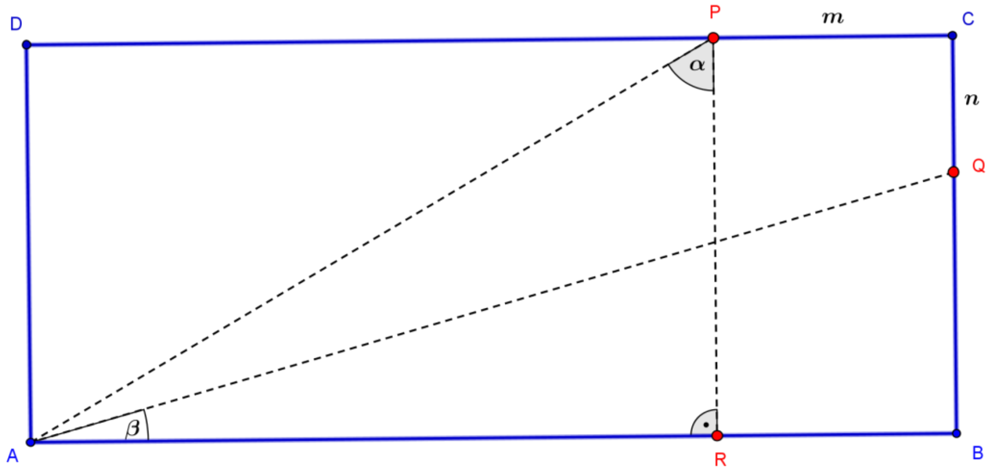
2. **Az $ABCD$ téglalapban $AB = 17$, $BC = 8$. A P pont a CD oldalon, C-től m hosszúságegységre, a Q pont a CB oldalon, C-től n hosszúságegységre van. Legyen R a P pontból az AB- re húzott merőlegesnek az AB oldalon levő talppontja, legyen továbbá $APR\angle = \alpha$, $QAB\angle = \beta$.**
Határozza meg mindazokat a pozitív egészekből álló $m; n$ számpárokat, amelyekre $\alpha - \beta = 45°$!

Megoldás: készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát (1. ábra).



1. ábra

Az APR háromszögben $tg\alpha = \dfrac{AR}{PR}$, mivel azonban $AR = AB - BR = 17 - m$, továbbá $PR = 8$, ezért

(1) $$tg\alpha = \frac{17-m}{8}.$$

Az AQB háromszögben pedig $tg\beta = \dfrac{BQ}{AB}$, ahol $BQ = BC - CQ = 8 - n$, valamint $AB = 17$, így

(2) $$tg\beta = \frac{8-n}{17}.$$ 2 pont

A feladat feltétele szerint $\alpha - \beta = 45°$, ebből $tg(\alpha - \beta) = tg45° = 1$.

Az $\alpha - \beta = 45°$ feltétel és az 1. ábra alapján nyilvánvaló, hogy $0° < \alpha < 90°$ és $0° \le \beta < 90°$, tehát $tg\alpha > 0$ és $tg\beta \ge 0$, ezért $1 + tg\alpha \cdot tg\beta > 0$, tehát alkalmazhatjuk a

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

trigonometrikus azonosságot. 1 pont

Az (1) és (2) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\frac{17-m}{8}-\frac{8-n}{17}}{1+\frac{17-m}{8}\cdot\frac{8-n}{17}},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után

(3) $$tg(\alpha-\beta)=\frac{225-17m+8n}{272-17n-8m+mn}.$$ 1 pont

Mivel $tg(\alpha-\beta)=1$, ezért (3)-ból

$$225-17m+8n=272-17n-8m+mn$$

következik, amelyből rendezés után,

$$-47=9m+mn-25n,$$

illetve a kapott összefüggés mindkét oldalából a $225=9\cdot 25$ értéket levonva

(4) $$-272=9m+mn-25n-225.$$

(4) jobb oldala szorzattá alakítható:

(5) $$-272=(n+9)\cdot(m-25).$$ 2 pont

Az $m;n$ számok pozitív egészek, így (5) alapján nyilvánvaló, hogy $n+9>0$ illetve $m-25<0$, továbbá a feladat feltételei miatt $1\le n\le 8$, és ezért $10\le n+9\le 17$, valamint $m<17$. 1 pont

Keressük tehát a $272=2^4\cdot 17$ szám olyan pozitív osztóit, amelyek megfelelnek a $10\le n+9\le 17$ feltételnek.

Ilyen pozitív osztó csak az $n+9=16$ és az $n+9=17$, amelyekből $n_1=7$ és $n_2=8$ következik.

Ezekből (5) alapján rendre $m_1=8$ és $m_2=9$ adódik. 2*pont

A feladat megoldásai tehát az $m_1=8; n_1=7$ és az $m_2=9; n_2=8$ számpárok.

Az $m_2=9; n_2=8$ számpár esetén (1) és (2) alapján $tg\alpha=1$, illetve $tg\beta=0$, ezért a B és Q pontok egybeesnek, továbbá $\alpha=45°$ illetve $\beta=0°$, ezekre is teljesül, hogy $\alpha-\beta=45°$. 1*pont

Összesen: 10pont

Megjegyzés: ha a versenyző az $m_2=9; n_2=8$ számpárt és az ehhez tartozó $\alpha=45°$ illetve $\beta=0°$ szögeket figyelmen kívül hagyja, vagy nem tekinti megoldásnak, akkor a *-gal jelzett pontok közül legfeljebb 1 pontot kaphat.