A VEKTOROK FELHASZNÁLÁSA A KÚPSZELETEK TANÍTÁSÁBAN

Kőváry Károly

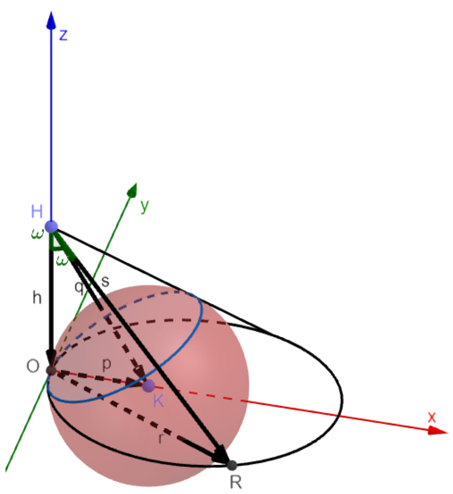
Az új tanterv előírja a vektorok bevezetését a geometriában. Ezek jól felhasználhatók többek között a pont és egyenes koordinátás tárgyalásában (bár igazi előnyüket itt is főleg térgeometriai kérdéseknél látjuk), viszont a kúpszeletek tárgyalásánál – amennyire az irodalmat ismerem – mindenütt visszatérnek a hagyományos tárgyalásmódhoz. Ezt nemkívánatos kettősségnek érezve próbáltam a kúpszeletek vektorokra épülő felépítését keresni. Ennek az eredményéről számolok be az alábbiakban.

A felépítés a kúp síkmetszeteinek adja meg a vektoregyenletét csúcsponti helyzetben, ennek átalakításával határozza meg a középpontot (ha létezik), a fókuszokat, illetőleg a fókuszt; elvezet a vezéregyenesekkel és a vezérsugarakkal való jellemzéshez, a konjugált átmérőkhöz és az érintőkhöz. Egyszerű út adódik annak megállapítására is, hogy az általános kétismeretlenes másodfokú egyenlet milyen vonal egyenlete.

A tárgyalás használhatóságának bemutatására több, a középiskolai tananyagon túlmenő kérdéssel is foglalkozom, amint a felsorolás is mutatja. Igen világosan jelentkezik a vektorok kettős előnye: hogy szemléletes jelentésük mellett algebrai számítások végezhetők velük. Ennek köszönhető pl., hogy elkerülhető a különböző görbék jellegének a szokásos felépítésben mindenképpen kényelmetlen diszkussziója.

A kúpszeleteket mint egy félgömb síkra vetett árnyékát, pontosabban mint egy pontból a félgömbhöz húzott érintő egyenesek síkkal való metszéspontjainak halmazát (mértani helyét) fogjuk származtatni.

Az x, y, z tengely irányába mutató egységvektorokat jelöljük $\boldsymbol{i}$-,$\boldsymbol{j}$-,$\boldsymbol{k}$-val, az ezek irányába mutató komponensekre bontott $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ vektort rövidebben $[a_x;\, a_y;\, a_z]$-vel, síkbeli vektorok esetén $(a_x;\, a_y)$-nal. Tehát $(a_x;\, a_y) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$. A vektoralgebrából a skaláris szorzat fogalmára és tulajdonságaira lesz szükségünk. Ezek ismereteit feltételezzük. (Bővebben a matematikai osztályok részére kiadott jegyzetekben is található anyag.)



1. ábra

Helyezzünk el a térbeli koordinátarendszer xy síkjára egy félgömböt úgy, hogy az yz síkot az origóban érintse (1. ábra). A z tengely egy pontjából húzzunk érintőket a félgömbhöz, ezeknek az xy síkkal való metszéspontjait vizsgáljuk. Jelöljük a félgömb középpontját K-val, a z tengely kiszemelt pontját H-val, legyen továbbá $\overrightarrow{OK} = \boldsymbol{p}$, hossza $(\boldsymbol{p}) = p$; $\overrightarrow{HO} = \boldsymbol{h}$, hossza: $(\boldsymbol{h}) = h$; $\overrightarrow{HK} = \boldsymbol{q}$.

Egy H-ból húzott érintő messe az xy síkot az R pontban. Legyen $\overrightarrow{HR} = \boldsymbol{s}$, $\overrightarrow{OR} = \boldsymbol{r}$.

Világos, hogy a különböző $\boldsymbol{s}$ vektorok egy kúppalástot írnak le, melynek a tengelye a $\boldsymbol{q}$ vektor. Ezt a kúppalástot – kúpot – metszi az xy sík, és így valamilyen "kúpszeletet" kapunk. (Ha $h < p$, akkor egyes érintőknek a H-n túli meghosszabbítása metszi az xy síkot; így a teljes görbe – a hiperbola két ága – a H-n átmenő teljes egyenesek alkotta kettős kúp metszeteként jön létre). A kúp fél nyílásszöge $\omega = (h, q)\sphericalangle = (q, s)\sphericalangle$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

Nevezzük a $\frac{p}{h}$ hányadost numerikus excentricitásnak, és jelöljük ϵ-nal. Rendeljünk ϵ-hoz egy $\boldsymbol{\epsilon}$ vektort, melynek iránya egyezzék $\boldsymbol{p}$ vektor irányával, így az x tengely irányával, nagysága pedig legyen ϵ. Azaz

$$(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{h}\boldsymbol{p}.$$

ϵ értékei,

ha $(\boldsymbol{h}) > (\boldsymbol{p})$, akkor $0 < \epsilon < 1$,
ha $(\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{p})$, akkor $\epsilon = 1$,
ha $(\boldsymbol{h}) < (\boldsymbol{p})$, akkor $1 < \epsilon$,

vagyis
$0 < \epsilon < 1$, ha a H pont a z tengelyen a sugártávolságnál távolabb,
$\epsilon = 1$, ha a H pont a z tengelyen sugártávolságra,
$\epsilon > 1$, ha a H pont a z tengelyen a sugártávolságnál közelebb van.
Ha a H pont a z tengelyen távolodik az origótól, értéke egyre csökken. Mondjuk azt, hogy ha H a végtelenbe távolodott, $\epsilon = 0$.

A KÚPSZELETEK CSÚCSPONTI EGYENLETE

Az $\boldsymbol{r}$ vektort akarjuk kapcsolatba hozni ismert vektorokkal. Ehhez a nyílásszöggel kapcsolatban felírt egyenlőséget használhatjuk fel, tekintetbe véve, hogy $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}$, továbbá $\boldsymbol{h}$ merőleges $\boldsymbol{r}$-re és $\boldsymbol{p}$-re, így $\boldsymbol{hr} = \boldsymbol{hp} = 0$

$$\cos\omega = \frac{\boldsymbol{qs}}{|\boldsymbol{q}|\,|\boldsymbol{s}|} = \frac{\boldsymbol{qh}}{|\boldsymbol{q}|\,|\boldsymbol{h}|}.$$

Innen egyszerűsítve és a felírt összefüggéseket felhasználva

$$\frac{(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{p})(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{r})}{\sqrt{\boldsymbol{s}^2}} = \frac{\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{pr}}{\sqrt{\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{r}^2}} = \frac{(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{p})\boldsymbol{h}}{(\boldsymbol{h})} = \frac{\boldsymbol{h}^2}{(\boldsymbol{h})} = h$$

$$\frac{\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{pr}}{\sqrt{\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{r}^2}} = h.$$

Mint a jobb oldal mutatja (ω hegyesszög voltából is látható), pozitív szám áll a két oldalon, tehát az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a két oldal négyzete egyenlő. A keletkező egyenlőséget a következő alakra hozhatjuk:

$$\boldsymbol{r}^2 = \frac{(\boldsymbol{pr})^2}{h^2} + 2\boldsymbol{pr} = \left(\frac{1}{h}\boldsymbol{pr}\right)^2 + 2\boldsymbol{pr}.$$

Itt felhasználva a már bevezetett $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon; 0)$ vektort, egyenletünk

$$\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{\epsilon r})^2 + 2\boldsymbol{pr} \tag{1}$$

alakban írható, vagy skalár alakban írva, ha $\boldsymbol{r} = (x; y)$, mivel ekkor

$$\boldsymbol{\epsilon r} = [(\epsilon; 0)(x; y)] = \epsilon x, \quad \boldsymbol{pr} = [(p; 0)(x; y)] = px,$$

tehát

$$y^2 = (\epsilon - 1)x^2 + 2px.$$

Ebből ϵ nagysága szerint kapjuk a különböző kúpszeletek egyenletét. Ha $h > p$, tehát $0 < \epsilon < 1$, akkor ellipszissel van dolgunk; ha $h = p$, tehát $\epsilon = 1$, akkor a parabola ismert

$$y^2 = 2px$$

csúcsponti egyenletét kaptuk; ha pedig $h < p$, $\epsilon > 1$, akkor a hiperbola egyenletéhez jutunk.

Ha a H pont minden határon túl távolodik az xy síktól, akkor egyrészt ϵ minden határon túl csökken, a görbe pedig pedig a félgömb kontúrjára húzódik össze. Ezzel teljes összhangban $\epsilon = 0$-ra a kör (korábban már felmerült)

$$x^2 + y^2 = 2px$$

egyenletét nyerjük. A nyert egyenletet mindegyik görbe esetében csúcsponti egyenletnek nevezzük.

KÚPSZELETEK KÖZÉPPONTI EGYENLETE

A csúcsponti egyenlet mutatja a görbék x tengelyre vonatkozó szimmetriáját. Minden $(x; y)$ vektorral az $(x, -y)$ vektor is kielégíti. Kérdés az, hogy nem mutatható-e ki valamilyen pontra vonatkozólag középpontos szimmetria?

Nyilvánvaló, hogyha van egyáltalán ilyen D pont – helyvektora $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{d}$ –, akkor ennek a már felismert szimmetriatengelyen kell lennie, tehát az x tengelyen, azaz $\boldsymbol{d} = (d; 0)$.

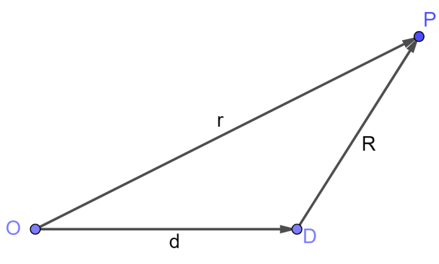
Vigyük a koordináta-rendszer kezdőpontját – a tengelyszimmetriát megtartva – D-be. Az erre a pontra vonatkozó $\boldsymbol{R}$ helyvektor összefüggése $\boldsymbol{r}$-rel

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{R}.$$

Ezzel a helyettesítéssel (1) így alakítható át:

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{\epsilon R})^2 + 2\boldsymbol{R}[\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{d\epsilon}) + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{d}] + [(\boldsymbol{\epsilon d})\boldsymbol{\epsilon} + 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{d}]\boldsymbol{d}. \tag{2}$$

D akkor szimmetriacentrum, ha az egyenletet $\boldsymbol{R}$-rel együtt $-\boldsymbol{R}$ is kielégíti. Esetünkben ez akkor teljesül, ha



2. ábra

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{d\epsilon}) + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{d} = 0. \tag{3}$$

Ebből $\boldsymbol{d}$, azaz D helyzete meghatározható. Egyenletünkben ϵ, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{d}$ egyirányú (x irányú) vektorok, így az egyenlet skalár alakja

$$d\epsilon^2 + p - d = 0, \quad \text{vagyis ha} \quad \epsilon \neq 1$$

$$d = \frac{p}{1-\epsilon^2}.$$

Azaz a $D\left(\frac{p}{1-\epsilon^2}; 0\right)$ pontban lesz a kúpszelet középpontja. Ez a csúcstól d távolságra van. Ha $\epsilon = 1$, d nem létezik, azaz a parabolának nincs középpontja. A kör középpontja $\epsilon = 0$ mellett $d = p$.

Az új koordináta-rendszerre vonatkozó egyenlet megállapításához átalakítjuk (2) utolsó tagját. A (3) figyelembevételével itt az első tényező $\boldsymbol{p}$, a szorzat

$$\boldsymbol{pd} = \frac{p^2}{1-\epsilon^2}.$$

A középponti egyenlet tehát vektori formában

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{\epsilon R})^2 + \frac{p^2}{1-\epsilon^2}. \tag{4}$$

Skalár alakban pedig – most a D középpontú koordináta-rendszerre vonatkozó koordinátákat jelölve $(x; y)$-nal –:

$$x^2(1-\epsilon^2) + y^2 = \frac{p^2}{1-\epsilon^2},$$

illetve

$$\frac{x^2}{\left(\frac{p}{1-\epsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-\epsilon^2}} = 1$$

Itt y^2 osztója $0 < \epsilon < 1$ esetén, azaz ellipszisnél pozitív, $\epsilon > 1$-re hiperbolánál negatív. Jelöljük első esetben b^2-tel, második esetben $-b^2$-tel, $(d)^2$-et pedig, ami x^2 osztója a^2-tel, akkor megkapjuk a kúpszeletek középponti egyenletét szokásos alakjában.

Jegyezzük meg, hogy kör esetében $\epsilon = 0$ miatt $b^2 = a^2 = p^2$, és így középponti egyenlete

$$x^2 + y^2 = p^2$$

skalár, illetve

$$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{p}^2$$

vektor alakban adódik.

a, b és p között a következő összefüggés áll fenn:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{vagy} \quad b^2 = ap,$$

azaz a kúpszeletekhez hozzárendelt félgömb sugara meghatározható a és b értékéből. $b^2 = ap$ összefüggés pedig az ismert középtételt mutatja.

(4)-ből látszik, hogy ha $\boldsymbol{R} \perp \epsilon$, akkor ellipszis esetén $\boldsymbol{R}^2 = b^2$, azaz az y tengelyt $\pm b$ távolságban metszi az ellipszis. Ezért $2b$ az ellipszis kistengelye. Hiperbola esetén $R^2 = -b^2$ nem állhat fenn, azaz az y tengelyt nem metszi a görbe; $2b$ neve ebben az esetben melléktengely.

A középponti szimmetria miatt pedig világos, hogy a görbe D-től jobbra és balra "a" távolságra metszi az x tengelyt. Szokás ezért $2a$-t ellipszis esetében *nagy-*, hiperbola esetében pedig *fő*tengelynek is nevezni.

FOKÁLIS TULAJDONSÁG. VEZÉREGYENES

Induljunk ki újra az (1) egyenletből, és kíséreljük meg most az origót olyan F pontba eltolni az x tengely irányában, hogy a transzformált egyenlet jobb oldalán teljes négyzet álljon. Mivel az x tengely iránya $\boldsymbol{\epsilon}$ irányával egyezik, legyen az eltolás $k\boldsymbol{\epsilon}$, ahol "k" egy alkalmasan választott konstans. Tehát $\overrightarrow{OF} = k\boldsymbol{\epsilon}$.

A koordinátavektorok közötti összefüggés most

$$\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{R}.$$

Egyenletünkbe behelyettesítve:

$$(\boldsymbol{R} + k\boldsymbol{\epsilon})^2 = [\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{R} + k\boldsymbol{\epsilon})]^2 + 2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{R} + k\boldsymbol{\epsilon}).$$

Ezt átalakíthatjuk a következő alakra, ha figyelembe vesszük, hogy $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{\epsilon}$ ugyanolyan irányúak, ezért

$$\boldsymbol{p} = \frac{p}{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}$$

írható:

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{R})^2 + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{\epsilon}\left(-k + \frac{p}{\epsilon} + k\epsilon^2\right) + (k^2\epsilon^4 + 2k\boldsymbol{p}\boldsymbol{\epsilon} - k^2\epsilon^2).$$

Egyenletünk jobb oldala teljes négyzet, ha fennáll, hogy

$$\left(-k + \frac{p}{\epsilon} + k\epsilon^2\right)^2 = k^2\epsilon^2(\epsilon^2 - 1) + 2k\boldsymbol{p}\boldsymbol{\epsilon}.$$

Ez másodfokú egyenlet k-ra, aminek a gyökei:

$$k_{1,2} = \frac{p(1 \pm \epsilon)}{\epsilon(1 - \epsilon^2)}.$$

Azaz kétféle eltolás is lehetséges. $(k\epsilon)$ értéke lehet

$$\frac{p}{1-\epsilon^2}(1+\epsilon) = \frac{p}{1-\epsilon} \quad \text{vagy} \quad \frac{p}{1-\epsilon^2}(1-\epsilon) = \frac{p}{1+\epsilon}.$$

k értékének ilyen megválasztása után

$$k^2\epsilon^4 + 2k\boldsymbol{p}\boldsymbol{\epsilon} - k^2\epsilon^2 = p^2$$

miatt az egyenletünk

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{R} \pm p)^2$$

alakot ölti.

A két pont F_1 és F_2. Ezek abszcisszáinak számtani közepe:

$$\frac{\frac{p}{1-\epsilon} + \frac{p}{1+\epsilon}}{2} = \frac{2p}{2(1-\epsilon^2)} = \frac{p}{1-\epsilon^2} = d.$$

Azaz F_1 és F_2 a D középpontra szimmetrikusan helyezkedik el. Ezt a két pontot nevezzük fókusznak. A parabolának csak egy fókusza van, mivel ebben az esetben $\epsilon = 1$ miatt $\frac{p}{1-\epsilon}$ nem létezik. A csúcspontból a fókuszba történő eltolás mértéke $\frac{p}{2}$.

A szokásos $F_1F_2 = 2c$ jelöléssel

$$2c = \left| \frac{p}{1-\epsilon} - \frac{p}{1+\epsilon} \right| = \left| \frac{2p}{1-\epsilon^2} \right| = 2\epsilon a.$$

Ez új megvilágításban mutatja ϵ-t is, innen

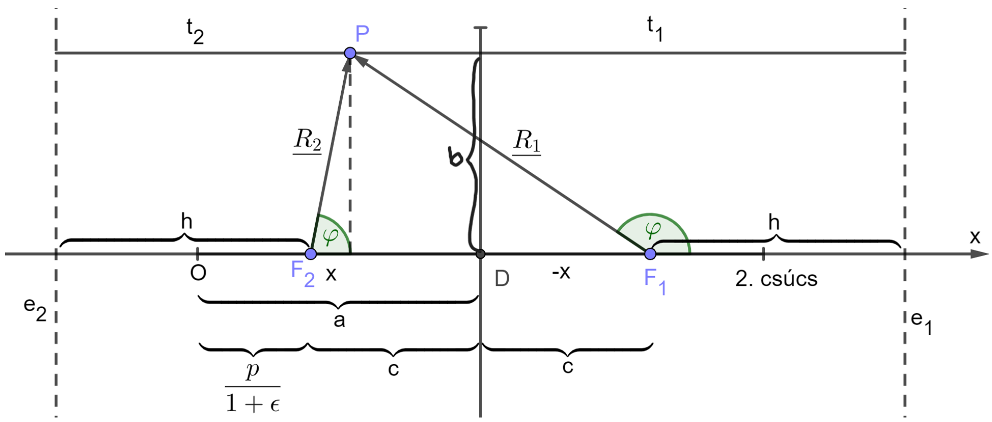
$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{p}{h}.$$

A fókuszok $2c$ távolságát szokás a kúpszelet excentricitásának nevezni. Ennek pl. a főtengelyhez (nagytengelyhez) való viszonya az, ami tájékoztatást ad a görbe alakjáról. Ez éppen a numerikus excentricitás.

Keressünk még összefüggést a, b és c között:

$$\boldsymbol{c}^2 = \epsilon^2 a^2 = a^2 \left(1 \pm \frac{b^2}{a^2}\right) = \boldsymbol{a}^2 \pm \boldsymbol{b}^2,$$

ahol a felső előjel a hiperbola, alsó pedig ellipszis esetében érvényes.



3. ábra

Tüntessük fel egy ábrán a jellegzetes pontokat, amelyeket érintettünk már. (3. ábránk az ellipszis esetét mutatja.)

Vizsgáljuk meg közelebbről a kapott $\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{\epsilon R} \pm p)^2$ egyenletet. Mivel $\boldsymbol{\epsilon R} = [(\epsilon; 0)(x; y)] = \epsilon x$ és $p = \epsilon h$, egyenletünk írható

$$\boldsymbol{R}^2 = (\epsilon x \pm \epsilon h)^2 = \epsilon^2 (x \pm h)^2.$$

F_2-t választva kezdőpontnak, mérjük fel h-t 0 irányában, és ennek végpontjában emeljünk (e_2) merőlegest az x tengelyre. A kúpszelet P pontjának ettől való távolsága

$$t_2 = (x + h).$$

Egyenletünkből pedig

$$(\boldsymbol{R_2}) = \epsilon t_2.$$

Ha F_1-t választjuk kezdőpontnak, akkor

$$t_1 = (-x + h) \quad \text{és} \quad (\boldsymbol{R_1}) = \epsilon t_1$$

összefüggésekre jutunk.

Hasonló összefüggésekre jutunk a többi kúpszelet esetében is. Ezek belátását az olvasóra bízzuk.

Azt nyertük, hogy véve a kúpszelet pontjainak távolságát az F_1, illetve F_2 fókusztól és a megfelelő e_1, illetve e_2 vezéregyenesektől, ezek aránya állandó, a numerikus excentricitással egyenlő.

Ennek alapján a kúpszeletek egyik definíciója: Azon pontok mértani helye a síkban, melyeknek egy ponttól (az ún. fókusztól) és egy egyenestől (vezéregyenestől) mért távolságainak aránya állandó.

Éspedig ha ez az állandó

$\epsilon = 1$, parabola, ha
$\epsilon < 1$, ellipszis, ha pedig
$\epsilon > 1$, hiperbola a kúpszelet neve.

Nézzük $R_1 + R_2$ értékét, mivel $t_1 + t_2$ a vezéregyenesek egymástól való távolsága, ellipszis esetén $2h + 2c$,

$$R_1 + R_2 = \epsilon(t_1 + t_2) = 2\epsilon(h + c) = 2\epsilon(h + \epsilon a) = 2(p + a\epsilon^2) = 2\left[\frac{b^2}{a} + a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] = 2a.$$

Ha $\epsilon > 1$, azaz hiperbola esetében pedig hasonlóan $(R_1 - R_2) = 2a$ adódik. Ezzel a szokásos definíciókhoz jutottunk.

Visszatérve az $\boldsymbol{R_1}^2 = (\boldsymbol{\epsilon R} + p)^2$ és $\boldsymbol{R_2}^2 = (\boldsymbol{\epsilon R} - p)^2$ egyenletekhez és figyelembe véve az $\boldsymbol{\epsilon R}$ skalárszorzatot:

$$\boldsymbol{\epsilon R} = (\epsilon; 0)\boldsymbol{R} = \epsilon R \cos\varphi, \quad \text{így pl.}$$

$$R_1 = \epsilon R_1 \cos\varphi + p,$$

amiből az ún. polárkoordinátás egyenlethez jutunk:

$$R_1 = \frac{p}{1 - \epsilon\cos\varphi}, \quad \text{illetve} \quad R_2 = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi}.$$

A tárgyalás kiindulásául szolgáló alapfeladatra visszagondolva, vegyük észre, hogy az érintők a félgömböt egy síkban lévő pontokban érintik, amelyek mint a gömbnek egy síkmetszete, kört határoznak meg. Ha ezt a kört a síkján kívül levő pontból egy másik síkra (esetünkben az xy síkra) leképezzük, kúpszelethez jutunk. Éspedig ellipszishez, parabolához vagy hiperbolához, esetleg körhöz, aszerint, hogy a két sík (a tárgysík és a képsík) milyen szöget zárnak be egymással.

KÚPSZELETEK ÁLTALÁNOS EGYENLETE

Toljuk el a kezdőpontot egy tetszőleges $\boldsymbol{k}$ vektorral értelmezett pontba. Egyenletünk akkor, mint a középponti egyenlet levezetésekor már láttuk, átmegy az

$$\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{\epsilon r})^2 + 2\boldsymbol{rv} + w$$

alakba, ahol $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\epsilon(\epsilon k)} + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}$ és $w = \boldsymbol{k}(\epsilon\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})$.

A kúpszelet egy szimmetriatengelye párhuzamos az x tengellyel, $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{i}$ irányú! Ha a tengely elfordul, azaz $\boldsymbol{\epsilon}$-nak és $\boldsymbol{p}$-nek van $\boldsymbol{j}$ irányú összetevője is, a legáltalánosabb egyenlethez jutunk. (Természetesen D, a középpont bárhol lehet.) A kúpszeletek vektoregyenletét azonban ez az elfordulás nem érinti, a különbség a skalár alakra való áttérésnél jelentkezik. Általában a következő egyenletre jutunk:

$$(x;y)^2 = [(\epsilon_x;\epsilon_y)(x;y)]^2 + 2(v_x;v_y)(x;y) + w,$$

ami rendezve a következő alakban írható:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Természetesen felmerül a kérdés, hogy az ilyen alakú egyenlet kúpszelet-e, és ha igen, hogyan állapíthatjuk meg azt, hogy milyen kúpszelet? Mivel egy számmal való szorzás ugyanannak a görbének az egyenletéhez vezet, így nem olvashatjuk le közvetlenül a görbe jellemzőit. Az alkalmas arányossági tényezőt kell megkeresnünk. Osszuk tehát az egyenletet egy később meghatározandó k számmal, és próbáljuk a fenti alakra hozni. Adjunk mindkét oldalhoz $(x;y)^2 = x^2 + y^2$-et. Ezután már csak k-t úgy kell megválasztanunk, hogy a keletkező másodfokú tagok $[(\epsilon_x;\epsilon_y)(x;y)]^2 = (\epsilon_x x + \epsilon_y y)^2$-t, tehát teljes négyzetet adjanak. Ekkor

$$\epsilon_x = \sqrt{\frac{a_{11}}{k} + 1}, \qquad \epsilon_y = \sqrt{\frac{a_{22}}{k} + 1},$$

azaz

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left(\sqrt{\frac{a_{11}}{k} + 1}\,;\,\sqrt{\frac{a_{22}}{k} + 1}\right).$$

Ehhez pedig az kell, hogy

$$\frac{a_{12}}{k} = \sqrt{\frac{a_{11}}{k} + 1}\sqrt{\frac{a_{22}}{k} + 1}$$

legyen, amiből $a_{12}; a_{11}; a_{22}$ ismertek lévén, k meghatározható:

$$a_{12}^2 = (a_{11} + k)(a_{22} + k).$$

Ezen másodfokú egyenletből nyert k értékek akkor felelnek meg, ha a négyzetgyököknek van értelmük.

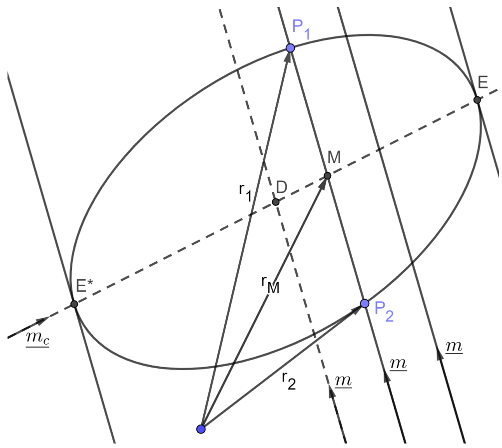
k ismerete után már $\boldsymbol{\epsilon}$ is ismert. $(\boldsymbol{\epsilon}) = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}$ pedig elárulja a kúpszelet milyenségét. A tengely elfordulásának α szögére pedig áll:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}.$$

Természetesen jelentkeznek az elfajulás esetei is. A diszkusszió keresztülvitele sem okoz különösebb nehézséget. Ennek a keresztülvitelét már az olvasóra bízzuk, tekintettel arra, hogy itt a vektorok alkalmazása már nem jut újabb szerephez.

Gyakorlatilag konkrét esetekben legcélszerűbb az egyenleteket középpontira transzformálni (parabola esetében pedig csúcspontira).

KÚPSZELET ÉS EGYENESEK. ÁTMÉRŐ, KONJUGÁLT ÁTMÉRŐK



4. ábra

A kúpszelet általános egyenlete:

$$\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{\epsilon r})^2 + 2\boldsymbol{vr} + w.$$

Legyen P_1 és P_2 két, a kúpszeleten levő pont. Ezeknek helyvektorai legyenek $\boldsymbol{r_1}$, illetve $\boldsymbol{r_2}$. Keressük a P_1P_2 szakasz felezési pontját M-et, illetve ennek

$$\boldsymbol{r_M} = \frac{\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2}}{2}$$

helyvektorát.

$\overrightarrow{P_1P_2}$ irányvektora legyen $\boldsymbol{m}$. Erre igaz, hogy

$$\boldsymbol{m} = \lambda(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}).$$

Mivel $\boldsymbol{r_1}$ és $\boldsymbol{r_2}$ a kúpszeleten van, így annak egyenletét kielégíti, azaz:

$$\boldsymbol{r_1}^2 = (\boldsymbol{\epsilon r_1})^2 + 2\boldsymbol{vr_1} + w$$

$$\boldsymbol{r_2}^2 = (\boldsymbol{\epsilon r_2})^2 + 2\boldsymbol{vr_2} + w$$

különbségüket véve:

$$\boldsymbol{r_1}^2 - \boldsymbol{r_2}^2 = (\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2})(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}) = [\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})][\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2})] + 2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}).$$

Átrendezve és felhasználva a fenti jelöléseket, ez a következő alakra hozható:

$$\boldsymbol{r_M}[\boldsymbol{m} - (\boldsymbol{\epsilon m})\boldsymbol{\epsilon}] = \boldsymbol{vm}.$$

Egyenletünkben $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\boldsymbol{v}$ adott a kúpszeletből, így adott $\boldsymbol{m}$ mellett a $\boldsymbol{vm}$ skalárszorzat is állandó, tehát r_M vektorok egyenes egyenletét elégítik ki, vagyis az összes $\boldsymbol{m}$ irányú húrok felezési pontjai egy egyenesen vannak. Ez a kúpszelet középpontján is átmegy, ezért ez az egyenes az *átmérő*.

Az egyenletből leolvasható, hogy az $\boldsymbol{m}$ irányú húrhoz tartozó átmérő egyenesének normálisa (irányát jelöljük $\boldsymbol{n}$-nel):

$$\mu\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{\epsilon m})\boldsymbol{\epsilon}.$$

Legyen továbbá az $\boldsymbol{m}$ irányhoz tartozó átmérő iránya $\boldsymbol{m_c}$. Mivel ez merőleges a normálisra

$$\boldsymbol{nm_c} = 0$$

.

Speciálisan legyen a kúpszelet olyan helyzetű, hogy $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon; 0)$, továbbá $\boldsymbol{m}$-et, ha nem párhuzamos az y tengellyel, választhatjuk $(1; m)$ alakúnak, mivel csak egy skalárszorzó erejéig volt meghatározva. Ekkor

$$\boldsymbol{\epsilon m} = (\epsilon; 0)(1; m) = \epsilon$$

és

$$\boldsymbol{\epsilon m_c} = (\epsilon; 0)(1; m_c) = \epsilon,$$

így

$$0 = \boldsymbol{n m_c} = \boldsymbol{m m_c} - \boldsymbol{(\epsilon m)(\epsilon m_c)} = \boldsymbol{m m_c} - \epsilon^2,$$

vagyis

$$\boldsymbol{m m_c} = \epsilon^2.$$

Ha $\boldsymbol{m}$ helyett $\boldsymbol{m_c}$ irányú húrból indultunk volna ki, akkor viszont $\boldsymbol{m_c}$ helyett $\boldsymbol{m}$-hez jutottunk volna el. Azaz $\boldsymbol{m}$ irányhoz $\boldsymbol{m_c}$ átmérő és ugyanakkor $\boldsymbol{m_c}$ irányhoz $\boldsymbol{m}$ átmérő tartozik. Ezeket egymáshoz *konjugált* irányoknak, az átmérőket pedig konjugált átmérőknek nevezzük. (Ha $\boldsymbol{m}$ párhuzamos az y tengellyel, akkor konjugáltja $\boldsymbol{m_c}$ párhuzamos az x tengellyel.)

ÉRINTŐK

Húzzunk párhuzamosakat egy P_1P_2 szelővel, melynek iránya legyen $\boldsymbol{m}$. Határesetben érintőkhöz jutunk. Az érintési pontok legyenek E és E^*.

Az előbbiekből világos, hogy az $\boldsymbol{m}$ irányhoz tartozó átmérő és a kúpszelet metszéspontjai E és E^* lesznek. Az átmérő egyenlete, mint láttuk:

$$\boldsymbol{r_M}[\boldsymbol{m} - \boldsymbol{(\epsilon m)\epsilon}] = \boldsymbol{v m}.$$

Rendezzük így:

$$\boldsymbol{m}[\boldsymbol{r_M} - \boldsymbol{(\epsilon r_M)\epsilon} - \boldsymbol{v}] = 0,$$

de az átmérőn van az E érintési pont is; ennek $\boldsymbol{r_E}$ helyvektora is kielégíti az egyenletet,

$$\boldsymbol{m}[\boldsymbol{r_E} - \boldsymbol{(\epsilon r_E)\epsilon} - \boldsymbol{v}] = 0.$$

Azaz az $\boldsymbol{m}$ irányú érintő merőleges az $[\boldsymbol{r_E} - \boldsymbol{(\epsilon r_E)\epsilon} - \boldsymbol{v}]$ vektorra, ami adott, ha az E pont adott.

Legyen tehát $[\boldsymbol{r_E} - \boldsymbol{(\epsilon r_E)\epsilon} - \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{e}$. Így $\boldsymbol{e}$ az érintő normálisának irányvektora. Az érintő egyenlete tehát

$$\boldsymbol{r e} = \boldsymbol{r_E e}.$$

Ugyanis az érintő átmegy E-n. $\boldsymbol{e}$-t beírva és átrendezve:

$$\boldsymbol{r r_E} = \boldsymbol{(\epsilon r)(\epsilon r_E)} + \boldsymbol{v r} + \boldsymbol{r_E}^2 - \boldsymbol{(\epsilon r_E)}^2 - \boldsymbol{v r_E}.$$

Itt, mivel $\boldsymbol{r_E}$ a kúpszeleten van,

$$\boldsymbol{r_E}^2 = \boldsymbol{(\epsilon r_E)}^2 + 2\boldsymbol{v r_E} + w,$$

vagyis

$$\boldsymbol{r_E}^2 - \boldsymbol{(\epsilon r_E)}^2 - \boldsymbol{v r_E} = \boldsymbol{v r_E} + w.$$

Ezt figyelembe véve az E pontba húzott érintő egyenlete:

$$\boldsymbol{r r_E} = \boldsymbol{(\epsilon r)(\epsilon r_E)} + \boldsymbol{v r} + \boldsymbol{v r_E} + w.$$

Vegyük észre, hogy a kúpszelet egyenletéből közvetlenül felírható ún. "felébe helyettesítéssel" ($x^2 \sim x x_1$; $2xy \sim x y_1 + x_1 y$; $2x \sim x + x_1$ stb.).

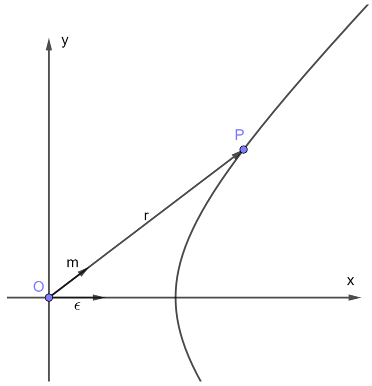
ASZIMPTOTÁK

Legyen a hiperbola egy P pontjának helyvektora $\boldsymbol{r}$; irányát jellemezzük az $\boldsymbol{m} = (1; m)$ vektorral, azaz

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \boldsymbol{m} = \boldsymbol{r}.$$

Szorozzuk skalárisan $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon; 0)$-nal

$$\boldsymbol{\epsilon r} = \lambda \boldsymbol{\epsilon m} = \epsilon \lambda.$$



5. ábra

Innen

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\epsilon r}}{\epsilon}.$$

A hiperbola középponti egyenletéből:

$$\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{\epsilon r})^2 + \frac{p^2}{1-\epsilon^2}.$$

Az előbbiek figyelembevételével nyerjük, hogy

$$\boldsymbol{m}^2 = (\boldsymbol{\epsilon m})^2 + \frac{p^2}{\lambda^2(1-\epsilon^2)}.$$

Ha P távolodik, λ nő, ezért $\frac{p^2}{\lambda^2(1-\epsilon^2)} \to 0$, így határesetben

$$\boldsymbol{m_\infty}^2 = (\boldsymbol{\epsilon m_\infty})^2$$

$$\boldsymbol{\epsilon m_\infty} = (\epsilon; 0)(1; m_\infty) = \epsilon \quad \text{és} \quad \boldsymbol{m_\infty}^2 = (1; m_\infty)^2 = 1 + m_\infty^2,$$

tehát

$$m_\infty = \pm\sqrt{\epsilon^2 - 1}.$$

Hiperbolánál $\epsilon > 1$, így $\epsilon^2 - 1 > 0$, és m_∞ értelemmel bír. Más kúpszeletnél m_∞ nem létezik. Hiperbolához tehát két irány létezik:

$$\boldsymbol{m_{1\infty}} = (1; \sqrt{\epsilon^2 - 1}) \quad \text{és} \quad \boldsymbol{m_{2\infty}} = (1; -\sqrt{\epsilon^2 - 1}).$$

Ezekhez az irányokhoz tartozó egyeneseket nevezzük aszimptotáknak. Ezek normálisai:

$$\boldsymbol{n_1} = (-\sqrt{\epsilon^2 - 0}; 1) \quad \text{és} \quad \boldsymbol{n_2} = (\sqrt{\epsilon^2 - 1}; 1).$$

Így az aszimptoták egyenletei:

$$\boldsymbol{n_1 r} = 0 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{n_2 r} = 0.$$

Mivel

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2},$$

mint láttuk

$$\pm\sqrt{\epsilon^2 - 1} = \pm\frac{b}{a}.$$

Az egyenlet skalár alakban:

$$\left(-\frac{b}{a};1\right)(x;y)=0, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{b}{a};1\right)(x;y)=0,$$

Azaz

$$y=\frac{b}{a}x, \quad \text{illetve} \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Ezzel igyekeztem a kúpszelettel kapcsolatos szokásos kérdések tárgyalását röviden bemutatni. Az eljárásmód kiépíthető további kérdések vizsgálatára is.

A tárgyalt anyag egy részét középiskolai tanításban is kipróbáltam. Igen jó tapasztalatokat szereztem, igaz, hogy igen kedvező körülmények között (tagozati osztályban). A tanulók számos lépést önállóan dolgoztak ki, nem egyszer egyszerűsítéseket találva az előkészített tárgyaláshoz képest. Nem akarok az egyszeri tapasztalatból messzemenő következtetéseket levonni, csak annyit, hogy érdemes volna további tapasztalatokat gyűjteni, annál is inkább, mert a síkbeli analitikus geometriában itt sokkal jobban mutatkozik a vektorok előnye, mint a lineáris kérdések tárgyalásánál. Kérem az ilyen felépítést kipróbáló kartársakat, hogy tájékoztassanak tapasztalataikról, a felmerült nehézségekről sem feledkezve meg.