**603.** *Oldjuk meg egész számokban az*

$$[x^2 + y^2]^4 = z^2 + t^2$$

*egyenletet.* *Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény*

**Megoldás:** Írjuk az egyenletet a következő alakban:

$$[(x^2 + y^2)^2]^2 = z^2 + t^2, \tag{1}$$

ami azt mutatja, hogy $(x^2 + y^2)^2$, $z$ és $t$ pitagoraszi számhármas, ha tehát

$$(x^2 + y^2)^2 = m^2 + n^2, \tag{2}$$

akkor

$$z = m^2 - n^2, \tag{3}$$

$$t = 2mn, \tag{4}$$

ahol z és t egymással fel is cserélhetők.

Mivel a (2) egyenlet szerint $x^2 + y^2$, $m$ és $n$ is pitagoraszi számhármas, azért az

$$m = x^2 - y^2; \quad n = 2xy \tag{5}$$

értékpár megoldása lesz (2)-nek. (De nem biztos, hogy egyetlen megoldása.) Az utóbbi értékeket (3) és (4)-be helyettesítve kapjuk:

$$z = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2; \quad t = 4xy(x^2 - y^2). \tag{6}$$

Kapott eredményeinket a megoldandó egyenletbe helyettesítve, azonossághoz jutunk:

$$[x^2 + y^2]^4 = [(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2]^2 + [4xy(x^2 - y^2)]^2.$$

Ezek szerint (6) alapján tetszőleges $x$; $y$ egész számokhoz található olyan $z$ és $t$ szám, melyekre az egyenlet teljesül. Minthogy pedig az adott egyenletben az ismeretlenek csak páros hatványon fordulnak elő, $x$, $y$ és a (6) szerinti $z$ és $t$ is bármilyen előjellel vehető.

Tetszés szerinti $x$; $y$ számpár és a (6) szerint ezekből megállapított $z$; $t$ számpár így mindig megoldása az adott egyenletnek, de ezek nem merítik ki az összes lehetőséget. Ugyanis, ha az $x^2 + y^2$ összeg másik két négyzetszám összegeként is kifejezhető, akkor helyettesíthetjük az egyik oldalon az egyik, a másik oldalon a másik számpárt. Ilyen számpárkettősök léteznek, mert a pitagoraszi számhármasok közül például:

$$65^2 = 56^2 + 33^2 = 63^2 + 16^2; \quad 85^2 = 84^2 + 13^2 = 77^2 + 36^2;$$

$$145^2 = 144^2 + 17^2 = 143^2 + 24^2; \text{ stb.}$$

Így a bal oldalra írhatjuk például $x = 56 : y = 33$, míg a (6) szerint 63 és 16 helyettesítésével kiszámított $z$ és $t$ ugyancsak kielégíti az (1) egyenletet, akárcsak az 56 és 33 helyettesítésével számított.

Ha az $x; y$ számpár egyike páros, a másik páratlan, és egymáshoz relatív prímek, akkor a (6) szerint számított $z$ és $t$ is relatív prímek.

Mutatunk még egy egyszerű módot egymáshoz nem relatív prím, az (1) egyenletet kielégítő $z$ és $t$ képzésére:

Induljunk ki a $c^2 = a^2+b^2$ pitagoraszi egyenletből, és ezt szorozzuk végig $c^6$-nal:

$$c^8 = (c^2)^4 = a^2c^6 + b^2c^6,$$

azaz:

$$(a^2 + b^2)^4 = (ac^3)^2 + (bc^3)^2,$$

tehát az $x = a,\ y = b$ és a $z = ac^3, t = bc^3$, ahol $x$ és $y$, valamint $z$ és $t$ egymással felcserélhetők, megoldásai lesznek az adott egyenletnek.

Például az $x = 4,\ y = 3$ számpárt választva $z$ és $t$-re 500 és 375 adódik. Érdekes, hogy ha a (6)-ba helyettesítjük a 4 és 3 értéket, akkor $z$ és $t$-re az 527 és 336 megoldás adódnak, ami a fentebb említett esetre is példát mutat, mivel

$$500^2 + 375^2 = 527^2 + 336^2 = 625^2$$

.

*Kamarás Lajos, Pécs és Kőváry Károly, Budapest*