szomszédos pont legyen, és minden pont pontosan egy párba tartozzon. Világos, hogyha sikerült létrehozni egy ilyen párosítást, akkor a soron következő játékos fog veszíteni, hiszen ha behúz egy vonalat, a másik játékos ki tudja választani annak a pontnak a párját, ahova lépett. Minden szabad pont párosítva lett, tehát a soron következő biztosan egy olyan pontra lép, amelynek van párja. A másik játékos pedig biztosan ki tudja egészíteni a kígyót, hiszen minden pontnak pontosan egy párja van.

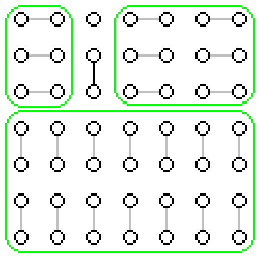
Ha $2|n \cdot m$, akkor egyszerűen készíthetünk párosítást. Tegyük fel, hogy n páros, majd az n sort osszuk fel kettesével, így $\frac{n}{2}$ db $2 \times m$-es téglalapot kapunk. Ezekben az elemekben párosítsuk oszloponként a pontokat (*1. ábra*). Ezt megtehetjük, hiszen minden oszlopban két pont van. Kezdő egy pontpár közé húz be egy vonalat, és így egy olyan játékállásba jutottunk, amiről már megállapítottuk, hogy benne a soron következő játékos, vagyis Második veszít, ez esetben tehát tényleg Kezdőnek van nyerő stratégiája.


1. ábra

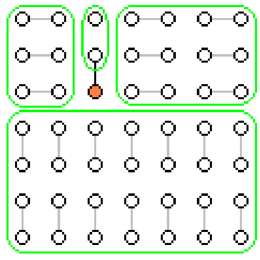
Ha $n \cdot m$ páratlan, vizsgáljuk meg az első lépést. Tegyük fel, hogy ez függőlegesen áll (ha vízszintes, forgassuk el a rácsot $90°$-kal). Így az oszlopából két pontot foglalt el, vagyis páratlan sok maradt, ami azt jelenti, hogy fölötte vagy alatta páros sok sor van (*2. ábra, zöld jelölés*). Feltehetjük, hogy a páros sok sor lent van (ha nem, forgassunk $180°$-kal). Ezt a lenti részt már párosíthatjuk (mint *1. ábra*). A kezdő lépés vízszintesen viszont csak egy pontot foglal el, tehát a szabad oszlopok így páros sokan lesznek. Tehát vagy tőle jobbra és balra egyaránt páros sok, vagy mindkét oldalt egyaránt páratlan sok oszlop található.



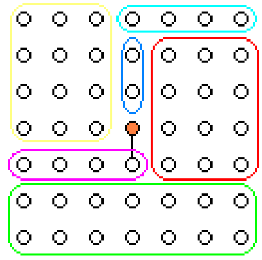
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Az első esetben párosíthatjuk mindkét oldalt (*3. ábra*), és marad egy egy széles és páratlan hosszú párosítatlan rész, aminek egyik végén van a megkezdett kígyó. Ezen a végen az utolsó pontot nem fogjuk párosítani, a többit viszont igen (*4. ábra*). Második tehát a párosított ponttól fogja folytatni a kígyót, behúzva annak párját, és elérkeztünk a fenti játékállásba, ahonnan a soron következő játékos, vagyis Kezdő veszít.

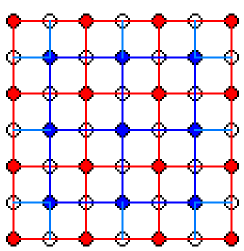
A második esetben a párosítatlan pont a fentebb lévő lesz (*5. ábra, narancs pont*). A lentebb lévőt belefoglaljuk a sorának a tőle balra lévő részébe, ami így már páros széles lesz, tehát párosítható (*rózsaszín*). Az ettől feljebb lévő rész immár páros magas, tehát szintén párosítható (*sárga*). A legfelső sor kimaradó része szintén páros széles, az is párosítható (*türkiz*). Az alatta lévő, a kígyó feletti kimaradt rész páros magas, vagyis párosítható (*kék*) és végül a kígyótól jobbra lévő kimaradó rész is páros magas, tehát párosítható (*piros*). Második ez esetben a rózsaszín pályarészben húzza be a következő vonalat, és így szintén elértünk abba a helyzetbe, ahol Kezdő veszít.

Sok különféle működőképes párosítás létezhet mindkét esetben, ezzel csak azt mutattuk meg, hogy bármilyen pozitív n és m esetén létezik egy, és ezzel beláttuk a kezdeti feltevésünket, miszerint $n \cdot m$ páros volta esetén Kezdő, egyébként Második nyer.

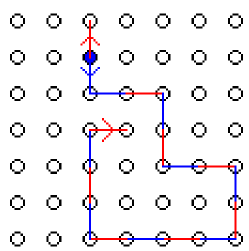
2. megoldás: Nézzünk most egy az előzőtől teljesen különböző megközelítést. Az alapelv az, hogy a játékos, akinek nyerőstratégiája van, mindig utánozza a másikat, és így mindig tud még hova lépni.

Páros sok pont esetén Kezdőnek be kell húznia egyet azon élek közül, amelyek a páros oldalon a két középső pont között futnak. Ezután ennek a kezdő élnek a felezőmerőlegesére kell tükröznie Második lépéseit, és biztosan nyer, hiszen ha Második elakad valamelyik véggel, biztos, hogy Kezdő is elakad a másikkal. Második át sem vezetheti a kígyót ezen a felezőmerőlegesen, mert az ő lépése előtt a kígyó szimmetrikus, tehát ha az egyik vége a felezőmerőleges mellett van, akkor a másiknak is ott kell lennie a túloldalon.

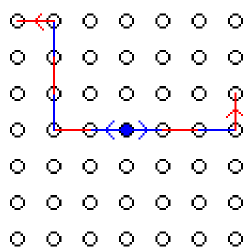
Páratlan sok pont esetén valamivel bonyolultabb a helyzet, úgyhogy kezdjünk egy segédábrával (*6. ábra*). Mivel n és m páratlan, egy oldalon a rácspontok között páros sok él fut, s ezért megtehetjük a következőt. Definiáljunk egy 2×2-es rácsot (az ábrán *piros*), aminek csúcsai között szerepelnek a rács sarkai. Ezen rács négyzeteinek középpontjai meghatároznak egy másik 2×2-es rácsot (*kék*), ami az oldalaknál csak fél élt tartalmaz (lásd az ábrát). Ez a két rács éldiszjunkt, és lefedi az eredeti rács összes élét.



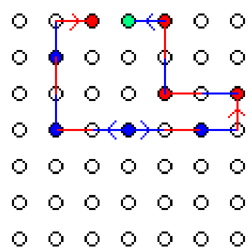
6. ábra



7. ábra



8. ábra



9. ábra

Ha Kezdő egy piros élet húz be, akkor Második kiegészíti a piros rács azon élét. Hogyha ezt nem tudja megcsinálni, mert az a piros csúcs már foglalt, amihez húznia kellene a vonalat, befordul egy kék ponthoz, mégpedig abba az irányba, amelyikbe zárt a kígyóvonal. Ezt biztosan meg tudja csinálni, hiszen a kígyó összefüggő, tehát pontosan az egyik irányba körbement (*7. ábra*). Innen kezdve a kék csúcsokon fogja ugyanezt csinálni, és csak ugyanilyen esetben akadhat el, hiszen az a keret, amibe befordult, nem tartalmazhatott kék csúcsokat.

Ugyanígy léphet, ha Kezdő az elején kék élt húzott be, kivéve, ha az a pálya szélén van (*világoskék*kel jelölve a *6. ábrán*). Innen a kereten lévő piros csúcsok valamelyikébe kell élt húznia. Ebben az esetben is két irányba mehet tovább és mindegy merre, kivéve, ha már van egy ilyen típusú él behúzva. Ekkor a kígyó két részre bontja a pályát, az első ilyen élnél az egyik részbe vezette tovább Második a kígyót, a második ilyen élnél a másik térrészbe kell továbbvezetnie (*8. ábra*). Ha Második jól játszik, biztos, hogy a kígyó nem megy át kettőnél több világoskék élen, hiszen csak Kezdő húzhatja be, és csak ha kék csúcsból indult, valamint mert a kígyónak csak két vége van. Kék csúcsból indul az előző bekezdésben tárgyalt esetben is, ám ekkor a kígyónak az a vége már be van zárva. Azért van szükség arra, hogy másodszor a másik térrészbe induljon tovább, mert különben keletkezne egy olyan piros pont, amelyben elakadhatna a másik vég (*9. ábra, zöld pont*).

Megjegyzés: Vecchione könyvében kihangsúlyozza azt a körülményt, hogy a játékosok a kígyónak csak az egyik végét folytathatják (Második még eldöntheti, hogy merre kezdi el). Könnyen látható, hogy evvel a pontosítással csak az 1. megoldás állna továbbra is helyt.

24. Tekintsünk két koncentrikus kört és n darab, a közös középpontjukból kiinduló félegyenest, ezek $2n$ darab véges területrészt (továbbiakban: mezőt) határoznak meg. Az így létrejött mezőkre elhelyezünk összesen $4n+1$ békát. Amennyiben legalább három béka van egy mezőn, akkor a három szomszédos mezőre átugrik egy-egy béka, egyébként helyben maradnak. Bizonyítsuk be, hogy idővel minden mezőre igaz lesz, hogy van rajta béka vagy minden szomszédján van béka. *(Nagy Bence Kristóf)*

Megoldás: Megoldás: nevezzük *jó*nak azokat a mezőket, amelyekre teljesül ez a feltétel. Amennyiben egy mezőre épp abban a pillanatban ugrott egy béka, *jó* lesz, hiszen van rajta. Amennyiben leugrik róla 3, akkor is jó lesz, hisz minden szomszédján lesz béka, egészen jó is marad, amíg az egyik szomszédjáról le nem ugrik, amikor is viszont az előző feltétel miatt lesz jó. Tehát bizonyítandó: minden mezőre ugrik béka idővel.

Nevezzük *rész*nek a két szomszédos félegyenes közötti két mező unióját. Ha valamely részbe ugrik be legalább 3 béka, akkor vagy a külső és a belső mezőbe is ugrott be legalább egy béka, vagy csak az egyikbe, akkor viszont később onnét ugrik béka a három szomszédjába, így a másikba is. Tehát azt is elég bizonyítani, hogy minden *rész*be ugrik be minimum 3 béka.

Tegyük fel, hogy ez nem így van. Ekkor van egy olyan rész és egy olyan állapot, hogy ebbe a részbe többé már nem ugrik béka. Mivel a békák száma véges, olyan állapot is van, hogy ebből a részből már kifele sem ugrik béka.

Tegyük ezt meg kezdőállapotnak, és tekintsük a nem mozgó részt, majd haladjunk pozitív irányba. Ha tehát valahova nem ugrik béka, akkor a pozitív irányú szomszédjából sosem ugrik ki béka, azaz nem lehet benne $2 \cdot 2 = 4$-nél több béka sosem, azaz legfeljebb 4-szer ugranak bele. Az eredeti részből nincs kimozgás, tehát ez csak ennek a pozitív irányú szomszédjából történhet. Akárhány kimozgás van onnét, ez véges sok béka kiugrásával jár, emellett legfeljebb $2 \cdot 2$ lehetett benne, azaz legfeljebb ennyi – ugyan nagyobb, de – véges sok befele történő mozgás volt. Hasonlóan továbbhaladva arra jutunk, hogy mindenhol legfeljebb véges sok mozgás volt, azaz idővel vége szakadt a folyamatnak, de az nem lehetséges a skatulyaelv alapján: összesen $2n$ mező van és $4n+1$ béka, azaz mindig van olyan mező, ahol legalább 3 béka van, a folyamat sosem állhat le.

2. megoldás: Csak a megoldás záró része különbözik az első megoldástól. Számozzuk meg 1-gyel azt a *rész*t, ahova nem ugrik béka, 2-vel valamelyik irányú szomszédját, 3-mal annak szomszédját, stb., majd tekintsük a békák tartózkodási helyeinek sorszámának négyzetösszegét. Ez minden ugráskor nőni fog, mivel 1-be nem ugrik béka, de maximalizálva van (ha n értéken van mind), azaz megint oda jutottunk, hogy a folyamatnak le kell állnia véges sok lépésben, de ez lehetetlen.