Emelt szintű tankönyv, 11-12. o, 187. oldal:

1. példa Tekintsük az $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $n \geq 2$; $a_1 = 2$ rekurzív sorozatot!

a) A sorozat mely tagjai oszthatók 3-mal?

b) Adjuk meg a sorozat explicit alakját!

Megoldás *a)* A sorozat tagjainak hárommal való osztási maradékai (2, 0, 2, 0, …) periodikusan ismétlődnek. (Ennek az az oka, hogy mindegyik maradék csak az őt közvetlenül megelőző tag maradékától függ.) Így a sorozat páros indexű tagjai – és csak azok – oszthatók 3-mal.

b) A sorozat néhány tagja $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$ stb. Az explicit alakot többféleképpen is előállíthatjuk.

Első megoldás (teljes indukció): Észrevehetjük, hogy mindegyik tag eggyel nagyobb egy kettőhatványnál, így az $a_n = 2^{n-1} + 1$, $n \geq 1$ explicit alakot sejthetjük meg. Az indukciós feltevés $a_k = 2^{k-1} + 1$, ebből kell belátnunk, hogy $a_{k+1} = 2^k + 1$, ez pedig az $a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1$ átalakításból már következik. A képlet $n = 1$-re is érvényes. ($2^{n-1} + 1$ ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, mint $(-1)^{n-1} + 1$, tehát ebből is látszik, hogy a sorozat páros indexű tagjai oszthatók 3-mal.)

Második megoldás (fokozatos helyettesítés): A sorozat tagjait rendre kifejezzük a_1-gyel.

$a_2 = 2a_1 - 1$;

$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot (2a_1 - 1) - 1 = 2^2a_1 - 2 - 1$;

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot (2^2a_1 - 2 - 1) - 1 = 2^3a_1 - 2^2 - 2 - 1$;

$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot (2^3a_1 - 2^2 - 2 - 1) - 1 = 2^4a_1 - 2^3 - 2^2 - 2 - 1$ és így tovább.

A képzési szabály könnyen felismerhető; az indukciós gondolatból következik, hogy

$a_n = 2^{n-1}a_1 - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \ldots - 2 - 1$.

$2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$ nem más, mint a $b_n = 2^{n-1}$ mértani sorozat első $(n - 1)$ tagjának az összege. Ennek értéke $\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$, és mivel $a_1 = 2$, így $a_n = 2^{n-1} \cdot 2 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} + 1$.

Harmadik megoldás (a különbségsorozat módszere): Definiáljuk a (d_n) különbségsorozatot $d_n = a_n - a_{n-1}$ módon! $(n \geq 2.)$ Ekkor a szomszédos tagok különbsége $d_2 = a_2 - a_1 = 1$; $d_3 = a_3 - a_2 = 2$; $d_4 = a_4 - a_3 = 4$ stb. Úgy tűnik, hogy (d_n) mértani sorozat, s ez igazolható is a rekurzív alak segítségével: $d_n = a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - 1 - (2a_{n-2} - 1) = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) = 2d_{n-1}$ $(n \geq 3)$. Valóban: a különbségsorozat bármely tagja az előző tag 2-szerese, $d_n = 2^{n-2}$, $n \geq 2$.

Az n-edik a_n tagot ismételt összeadásokból kaphatjuk meg: $a_2 = a_1 + d_2$; $a_3 = a_2 + d_3 = a_1 + d_2 + d_3$; általában $a_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i$. Ennek összege pedig $a_n = 2 + \sum_{i=2}^{n} 2^{i-2} = 2 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 1$.