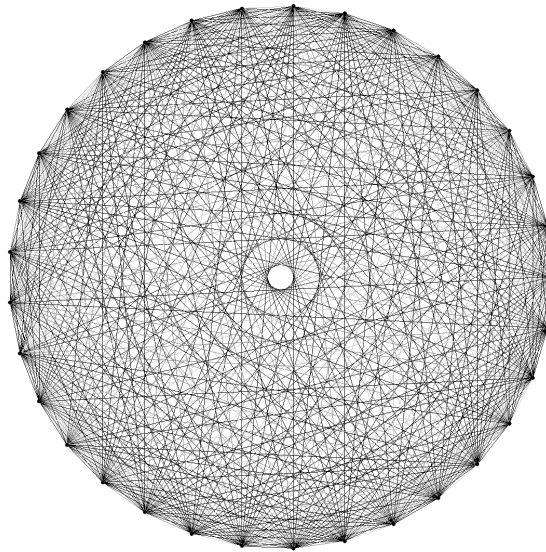


Kombinatorikus geometria és a Ramsey-tétel

Tóth Géza előadásától inspirálva írta Hoksza Zsolt

2010. szeptember 25.



ELŐSZÓ	2
SYLVESTER-GALLAI-TÉTEL	3
ERDŐS-SZEKERES-TÉTEL	100
RAMSEY-TÉTEL	16
FELADATOK	23
IRODALOMJEGYZÉK	24

Előszó

Ennek a rövid összefoglalónak a célja egy kis betekintést nyújtani a véges matematika egyik peremvidékének számító kombinatorikus geometriába, azon belül is főként olyan eredményekbe, amelyek egy-egy adott speciális struktúra egzisztenciáját mondják ki.

A dolgozat kiinduló pontjaként Tóth Gézának, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet munkatársának, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban a Kardos Gyula Matematika Verseny eredményhirdetésén elmondott előadása szolgált, akinek ez úton is szeretnék külön köszönetet mondani a lektorálásban nyújtott segítségéért. Az előadás témája az Erdős-Szekeres-tételkör volt, amelyre mi a második fejezetben fogunk kitérni. Először a Sylvester-Gallai-tétel kapcsán, annak néhány különböző ötletet igénylő bizonyításainak ismertetésével igyekszünk majd szemléltetni, milyen hatalmas változatosságot is foglal magában a fent említett téma. Ezt követően Tóth Géza előadása nyomán áttérünk az előbbi tételre, majd ennek apropóján egy valójában általánosabb egy egészen másfajta terület központi kérdéskörének számító eredményre, a Ramsey-tételre.

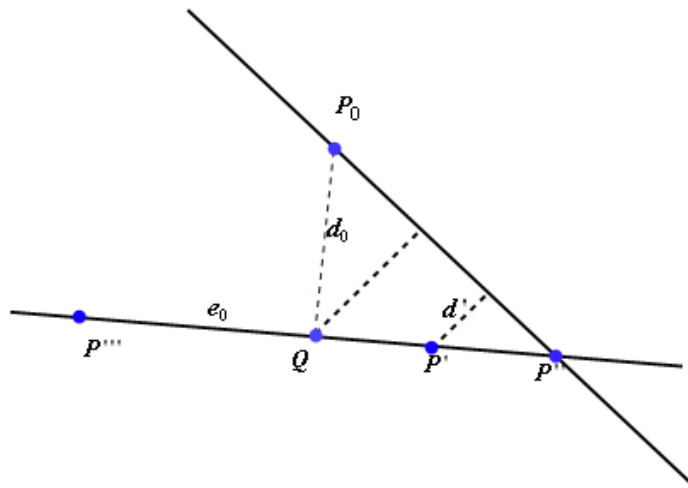
Az ábrák Mathematica illetve Corel Draw programmal készültek.

A cikk megírásában Hraskó András tanár úr volt segítségemre, valamint a dolgozat létrejöttét az Együtt tanítunk pályázat keretében a Fazekas Oktatási Kulturális és Sport Alapítvány tette lehetővé.

Sylvester-Gallai-tétel

A kombinatorikus geometriai problémák egyik széles körben ismert illusztris példája a Sylvester-Gallai-tétel, amely valószínűleg egyben a legismertebb egyenesek helyzetét tárgyaló állítás is. A problémát 1893-ban J. J. Sylvester vetette fel *The Educational Times* c; azóta megszűnt folyóiratban, ám az nem ismert, hogy ő maga bebizonyította-e az állítást. A kérdést néhány évtizeddel később, Hilbert-Cohn-Vossen „*Anschauliche Geometric*” c. művének geometriai konfigurációkról szóló fejezetét olvasgatva, Erdős Pál tette fel újra 1933-ban, amelyre nem sokkal később Gallai Tibor elő is állt egy helyes bizonyítással. Azóta számtalan kiváló matematikus adott új, az addigiaktól eltérő, merőben más szemléletű indoklást; ezek közül elsőként tárgyalt L. M. Kellytől származik, mely ragyogóan szellemes; mindössze a valós sík metrikáját és rendezési axiómát használ.

- 1. Állítás.** *Bárhogy is helyezkedik el n nem kollineáris pont a síkon, létezik olyan egyenes, mely pontosan kettőt tartalmaz a pontok közül.*

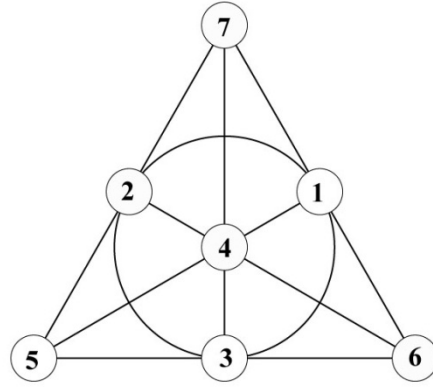


1. ábra

- 1.1 Bizonyítás.** Legyen a pontok halmaza $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ az egyenesek halmaza, pedig $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Vegyük az összes lehetséges olyan $\{P; E\}$ rendezett párt, ahol P_i nem eleme e_i -nek. Válasszuk ki ezek közül azt a $\{P_0; e_0\}$ párt, amelynél a pontnak az egyenestől mért távolsága a lehető legkisebb. Az állítás az, hogy e_0 egyenes megfelel. Ezt indirekten látjuk be, legyen Q az egyenes P_0 -hoz legközelebb lévő pontja, tételezzük fel, hogy e_0 tartalmaz legalább három pontot, ekkor ezek közül legalább kettő szükségszerűen Q -hoz képest ugyanazon az oldalon van. Legyenek ezek a pontok: P' és P'' . Tegyük fel, hogy P' Q és P'' között helyezkedik el. (P' egybe is eshet Q -val) Ekkor, az ábrán látható módon, P' távolsága P_0 és P'' pontok által meghatározott egyenestől kisebb, mint P_0 és e_0 távolsága, ami viszont ellentmondás.

□

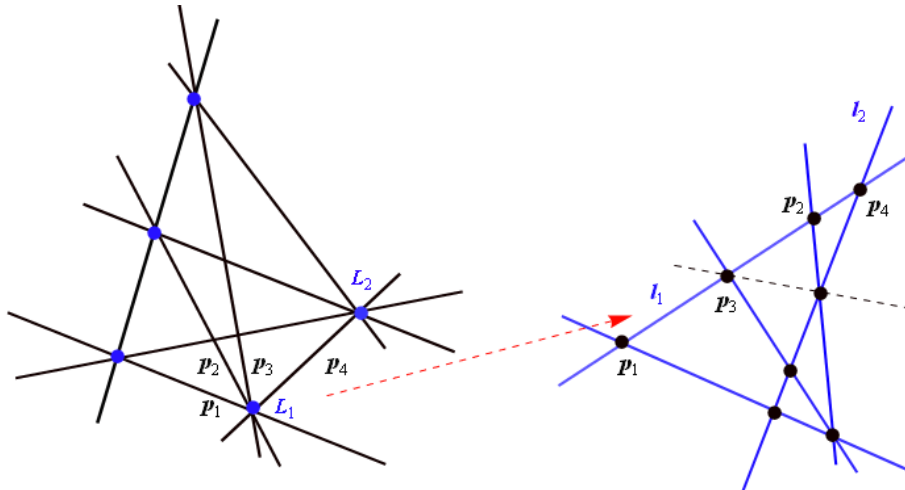
A tétel eredménye azonban nem általánosítható tetszőleges véges síkra, erre triviális példát szolgáltat az úgynevezett Fano-sík, amely olyan konstrukciót mutat, amelyben a tétel nem teljesül, ennél fogva bizonyos feltételek mindenképpen szükségesek a bizonyításhoz.



2. ábra. A Fano-sík a lehető legkisebb, 7 pontot és 7 egyenest tartalmazó, véges projektív sík, mely nevét Gino Fano itáliai matematikus után kapta. Az ábra alapján úgy tűnhet, hogy a kör alakú egyenesnek három másik egyenessel két-két közös pontja van, ám ez ne tévesszen meg senkit, ugyanis ez csak annak tudható be, hogy a Fano-sík a számára teljesen idegen euklideszi viszonyok között van ábrázolva.

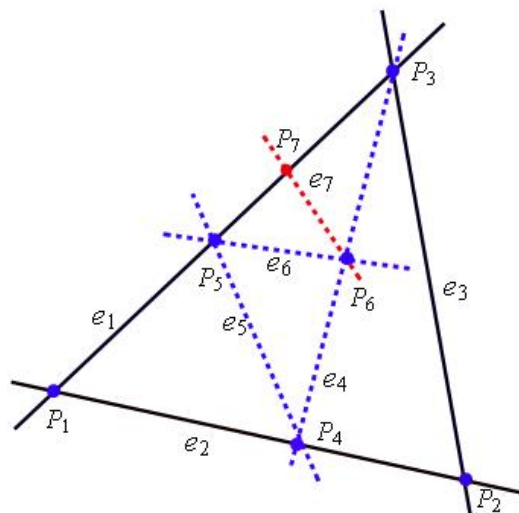
Az előbb említett alapvetően nehéz tételre további két bizonyítást is ismertetünk, abban a reményben, hogy így majd mindenki képes lesz megtalálni a számára legszimpatikusabbat. Nem is beszélve arról, hogy ugyanarra a tételre adott elviekben különböző megoldások a problémát egy másik nézőpontból mutatják, ezzel rávilágítva merőben más kapcsolatokra is. A következő bizonyítás egy igen fontos lépése az, hogy a problémát visszavezetjük egy könnyebben kezelhető, egyszerűbb problémára, a szereplők megcserélésével. Ehhez definiálnunk kell a dualizálást: ez egy illeszkedés-tartó leképezés az egyik sík pontjaiból a másik sík pontjaiba, vagyis az első síkon egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha a második síkon a kép-egyenes illeszkedik a kép-pontra.

1.2 Bizonyítás. Legyen a valós euklideszi síkon adott pontoknak egy L , egyeneseknek, pedig egy P véges halmaza. A halmazok elemeit dualizáljuk; kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk pontok és egyenesek között. A bizonyítandó állítás ekkor a következőképpen hangzik: *Létezik olyan pont, amelyen pontosan kettő egyenes halad át.*



3. ábra Az ábrán, egy példán keresztül, a dualizálást szemléltetjük, amely projektív transzformáció. Megfeleltetünk egy egyenest egy pontnak, úgy, hogy a ponton áthaladó egyenesek, most az egyenesen lévő pontok lesznek. A piros nyilak ilyen konkrét hozzárendeléseket mutatnak. Belátható, hogy ilyen bijekció mindig lehetséges. Meg kell jegyezni, hogy az új struktúrában csak az így kapott egyeneseket tekintjük tényleges *egyenesnek*, vagyis itt nem feltétlenül igaz, hogy bármely két *pontotegyenes* köt össze, azonban fennáll az, hogy bármely két *egyenes* metszéspontja *pont*.

Mivel a kiinduló struktúrára igaz volt, hogy nem kollineáris, így a kapott elrendezésünkben fennáll az, hogy az összes egyenes nem halad át egy ponton. Ekkor biztosan van egy P_3 és egy e_2 egyenes, amik nem illeszkednek, az előbbi feltétel miatt, továbbá P_3 ponton legalább 3 egyenes áthalad, különben készen lennénk. Legyenek ezek az egyenesek e_1, e_4, e_3 , abban a sorrendben, ahogy e_2 -őt metszik. Az e_1, e_2, e_3 egyenesek által határolt háromszög csúcsai P_2, P_3, P_1 .



4. ábra

e_4 metszi e_2 -t P_4 -ben, a zárt síkrészt két részre bontva. P_4 -en ekkor két egyenes halad át, így nyugodtan feltehetjük, hogy eleme egy e_5 egyenesnek is, különben készen lennénk. e_5 egyenes ismét két részre bont egy már meglévő zárt síkrészt, miközben metsz egy újabb egyenest P_5 -ben. P_5 -re az előző érvelést alkalmazva megkapjuk P_6 -ot, és ezt így folytathatjuk, de tekintetbe véve, hogy a kiinduló halmazaink véges halmazok, egyszer az eljárás véget ér, és akkor adott lesz egy olyan P_k pont, amelyen pontosan két egyenes halad át.

□

A soron következő bizonyítás Norman Steenrod-tól származik, 1944-ből. Euler-formula felhasználásával egy meglepően egyszerű és elegáns bizonyítást ad a Sylvester-Gallai tételre.

1.3 Bizonyítás. A bizonyítás első lépéseként egy lemmát látunk be, amely az Euler-féle poliédertétel síkgráfokra megfogalmazott változatának (Euler-formula) egyszerű, ám hasznos következményét mondja ki:

2. Állítás. Legyen G nemüres, egyszerű síkbeli gráf. Ekkor G -nek van legfeljebb ötödfokú csúcsa

2.1 Bizonyítás. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy G összefüggő. Ilyen síkba rajzolható gráfokra érvényes az Euler-formula: $c+l=e+2$ (ahol c a csúcsok, l a tartományok és e az élek száma). A tartományok száma felírható a következőképpen:

$$l = l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + \dots = \sum_{i=3} l_i$$

$$2e = 3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + 6l_6 + \dots = \sum_{k=3} kl_k$$

l_k -val jelöljük azoknak a tartományoknak a számát, amelyeket k él határol. Mivel G egyszerű, ezért egy tartományt legalább három él határol. Kettős leszámolás módszerét alkalmazva kapjuk az élek számára a második összefüggést. Ezekből: $2e - 3l \geq 0$. Ebből egyúttal azonnal következik 2), Euler-formulát alkalmazva: $3n - 6 = 3e - 3l \geq e$

Ha minden csúcs foka (d_i) legalább 6 lenne, akkor:

$$2e = \sum_1^n d_i \geq \sum_1^n 6 = 6n$$

$$e \geq 3n$$

Ami viszont ellentmond az előző összefüggésnek.

□

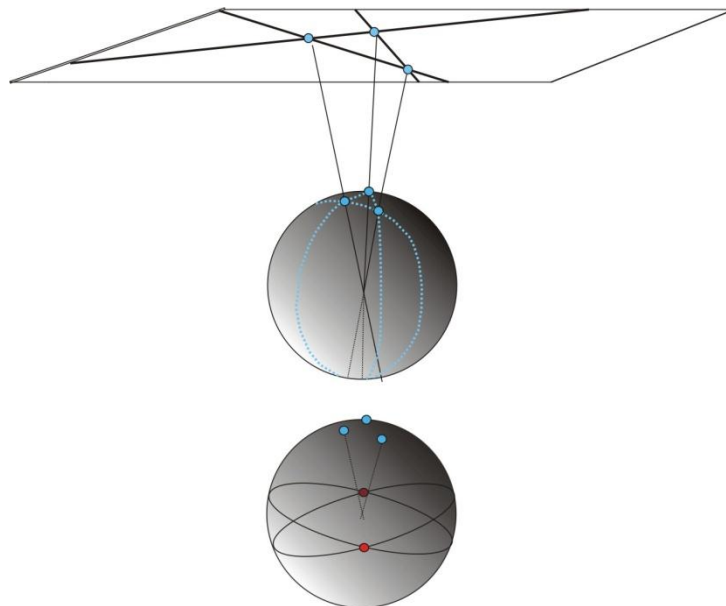
Most, hogy a kötelező formaságokon túlestünk, visszatérhetünk a tétel harmadik bizonyításához, amely formabontó az eddigiekhez képes olyan szempontból, hogy a valós síkból kilépve egy egészen más környezetben oldja meg a problémát.

Létesítsünk megfeleltetést az R^2 sík és az S^2 gömbfelszín között oly módon, hogy a valós sík pontja a gömbfelület átellenes pontjai, míg az adott pontokat összekötő egyenesek a pontoknak megfeleltetett pontpárokat összekötő gömbi főkörök legyenek. Ekkor a Sylvester-Gallai tétel a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Legyen adva S^2 -en $n \geq 3$ nem egy főkörön lévő átellenes pontpár. Ekkor, van olyan főkör, amely pontosan két ilyen átellenes pontpárt tartalmaz.

Ezt követően ismét dualizálást alkalmazunk a struktúrán: minden átellenes pontpárt azonosítsunk az őket összekötő egyenesre merőleges gömbi főkörrel. Azaz $\pm p \in S^2$ pontok helyett tekintsük azokat a köröket, amelyeket a következő összefüggés definiál:

$$C_p = \{x \in S^2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle = 0\}$$



5. ábra. Az R^2 síkot beágyazzuk a háromdimenziós euklideszi térbe, majd leképezzük az S^2 gömbfelületre a pontokat és az egyeneseket. Ezt követően dualizáljuk a szerkezetet.

Ekkor a tétel a következő formát ölti:

Legyen adva S^2 -en $n \geq 3$ nem egy ponton átmenő főkör. Ekkor van olyan pont, amely pontosan két ilyen főkörön van rajta.

Ezen a ponton tudjuk alkalmazni az előbb bebizonyított állítást, ugyanis a főkörök elhelyezkedése egy síkba rajzolható gráfot határoz meg, amelynek a csúcsai a főkörök metszéspontjai, és amelyre igaz az, hogy minden pontjának a foka páros és legalább 4. **1)** értelmében szükségszerű, hogy legyen olyan pontja, amelynek a foka legfeljebb 4. Ezzel el is jutottunk a bizonyítani kívánt tételhez.

□

Az eddigiekben egy ismert példán keresztül próbáltuk meg szemléltetni, hogy mekkora változatosságot tartogat még egy ilyen egyszerűen megfogalmazható, empirikusan is alátámasztott állítás. Létezik ezeken kívül a tételre sok egyéb bizonyítás, például mellőztük magának Gallainak a bizonyítását is, de a függelékben szerepelnek majd a cikkek, ahol ezek közül levezetések közül további néhány el is érhető. Most azonban, vizsgáljuk még meg azt, hogy ebből a kérdésből kiindulva milyen egyéb kérdések merülhetnek fel. Sylvester-Gallai-tétel kapcsán rögtön meg is említhetjük Erdős Pálnak és Nicolaas G. de Bruijnnak egy tételét, amely triviálisan következik az eddigiekből. Az egyszerűség kedvéért nevezzünk egy egyenest *közönséges egyenesnek*, ha a megadott pontok közül pontosan kettőn megy át. (és egy pontot *közönséges pontnak*, ha rajta pontosan kettő egyenes halad keresztül) Az előbb hosszasan tárgyalt tétel a közönséges egyenes létezését mondja ki, azonban logikusan merül fel az a kérdés is, hogy mennyi egyenes is van egy adott nagyságú ponthalmaz esetén? Ha a pontok általános helyzetben vannak, akkor viszonylag könnyű megmondani a választ, hiszen ahány módon ki tudunk választani a pontok közül kettőt, annyi van, mivel minden ilyen kételemű részhalmaz egy külön egyenest határoz meg. Vagyis n általános helyzetű pont a síkon $\binom{n}{2}$ egyenest determinál. De mi a helyzet általában? Ilyen esetekre ad egy alsó becslést az Erdős-de Bruijn-tétel.

3. Állítás. *Legyen H , n nem egy egyenesen fekvő pont halmaza a síkon. Ekkor a legalább két ponton átmenő egyenesek száma legalább n .*

3.1 Bizonyítás. $n = 3$ esetén az állítás triviális. Az indukció bázisa adott, folytassuk hát n szerinti teljes indukcióval, felhasználva a már belátott eredményeket. Legyen adva pontoknak egy H , egyeneseknek egy L halmaza, ahol $|H| = n+1$. Ekkor Sylvester-Gallai-tétel miatt $\exists l_0$, amely l_0 egyenesen pontosan két pont, P_1 és P_2 van. Ezek közül elhagyjuk P_1 -et, ekkor kapjuk H' halmazt és L' halmazt és két eset áll fenn: az összes megmaradt pont egy egyenesen van vagy nem. Az első esetben ez azt jelenti, hogy a kiinduló struktúránk úgy nézett ki, hogy n pont egy egyenesen található és P_1 helyezkedik el azon kívül. Ebben az elrendezésben pontosan $n+1$ egyenes van, tehát $|L| = n+1$. Ha P' pontjai nincsenek egy egyenesen, akkor az indukciós feltevésünk alapján: $|L'| \geq n$, amiből viszont következik, hogy $|L| \geq n+1$.

□

Folytatva ezt a kérdéskört, most lényegében ugyanennek a problémának egy általánosítását tárgyaljuk, amely állítását tekintve megegyezik az előző tétellel, csak általánosabban mondja ki azt: tetszőleges pont-egyenestel struktúrára igaz megállapítást tesz. E tételt Hanani bizonyította be először 1938-ban, ám az ő bizonyítása csak 1951-ben jelent meg és tőle függetlenül Erdős Pál és N. G. de Bruijn 1948-ban publikálták a tétel teljes bizonyítását. A következő igazán frappáns bizonyítás J. H. Conwaytól származik.

4. **Állítás.** Legyen adva P $v \geq 3$ elemű halmaz és B_1, B_2, \dots, B_b legyenek P valamely valódi legalább kételemű részhalmazai úgy, hogy P bármely két elemét pontosan egy B_i halmaz tartalmazza. Ha $b > 1$, akkor $b \geq v$.

4.1 **Bizonyítás.** $|P|=v$. $x \in P$, r_x az x pont fokszáma, amely megmutatja, hogy hány blokk tartalmazza, K_B , pedig a B blokk mérete, vagyis az adott blokk elemszáma. Legyen L olyan blokk, ahol $x \notin L$. Tegyük fel, hogy $v \geq b$. Ez esetén $r_x \geq K_L$, ugyanis legyen L két tetszőleges elem y és z . (x,y) párt tartalmazza B_1 , (x,z) párt, pedig B_2 . $B_1 \neq B_2$, mivel ekkor (y,z) pár két blokkban is szerepelne. Ekkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$b(v - K_L) \geq v(b - r_x)$$

$$1 = \sum_x \sum_L \frac{1}{v(b - r_x)} \geq \sum_L \sum_x \frac{1}{b(v - K_L)} = 1$$

Mivel az egyenlőtlenség két oldalán egyenlő mennyiségek szerepelnek így a köztük lévő reláció csak egyenlőség lehet, azaz $v \geq b$ feltevés csak akkor teljesülhet, ha $v = b$.

□

Ezzel be is láttuk az általánosított Erdős-de Bruijn-tételt, amelyet ha kicsit átfogalmazunk a szereplők megcserélésével, akkor ahhoz az állításhoz jutunk, hogy:

Ha a K_n teljes gráfot m K_n -től különböző klikkre bontjuk fel úgy, hogy minden él pontosan egy klikkben van benne, akkor $m \geq n$.

Ha megfeleltetjük P halmaz elemeit K_n csúcsainak, az B_i halmazokat, pedig a klikkeknek, akkor nyilvánvaló, hogy a két állítás ekvivalens, és az előbb elmondottak alapján az is, hogy ez a megfogalmazás is helytálló. Egy egyszerű geometriai problémából (Sylvester-Gallai-tétel) kiindulva eljutottunk oda, hogy teljes gráfok felbontásáról is tudunk állításokat megfogalmazni. Visszatérve a síkbeli egyenesekhez –pár további eredmény ismertetése végett– világos, hogy ez az n alsó becslés nem javítható, erre maga a bizonyítás ad példát, mivel ha $n-1$ pont van egy egyenesen és az n . pont, pedig nincs rajta, akkor ebben az elrendezésben pontosan n egyenest határoznak meg a pontok. Azonban ennél többet is elmondhatunk a meghatározott egyenesek számáról, ha a struktúráról több információval rendelkezünk. Ezzel kapcsolatban Kelly és Moser látott be egy általánosabb eredményt:

5. **Állítás** Adott a valós síkon n pont, amelyekre igaz, hogy legfeljebb $n-k$ van közülük egy egyenesen, továbbá n és k számok viszonyában fennáll az is, hogy: $n \geq \frac{1}{2}(3[3k-2]^2 + 3k-1)$

akkor a meghatározott egyenesek száma legalább $kn - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1)$

Ez a korlát ebben az esetben sem javítható, vagyis mutatható olyan elrendezés, amelyben pontosan ennyi a meghatározott egyenesek száma. Azonban még vannak nyitott kérdések, erre a problémára még megoldatlan a következő sejtés: Létezik-e olyan c állandó (mely k -től és n -től független), hogy ha az n pont közül legfeljebb $n-k$ van egy egyenesen, akkor a determinált egyenesek száma nagyobb, mint ckn . A továbbiakban közönséges egyenesnek nevezzük az olyan egyeneseket, amelyek pontosan két pontot tartalmaznak. Hasonlóan érdekes kérdések merülnek fel, ha nem pusztán az egyenesek, hanem a közönséges egyenesek számát vesszük alapul. Ehhez a témához köthető legkorábbi eredmény maga a Sylvester-Gallai-tétel volt, ugyanis az kimondja a közönséges egyenesek egzisztenciáját tetszőleges pont- és egyeneshalmazra. Legyen k pontot tartalmazó egyenesek száma t_k , valamint $t_2(n)$ a közönséges egyenesek minimális mennyisége. Az előzőekből látszik, hogy projektív dualizálást alkalmazva ugyanezeket a jelöléseket alkalmazhatjuk pontokra is, vagyis, t_k lehet egyúttal azon pontok száma, amelyeken pontosan k db egyenes halad át. E. Melchior 1940-ben megmutatta, hogy minden

ponthalmaz tartalmaz legalább 3 közöséges egyenest, valamint ennél valamivel többet is tudott mondani:

$$6. \text{ Állítás } t_2 \geq 3 + \sum_{k \geq 4} (k-3)t_k$$

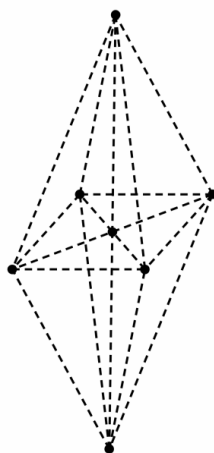
Egyenlőség áll fenn például akkor, ha pontosan n db egyenest tartalmaz a struktúra az előbb leírt módon, ez triviálisan következik. Több sejtést is megfogalmaztak már ebben a problémakörben, többek között Theodore Motzkin belátta, hogy $t_2(n) \geq \sqrt{n}$, míg G. Dirac egyik sejtése az volt ezzel kapcsolatban, hogy $t_2(n) \geq \lfloor n/2 \rfloor$, ahol a $\lfloor x \rfloor$ azt a legnagyobb pozitív egész számot jelöli, amely még kisebb, mint x . 1958-ban Kelly és Moser mutatott fel új eredményt, mikor bebizonyították, hogy $t_2(n) \geq 3n/7$. Ezen az eredményen javított J. Csimas és E. Sawyer, mikor megmutatták, hogy $t_2(n) \geq 6n/13$ is fennáll, kivétel az $n = 7$ esetet, amikor $t_2(7) = 3$. Böröczky Károly megmutatta, hogy $t_2(n) \leq n/2$, ha n páros és $t_2(n) \leq 3k$, ha $n = 4k+1$ vagy $n = 4k+3$. A páros felső becslésnek az alsó korlát körülbelül a 92,31%-a, vagyis viszonylag közel állnak egymáshoz.

Egy másik híres tételt is említenénk ennek a résznek a végén, amelyet ugyan szoros szálak nem fűznek az eddigiekhez, azonban szintén az egyenesek helyzetét tárgyalja, ám meglehetősen megfoghatatlannak tűnő tulajdonságra apellálva. A problémának ismét van magyar vonatkozása, mivel P. R. Scott 1970-ből származó sejtésére Ungár Péter adott többek között egy nagyon elegáns megoldást J. E. Goodman és R. Pollack addig elért részeredményeire alapozva.

7. **Állítás** Minden $n \geq 3$ pont a síkon, melyek nincsenek mind egy egyenesen legalább $n-1$ különböző irányt meghatároznak, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet, ha $n \geq 5$ és páratlan.

A Scott által felvetett probléma általánosítható magasabb dimenzióba is. 2004-ben egy viszonylag hosszabb cikkben Pach János, Rom Pinchasi és Micha Sharir megoldják a 3-dimenziós változatot és magasabb dimenziókra sejtéseket fogalmaznak meg.

8. **Állítás** Minden $6 \leq n$ pontból álló halmaz R^3 térben, amely n pont nincs mind egy síkban. P halmaz pontjait összekötő egyenesek legalább $2n-7$ különböző irányt meghatároznak, ha n páros, és legalább $2n-5$ irányt, ha n páratlan, amely korlát éles minden 5-nél nagyobb páratlan számra.



6. ábra Egy 7-elemű halmaz, amely a tétel szerint az optimális esetnek megfelelően határoz meg 9 ($2n-5$) irányt.

Erdős-Szekeres-tétel

Tóth Géza előadása nyomán

Mielőtt belevágnánk a tétel matematikai tárgyalásába, talán célszerű egy rövid időre, a probléma eredetére is kitérni. A történet az 1930-as években kezdődött, amikor is pesti egyetemisták egy kis csoportja a szokásukhoz híven összegyűlt a Városligetben, az Anonymus-szobornál (innen is kapta a társaság a nevét), és a világ nagy dolgait vitatták meg egymással és néha-néha szóba került a matematika is, hiszen a csoport tagjai között olyan nevek is szerepeltek, mint: Klein Eszter, Gallai Tibor, Szekeres György, Turán Pál és végül de nem utolsó sorban Erdős Pál. Mindannyikban közös volt a matematika határtalan szeretete, és ez is hozta őket igazán össze, mivel korábban, középiskolai éveik alatt mindannyian a Középiskolai Matematikai Lapok legkiválóbb megoldóinak számítottak. A köztük lévő kapcsolatok végül idővel, életre szóló barátsággá érlelődtek, valamint Klein Eszter és Szekeres György később össze is házasodtak. (Ezt ihlette ebben a fejezetben tárgyalandó tétel gyakori Happy End-probléma elnevezését)

Az egyik összefüggésekre Klein Eszter a következő észrevétellel érkezett:

9. Állítás. *Öt pont, amelyek közül semelyik három sincsen egy egyenesen, a síkon meghatároz egy konvex négyszöget.*

9.1 Bizonyítás. Ennek a bizonyítása roppant egyszerű, rutin feladat. Ha a ponthalmaz konvex burka legalább négy pontból áll, akkor adott a konvex négyszög és készen vagyunk. Ha a konvex burok három pontból áll, akkor a belső két pont által meghatározott egyenes egyik oldalán lesz két pont, az a kettő meg a belső kettő szintén konvex négyszöget alkot.

□

A feladat gyors megoldása után hamar bele is kezdtek annak általánosításába. Ennek tárgyalásához bevezetnénk egy-két egyszerűbb definíciót: Egy ponthalmaz *konvex helyzetben* van, ha a ponthalmaz megegyezik a *konvex burkával* és egy ponthalmaz általános helyzetű, ha semelyik három pontja nincs egy egyenesen. Felmerül a kérdés, vajon minden n -hez létezik-e olyan, elegendően nagy ponthalmaz, amiben található n pont konvex helyzetben? Makai Endre és Turán Pál megmutatták, hogy 5 esetén létezik, és ebben az esetben az elegendően nagy 9 pontot jelöl. Végül a probléma elegáns megoldását Erdős Pál és Szekeres György mutatta meg, valamint becslést is adtak ez imént említett „elegendően nagyra”. A következőkben ismertetjük Erdős és Szekeres gondolatmenetét, amellyel megad egy felső korlátot, vagyis amellyel egyúttal bizonyítja is a kérdéses nagy ponthalmaz egzisztenciáját. Ehhez azonban további definíciókra van szükségünk.

Rögzítsünk a síkban egy (x, y) koordinátarendszert. Tekintsük a $H = \{p_1, p_2, p_3 \dots p_m\}$ ponthalmazt, amelyben az elemek az abszcisszájuk szerint vannak rendezve, növekvő sorrendben. Nevezzük H halmazt hegynek, amennyiben minden p_i ($1 < i < m$) pontja a $p_{i-1}p_i$ pontpárok által meghatározott egyenesek alatt helyezkedik el, és völgynek abban az esetben, ha $p_{i-1}p_i$ egyenesek felett. $k \in [1, 2, \dots, m]$ Jelölje $f(k, l)$ a legkisebb olyan számot, amely elemszámú ponthalmazban található vagy egy k -elemű hegy vagy egy l -elemű völgy. Egy másik alternatív, de egyenértékű definíció a következő:

Rendezett p pontok n -hegyet alkotnak: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} > \dots > \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

Rendezett p pontok n -völgyet alkotnak: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} < \dots < \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

Triviálisan látszik, hogy ezek is konvex halmazok. Na már most az előkészületeket megtéve rátérnénk a tétel bizonyítására.

10. Állítás. $\forall n \geq 4$ pozitív egész számra igaz, hogy létezik olyan $f(n)$ szám, hogy minden legalább $f(n)$ elemű általános helyzetű pontthalmazban található n pont konvex helyzetben.

10.1 Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $f(n) \leq f(n, n)$, mivel az előbb definiált hegyek, illetve völgyek konvex halmazok. Triviális az is, hogy $f(2, l) = f(k, 2) = 2$. A következő rekurzió belátásával kezdünk:

$$f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$$

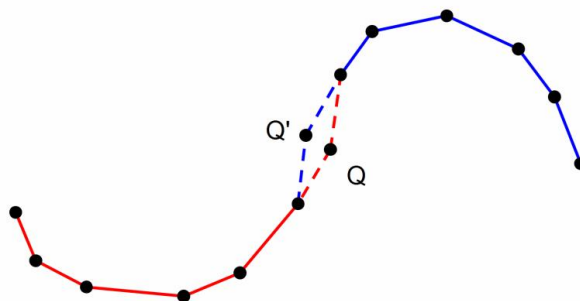
Ehhez vegyünk annyi pontot, mint amennyi a jobb oldalon van, ezen pontok halmaza H , és megmutatjuk, hogy ebben a halmazban található egy k -hegy vagy egy l -völgy. Jelölje P az összes lehetséges $(k-1)$ -elemű hegy bal végpontjainak a halmazát. Ekkor két eset áll elő, aszerint, hogy P halmaz mekkora.

Ha $|P| < f(k, l-1)$, akkor nyilván $|H/P| \geq f(k-1, l)$. Figyelembe véve, hogy H/P nem tartalmaz $(k-1)$ -hegyet, mivel kiszedtük az összes hegy egyik elemét, ezért tartalmaz l -elemű völgyt, vagyis az állítás teljesül.

Vagyis feltehetjük, hogy $|P| \geq f(k, l-1)$, ekkor viszont található egy $(l-1)$ -völgy is, (ha k -hegy található, akkor készen vagyunk) nevezzük ezt a halmazt P_1 -nek. Ennek a jobb szélső pontja egyúttal egy hegynek a bal vége is, amelyet nevezünk P_2 -nek. Ez azt jelenti, hogy vagy P_1 utolsó előtti pontja egészíti ki P_2 -t k -elemű hegyre, vagy P_2 második pontja P_1 -et l -elemű völgyre.

Ezzel a rekurziót beláttuk, amiből azonban következik az eredeti állítás is, hiszen azt vissza tudjuk vezetni tetszőleges k és l esetén a kiinduló értékekre.

□



7. ábra P_1 halmazt pirossal, míg P_2 halmazt kézzel tüntettük fel. A szaggatott vonalak a két lehetséges bővítést mutatják, attól függően, hogy a P halmazokat összekötő pont Q' -nek vagy Q -nak megfelelő helyzetben van-e.

Azonban ez a gondolatmenet többet is rejt magában, mint, amit mi kihasználtunk. Egy picit jobban megnézve egy konkrét becslés is következik ebből.

11. Állítás. $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$

11.1 Bizonyítás. A fenti állítás Erdős Pál és Szekeres György közös munkája, amelyet együtt fedeztek fel az előző bizonyítással és, ahogy látni fogjuk, valóban szoros kapcsolatban

áll vele, olyannyira, hogy első fontos lépés a következő egyenlőség belátása, amelyben a rekurzió lesz a segítségünkre:

$$f(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1 = \binom{k+l-4}{l-2} + 1, \text{ ahol } k, l \geq 3$$

Ehhez $k+l$ szerinti teljes indukciót alkalmazunk az előbb említett rekurziós formula alapján. Legyenek $k, l \geq 4$, olyan egész számok, amelyeknél $k+l$ minimális és az állítást még nem bizonyítottuk rájuk.

$$f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$$

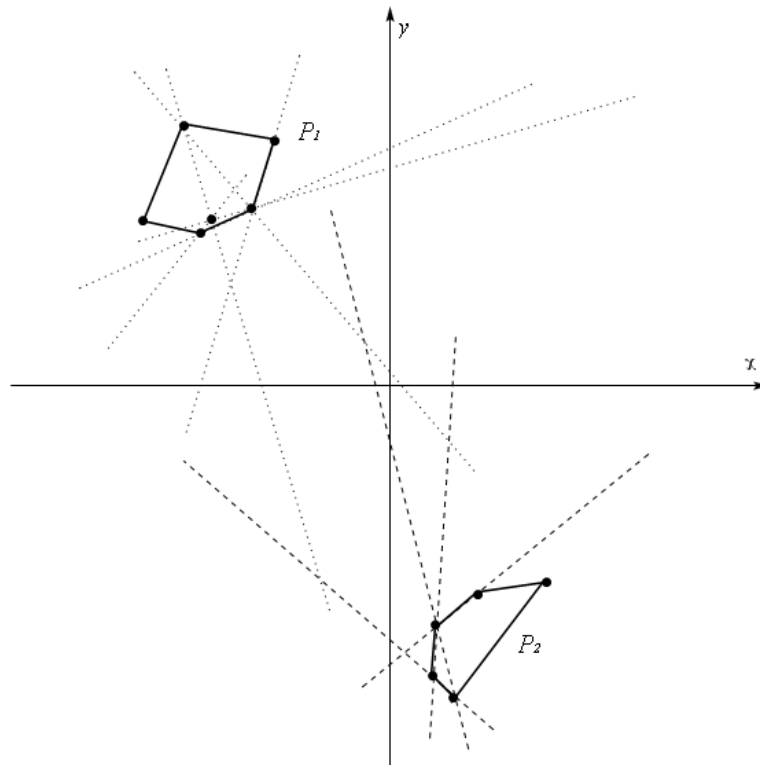
Az indukciós feltevést figyelembe véve azonosságokat felhasználva azonnal kapjuk, hogy:

$$f(k, l) \leq \binom{k+l-5}{k-3} + \binom{k+l-5}{k-2} + 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$$

Ezzel az állítás első felét be is láttuk, hogy: $f(k, l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$

Az egyenlőség belátásához előállítunk egy halmazt. Tegyük fel, hogy már sikerült megkonstruálnunk egy olyan P_1 halmazt, amelyben nincsen sem $(k-1)$ -elemű hegy sem l -völgy, illetve, egy olyan elemű P_2 halmazt, amelyben, pedig sem k -hegy, sem $(l-1)$ -elemű völgy nem található, valamint:

$$|P_1| = \binom{k+l-5}{k-3} \text{ és } |P_2| = \binom{k+l-5}{k-2}$$



8. ábra Az ábrán a bizonyításban leírt elrendezést szemléltetjük. P_1 halmaz minden pontpárja által meghatározott egyenes P_2 felett, míg P_2 minden pontpárja által meghatározott P_1 alatt halad.

Helyezzük el a P_1 halmazt az y -tengelytől balra, a P_2 halmazt, pedig a jobbra, és vigyük P_1 halmaz alá annyival, hogy az összes P_1 pontpárjai által meghatározott egyenes P_2 halmaz felett haladjon, az összes P_2 -beli pontpárok által determináltak, pedig P_1 alatt. A két halmaz egyesítéseként előálló P_0 halmazban, ha egy hegy tartalmazza P_1 egy pontját, akkor P_2 -ben már csak egy pontja lehet, és hasonlóan, ha egy völgy tartalmazza P_2 egy pontját, akkor P_1 -ben lehet csak egy pontja. P_0 -ban nincsen se k -hegy se l -völgy; ebből és az alapfeltevésekből következik, hogy:

$$f(k, l) \geq |P_0| + 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$$

Ebből és az előző levezetésből következik már az egyenlőség, és kimondhatjuk Erdősék becslését:

$$f(n) \leq f(n, n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1$$

□

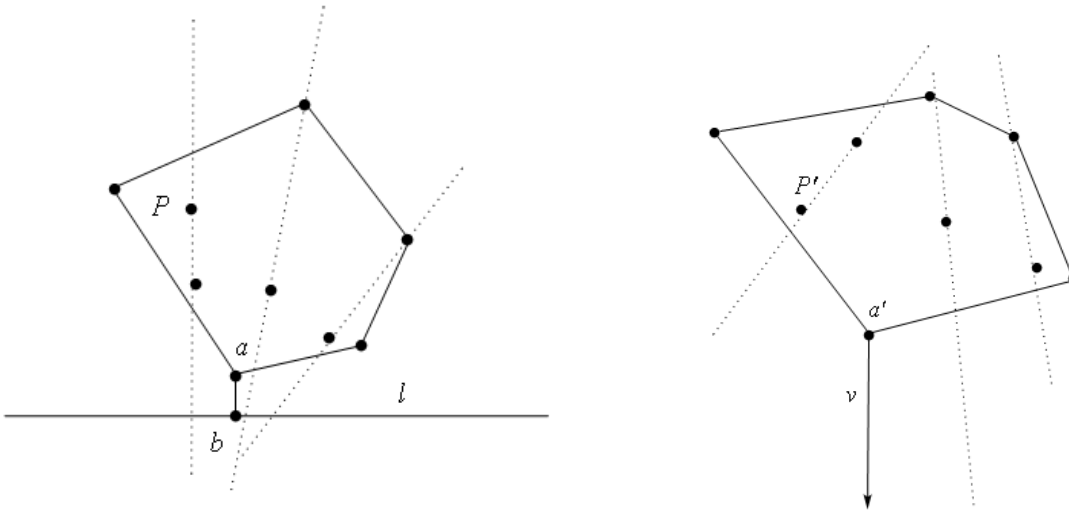
A bizonyítás alap gondolata rendkívül szép és tanulságos, ám egyszerű, amely tükrözi is egyúttal a téma jellegét. A felső becslésük „egyszerűsége” ellenére, a mai napig (2010) nem sikerült még lényegesen javítani azt. Tulajdonképpen közel hatvan évig nem is történt változás e tekintetben, egészen addig, míg Ronald Graham az Amerikai Matematikai Társaság korábbi elnöke és felesége, a szintén híres matematikus, Fan Chung javítani nem volt képes rajta. Az alábbi rövid táblázat összefoglalja az eddigi eredményeket:

Dátum	Szerzők	Eredmény
1935	Erdős Pál, Szekeres György	$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$
1998	Ron Graham, Fan Chung	$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}$
1998	Daniel Kleitman, Lior Pahter	$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 7 - 2n$
1998	Pavel Valtr, Tóth Géza	$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$
2005	Pavel Valtr, Tóth Géza	$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 1$

Amint látható számos próbálkozás volt, ám lényeges javítás nem történt. Jelentős előrelépést jelentett az észrevétel, hogy a fenti érvelésben kitüntetett szerepet játszó (x, y) koordinátarendszert tetszőlegesen választhatjuk. A felső korlát mindegyik esetben exponenciálisan nő, ahogy n tart a végtelenbe. A fenti javítások közül még egyet ismertetnénk, Tóth Géza és Pavel Valtr 1998-as bizonyítását:

12. Állítás. $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$

12.1 **Bizonyítás.** Legyen P általános helyzetű konvex ponthalmaz a síkon. Legyen továbbá a , P konvex burkának egy pontja. Legyen b egy P konvex burkán kívül eső olyan pont, amelyre fennáll, hogy $P/\{a\}$ pontok által meghatározott egyik egyenes sem metszi ab szakaszt. Végül legyen l egy egyenes, amelynek eleme b és nem érinti a konvex burkot.



9. ábra Az ábrán a projektív transzformációt szemléltetjük, a , a bal oldali P konvex halmaznak, a feltételeknek eleget tevő egyik pontja, l , pedig a kérdéses egyenes, amelyet a végtelenbe viszünk, és így végeredményül a jobb oldali ábrát kapjuk, ahol P' a P halmaz képe a transzformációt követően.

Alkalmazzunk egy projektív transzformációt, ami l egyenest a végtelenbe viszi, miközben ab szakasz egy v lefelé mutató félegyenes lesz és P -ből egy P' halmazt kapunk. Mivel a transzformált egyenes nem érintette a konvex burkot, így a részhalmazok konvexitásai változatlanok maradnak: $H' \subseteq P'$ konvex akkor, és csak akkor, ha $H \subseteq P$ halmaz is konvex volt. Abból kifolyólag, hogy b pontot így választottuk meg, $P'/\{a'\}$ pontpárjai által meghatározott egyenesek egyike sem metszi v -t. Vagyis, a $P'/\{a'\}$ ponthalmaz bármely m -hegye kiegészíthető a' -vel egy konvex $(m+1)$ -eleművé. (Az általánosság megsértése nélkül nyugodtan feltehető, hogy v egybeesik y tengely negatív félegyenesével) Ezek alapján, ha $P'/\{a'\}$ tartalmaz egy $(n-1)$ -hegyet vagy egy n -völgyet, akkor készen vagyunk, vagyis az előzőek alapján:

$$|P'/\{a'\}| \leq f(n, n-1) = \binom{n+(n-1)-4}{n-2} + 1 = \binom{2n-5}{n-2} + 1, \quad |P| \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$$

□

Eddig szó esett a felső becslések már a különböző javításairól is, de még bármiféle alsó becsléssel adósak vagyunk. Ez azért történt így, mert a jelenlegi általános sejtés az, hogy az alsóbecslés egyben a megoldást is jelenti, így jobbnak láttuk a végére hagyni ám így is csak vázlatosan térünk ki rá és inkább csak a konstrukció felületes ismertetésére koncentrálnak.

13. Állítás. $2^{n-2} + 1 \leq f(n)$

8.1 Bizonyításban leírtak értelmében fennáll: $\forall i: 0 \leq i \leq n-2$ van olyan $\binom{n-2}{i}$ elemű általános helyzetű P_i halmaz, amelyben nincs se $(n-i)$ -hegy, se $(i+2)$ -völgy. Tegyük fel továbbá, hogy P_i pontpárjait összekötő egyenesek meredeksége $-\pi/4$ és $\pi/4$ közé esik, mivel ha ez nincs így, akkor alkalmazhatunk merőleges affinitást. Ezt követően tekintsük az origó középpontú egységkörön azokat a p_i pontokat, amelyek a kör és azon egyenesek metszéspontjai, amelyek meredeksége:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{p}{4} - \frac{ip}{2(n-2)}$$

Feleltessünk meg minden egy pontnak az indexének megfelelő halmaz egy kis méretű példányát, majd tekintsük az így előálló halmazok unióját:

$$|P| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-2} P_i \right| = \sum_{i=1}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}$$

Leellenőrizhető, hogy az így előálló P halmazban nincs n konvex helyzetű pont. Ezzel a konstrukcióval állt elő Erdős Pál és Szekeres György a probléma megoldása során és tőlük ered az a sejtés is, hogy ez az alsó korlát nem javítható, vagyis a 10. állítás igazából egyenlőség. Ezt látszanak alátámasztani az ismert részeredmények is. Azonban maga a sejtés makacsul tartja magát; egyelőre még senkinek nem sikerült igazolnia vagy cáfolni, holott rengetegen próbálták már; és újabban, pedig még számítógépeket is használatba vesznek ez ügyben.

Bisztriczky Tibor és Fejes Tóth Gábor megfogalmazták a problémának egy lehetséges általánosítását, amikor is nem pontok konvex helyzetéről mondjuk ki az állítást, hanem konvex halmazok konvex helyzetéről. Jelölje F páronként diszjunkt konvex halmazok egy családját. Azt mondjuk, hogy $F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ konvex helyzetben van, ha nincs egyetlen olyan F_i sem, amelyik eleme lenne az F_j halmazok uniójának, ahol $1 \leq j \leq n$ és $i \neq j$.

14. Állítás. Minden $m \geq 4$ egész esetén létezik $F(m)$, amelyre igaz, hogy: akárhogyan veszünk fel $n \geq F(m)$ páronként diszjunkt konvex halmazt a síkon úgy, hogy bármely három konvex helyzetben van, mindig lesz m is, amelyik konvex helyzetben van.

A probléma egy további általánosítási lehetőségét kínálta üres konvex n -szögek egzisztenciájának kérdése elegendően nagy ponthalmazban, azonban Horton 1983-ban megmutatta, hogy megadható tetszőlegesen sok általános helyzetű pont a síkon, amelyek nem határoznak meg konvex hétszöget.

Ramsey-tétel

Ebben a fejezetben kicsit jobban eltolódik a hangsúly a valós sík geometriájától a gráfelmélet összefüggései felé, azonban, mint látni fogjuk igen szoros kapcsolat van a kettő között, magának, a címben szereplő tételnek a kapcsán is. A gráfelmélet alapfogalmait ismertnek tételezzük fel. Legelőször érdemes egy bevezető feladattal kezdeni:

15. Állítás Minden 6 pontú gráfban vagy van egy teljes 3-as, vagy egy teljes üres 3-as, azaz vagy van 3 olyan pont, hogy bármely kettő között halad él, vagy létezik 3 olyan pont, amelyek közül semelyik kettő között nincs él.

15.1 Bizonyítás Válasszunk ki egy tetszőleges v_1 csúcst. Ezen kívül a gráfnak még 5 csúcsa van, vagyis a következő lehetőségek állnak fenn: vagy van 3 olyan csúcs, amibe vezet él v_1 -ből, vagy van 3 olyan, amibe nem. Vizsgáljuk először az első esetet: legyenek ezek a csúcsok rendre v_2, v_3, v_4 , ha ezek közül bármelyik kettő között halad él, akkor van egy teljes 3-asunk, ha viszont nem vezet, akkor v_2, v_3, v_4 egy teljes üres 3-as. Hasonlóan érvelhetünk a második esetben is, csak ott nem azt nézzük, hogy vezet-e él a három pont között, hanem az, hogy van-e olyan két pont közülük, amelyek között nincs él.

□

A fenti egyszerű bevezető-feladat után, rögtön ki is mondhatjuk Ramsey tételének egyik viszonylag szűkebb értelmű megfogalmazását:

16. Állítás Adott k, l pozitív egészekhez \exists egy olyan legkisebb $r(k,l)$ szám, hogy $n \geq r(k,l)$ esetén az n pontú teljes gráf, K_n éleit két színnel, pirossal és kézzel kiszínezve van a gráfban egy piros K_k vagy egy kék K_l .

Rögtön az is látszik, hogy miképpen kapcsolódik az előbbi feladat magához a tételhez, hisz a hatpontú gráfot vehetjük egy teljes gráfnak is, ahol pirosra vannak színezve azok az élek, ahol eredetileg is volt él, és kékre azok, amelyek az eredetiben nem szerepeltek. Vagyis az előbb beláttunk egyet a Ramsey-tétel által tárgyalt végtelen sok eset közül, miszerint, hogy $r(3,3) = 6$. Nem nehéz mutatni K_5 -nek olyan színezését, ahol nincs egyszínű háromszög.

Mielőtt a tétel állításának mélyebb tárgyalásába kezdenénk előbb célszerű tenni ismét egy kis történeti kitekintést. Frank Plumpton Ramsey angol matematikus 1903-ban született és kimondottan rövid élete ellenére (26 évet élt) maradandót alkotott, nem csak a matematikában, hanem a filozófiában és a közgazdaságtanban egyaránt. Cambridgeben született, és itt is tanult matematikát. Sokoldalúsága hamar megmutatkozott, foglalkozott sok egyéb mellett például pszichoanalízissel is és tartós barátság fűzte John Maynard Keyneshez, a neves közgazdászhoz, aki közbenjárásának köszönhetően már 1924-ben a cambridge-i King's College tagjává választották. Keynes bátorította egyúttal arra is, hogy foglalkozzon mélyebben is a közgazdaságtannal, amely iránt Ramsey már 16 éves kora óta érdeklődött. Visszatérve a matematikai munkásságára, az imént említett tételt maga Ramsey csak segédtételként bizonyította be egy nagyobb, átfogó állítás felé vezető úton, amely elsőrendű logikával kapcsolatos. Az állítás azonban, amelyet ő segédtételként használt azonban idővel túlnőtte ezt a titulust, ugyanis mára a kombinatorika egy egész ága fejlődött ki belőle, amely témakörben manapság is folytatnak kutatásokat újabb és újabb eredményeket felmutatva. Hogy miben is áll Ramsey tételének nagyszerűsége? Ezt nehéz megfogalmazni, azonban valami olyasmit állít, hogy minden elegendően nagy irreguláris struktúra tartalmaz adott méretű reguláris struktúrát, vagyis hogy minden elég nagy rendezetlenségben is van valamekkora rend. Ez nem csak matematikai értelemben érdekes, hanem filozófiai tartalmában is. Azonban, hogy a témától ne távolodjunk el annyira: annak ellenére, hogy az állítás elsődlegesen gráfokról szól, meglepően általános érvényű: alkalmazható sorozatok monoton részsorozatára éppúgy, mint adott esetben konvex halmazokra. Hosszas bevezetés után lássuk a tétel bizonyítását:

16.1 Bizonyítás A bizonyításhoz teljes indukciót használunk. Az nyilvánvaló, hogy létezik $r(k,2)$ és $r(2,l)$. Tegyük most fel, hogy létezik $r(t,s)$, minden olyan t és s számokra, amelyekre igaz, hogy $t \leq k$ és $s \leq l$. Vegyünk egy olyan K_n teljes gráfot, ahol:

$$n \geq r(k-1,l) + r(k,l-1),$$

és megmutatjuk, hogy K_n élei kiszínezhetők úgy két színnel (kékkel és pirossal), hogy vagy van benne kék K_k , vagy piros K_l . Tekintsük K_n teljes gráf egy tetszőleges v csúcsát. Legyenek a v -ből kimenő kék élek végpontjait k_1, k_2, \dots, k_m , a piros élek végpontjai, pedig p_1, p_2, \dots, p_w . A feltételből adódóan vagy $m \geq r(k-1,l)$, vagy $w \geq r(k,l-1)$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy az első teljesül. Ebben az esetben vagy van piros K_l és készen vagyunk, vagy pedig van kék K_{k-1} k csúcsok között, amihez v -ét hozzávéve K_k -át kapunk, vagyis valóban színezhető a gráf.

□

17. Állítás $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$

17.1 Bizonyítás A bizonyításhoz ismételtelen teljes indukciót használunk. Az triviálisan látszik, hogy $r(k,2) = k$, továbbá $r(2,1) = 1$. Tegyük fel tehát, hogy igaz az állítás minden olyan $r(t,s)$ esetén, ahol $t \leq k$ és $s \leq l$.

$$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

□

Ha vetünk egy pillantást a fenti gondolatmenetünkre, feltűnhet, hogy teljesen ugyanúgy bizonyítottuk be a Ramsey-számok egzisztenciáját, mint ahogyan Erdős és Szekeres érvelt. Ez nem véletlen. Először is észrevehető a tartalmi összefüggés, ugyanis mindkét tétel egy rendezetlen struktúra bizonyos tulajdonságú részstruktúráinak a létezését mondja ki, azzal a feltétellel, hogy a kiinduló rendszer elég nagy. Amikor Szekeres György 1932-ben újra felfedezte Ramsey ezen tételét, ő már nem élt. Erdősék jelentős eredménye nagyban hozzájárult a tétel népszerűsítéséhez. Ennek a felső korlátnak a javítására azóta több eredmény is született:

Dátum	Szerzők	Eredmény
1986	Rödl	$r(k,l) \leq \frac{c}{(\log(k+l))^d} \binom{k+l-2}{k-1}$
1987	Thomason	$r(k,k) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \binom{2k-2}{k-1}$
2009	Conlon	$r(k,k) \leq \frac{1}{k^{c \log k / \log \log k}} \binom{2k-2}{k-1}$

A tételben szereplő számokat, ahogy azt korábban említettük *Ramsey-számoknak* nevezzük. Ezek a számok adják meg azt, hogy mekkora az a minimális teljes gráf, amelyet bárhogyan színezzünk lesz benne kék K_k vagy piros K_l . Relatíve egyszerű felső becslésünk adódik a bizonyításból, azonban felmerül a kérdés, hogy tudunk-e adni alsó becslést? A válasz igen, és erre elsőként Erdős Pál adott bizonyítást, arra az esetre, amikor $k = l$, a Rényi Alfréd és általa kifejlesztett valószínűség-számítási módszert használva:

18. Állítás $k \geq 3, \quad r(k, k) \geq 2^{k/2}$

18.1 Bizonyítás Jelöljük g_n -el, a különböző n pontú gráfok számát, $g_{n,k}$ -val, pedig azoknak az n pontú gráfoknak a számát, amelyekben van K_k részgráf. Könnyen látszik, hogy:

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}} \text{ és } g_{n,k} \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}.$$

Jelölje P annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott n pontú gráfban található K_k .

$$P = \frac{g_{n,k}}{g_n} \leq \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} < \frac{n^k}{k! 2^{\binom{k}{2}}}$$

Ebben az esetben tegyük fel, hogy $n < 2^{k/2}$. Ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$P < \frac{n^k}{k! 2^{\binom{k}{2}}} = \frac{2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

Ha $k > 2$. Hasonlóan írható fel annak a valószínűsége is, hogy a gráfban van üres K_k , és ezek alapján annak a valószínűsége is kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott n pontú gráfban nincs sem teljes K_k sem üres K_k : $P' = 1 - 2P > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Vagyis biztosan van olyan n pontú gráf, amely nem tartalmaz egyikből se, azaz: $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

□

Vagyis ezzel eljutottunk oda, hogy a szimmetrikus Ramsey-számokról, az $r(k, k)$ alakúakról, a következőt tudjuk:

$$2^{\frac{k}{2}} \leq r(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \sim 4^k$$

Első ránézésre is feltűnik, hogy igen nagy különbség van az alsó és a felső becslés értékei között. A Ramsey-számok pontos értékeinek megállapításához, jelenlegi tudásunk szerint, szükséges a gráfok összes lehetséges színezését szisztematikusan ellenőrizni. Ha ennél az eljárásnál nem találunk hatékonyabb módszert, akkor valószínűleg már $r(6, 6)$ értéke is rejtély marad, ugyanis, ahogy k növekszik a vizsgálat exponenciálisnál is gyorsabban növekedve válik egyre jobban számításigényessé. Ezt a komoly kihívást jól illusztrálja Erdős Pál egy mára szállóigévé vált megállapítása erről:

„Erdős arra kért, képzeljük el, hogy egy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj érkezik a Földre, és $r(5,5)$ értékét követelik, különben elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben igényelné, hogy fogjuk hadra az összes számítógépet és az összes matematikust és próbáljuk meg megtalálni a keresett értéket. De tegyük fel, hogy e helyett, az idegenek $r(6,6)$ értékére lennének kíváncsiak; ebben az esetben, viszont meg kéne próbálnunk minden erőnkkel legyőzni őket.”

/Joel Spencer/

Az alábbi táblázat Stanisław Radziszowski egy néhány évvel korábbi Ramsey-számokról írt áttekintésének egy részletét tartalmazza:

$r(a,b)$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	9	14	18	23	28
4	1	4	9	18	25	35-41	49-61	56-84
5	1	5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165	113-298	127-495
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	216-1031
8	1	8	28	56-84	101-216	127-495	216-1031	282-1870

Ezek után rátérhetünk a tétel egy általánosítására, amely nem csupán két, hanem tetszőleges számú színnel való színezésről fogalmaz meg egzisztenciát:

19. Állítás Adott k_1, k_2, \dots, k_m egészek esetén létezik egy legkisebb olyan $r(k_1, k_2, \dots, k_m)$, hogy $n \geq r(k_1, k_2, \dots, k_m)$ esetén m színnel színezve K_n -et, lesz a gráfban vagy első színű K_{k_1} , vagy második színű K_{k_2} , stb. Az is fennáll továbbá, hogy:

$$r(k_1, k_2, \dots, k_m) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^m (k_i - 1) \right)!}{\prod_{i=1}^m (k_i - 1)!}$$

19.1 Bizonyítás Az állítás egzisztenciát kimondó részét látjuk csak be, teljes indukcióval és egy egyszerű korlát megadásával. Jelöljük az m -színnel színezett Ramsey-számot $r(k)_m$ -mel, hogyha $k_1=k_2=\dots=k_m$. Legyen k a k_i számok közül a legnagyobb.

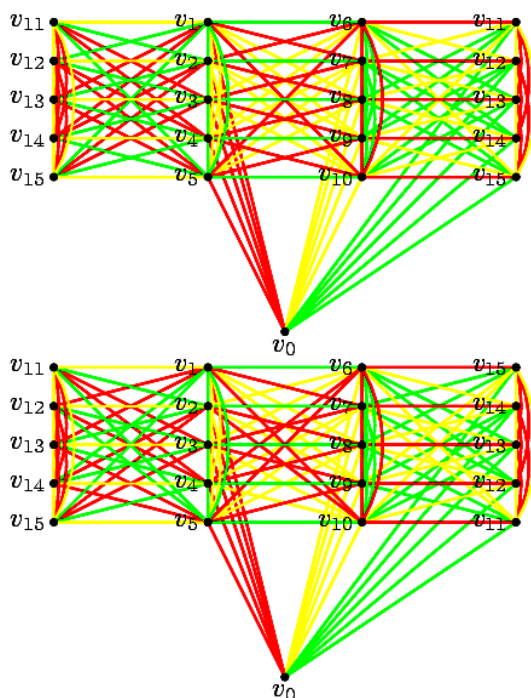
$$r(k_1, k_2, \dots, k_m) \leq r(k)_m \leq r(k, r(k, r(k, r(\dots))))$$

A fenti egyenlőtlenség fennáll, ugyanis igaz az alábbi egyenlőtlenség, amelyet rekurzívan alkalmazva kapjuk a fenti összefüggést:

$$r(k)_m \leq r(k, r(k)_{m-1})$$

□

Az itt kimondott egyenlőtlenség bizonyításától mi most eltekintünk. Azonban a mostani megfogalmazással egy újabb példát tudunk említeni, annak alátámasztására, amit már korábban megfogalmaztunk, hogy mennyire is számításiigényes a Ramsey-számok meghatározása. Tekintsük a következő ábrát!



10. ábra. A Ramsey-számok értékeinek meghatározáshoz szükséges számítások nehézségét illusztrálja a fenti ábra: összesen két olyan három színt használó színezés létezik 16-csúcsú teljes gráf esetén, amely nem tesz eleget annak a feltételnek, hogy a színezésben lesz egyszínű háromszög. Azaz: $r(3,3,3) > 16$. Ezek megtalálásához szükséges volt az összes lehetséges eset végigvizsgálása, és ahogy mondani szokás: *egymillió példa sem igazol, ám egyetlen ellenpélda már cáfol*.

Most, hogy a Ramsey-tételbe kicsit mélyebb betekintést nyertünk vizsgáljuk meg egy nevezetes következményét, illetve néhány alkalmazását. Legelőször is vizsgáljuk az $r_n = r(3)_n$ számokat. Ezek a számok azt jelentik, hogy ha egy r_n csúcsú teljes gráf éleit n színnel színezzük, akkor lesz benne egyszínű háromszög. Nézzük meg most, hogy tudunk-e mondani valamit, ezekről a számokról.

20. Állítás $r(3)_n \leq \lfloor en! \rfloor + 1$

20.1 Bizonyítás A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. Defináljuk az $f(n)$ függvényt a következőképpen: $f(1) = 2$, valamint $f(n+1) = (n+1)f(n) + 1$. Megmutatjuk, hogy $K_{f(n)+1}$ éleit, ha n színnel színezzük, akkor lesz egyszínű háromszög. Ha $n = 1$, akkor triviálisan igaz az állítás. Ezzel az indukció bázisa adott. Tételezzük most fel, hogy egy adott n -ig minden egészre igaz az állítás, miszerint $K_{f(n)+1}$ kielégíti az előző feltételeket. Tekintsük most $K_{f(n+1)+1}$ teljes gráf egy $n+1$ színű színezését. Legyen a gráf egy tetszőleges pontja v . Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{n+1}$ sorra azon további pontok halmaza, amelyek v -be az első, a második, ... $n+1$ -edik színnel vannak bekötve. Ekkor nyilván teljesül:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| = f(n+1) = (n+1)f(n) + 1 \Rightarrow \exists A_i, |A_i| \geq f(n) + 1$$

Ha A_i pontjai közül bármelyik kettő között lenne i . színű él, akkor lenne i . színű háromszög. Máskülönben A_i pontjai n színnel vannak színezve, elemszámuk $f(n)+1$, vagyis az indukciós feltevésből következik, hogy van benne monokromatikus háromszög.

Figyelembe véve, hogy: $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, a következő összefüggést kapjuk:

$$f(n)+1 = n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) + 1 = \lfloor en! \rfloor + 1 \leq en! + 1 = n! \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) + 1$$

□

A Ramsey-számok felhasználásával és az előző gondolatmenet folytatásával relatíve egyszerűen bizonyítható Schur nevezetes tétele, ez azonban az olvasóra vár.

21. Állítás Az $S = \{1, 2, 3, \dots, r_n\}$ halmazt bárhogyan osztjuk fel n darab S_1, S_2, \dots, S_n diszjunkt részhalmazra, $(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S)$, valamelyik részhalmazban megoldható az $x + y = z$ egyenlet, azaz $\exists i, x, y, z$, hogy $x, y, z \in S_i$ és $x + y = z$.

A tétel bizonyításától ez esetben is eltekintenénk, ám azt meg kell jegyezni, hogy most már valóban sehol sincs szó az állításban teljes gráfokról, ahogyan azt korábban ígértük. Hasonló alkalmazásokat lehetne még bőven említeni, nyomatékossítás céljából, hogy megmutassuk mennyire általános és fundamentális is a Ramsey-tétel, amelyet, mint az remélhetőleg az eddigiekből kiderült, a halmazelmélet terminológiáját használva lehetne legjobban megfogalmazni; ahogy azt most mi is kimondjuk:

22. Állítás Ha r, k_1, k_2, \dots, k_s pozitív egész számok, akkor van olyan legkisebb $R_r(k_1, k_2, \dots, k_s)$, pozitív egész szám, hogy igaz a következő állítás: ha tetszőleges S halmazra $S = R_r(k_1, \dots, k_s)$ és S összes r -elemű részhalmazának halmazát s részre bontjuk, akkor $\exists i$, amelyre igaz, hogy van az alaphalmaznak olyan k_i elemű részhalmaza, aminek összes r -elemű részhalmaza az i -edik osztályba esik.

Ez a megfogalmazás az egyszerű gráfoknál sokkal általánosabb struktúrákat használ, konkrétan uniform-hipergráfokat. Az iménti általánosított Ramsey-tétel sokoldalúságát egy már korábban ismert tétel kapcsán fogjuk illusztrálni, mégpedig az előző fejezet címéül szolgáló Erdős-Szekeres-tételre adunk két új, az eddigőtől merőben eltérő levezetést. Az első bizonyítás S. Johnstontól származik:

23. Állítás $\forall n \geq 4$ pozitív egész számra igaz, hogy létezik olyan $f(n)$ szám, hogy minden legalább $f(n)$ elemű általános helyzetű pontthalmazban található n pont konvex helyzetben.

23.1 Bizonyítás Tekintsünk $m \geq R_3(n, n)$ általános helyzetű pontot a valós euklideszi síkon, és az általuk meghatározott összes 3-elemű részhalmazt, háromszöget, osszuk két osztályba a következő feltétel szerint: az első osztályba azok kerülnek, amelyek belsejében páros, a másodikba azok, amelyek belsejében, pedig páratlan sok pont van. Ramsey-tétel értelmében létezik n pont, amelyek ugyanabba az osztályba esnek. Az állítás az, hogy ezek a pontok szükségszerűen konvex helyzetben vannak. Tegyük fel ugyanis, hogy van közöttük négy pont (v_1, v_2, v_3, v_4) olyan elrendezésben, hogy a negyedik pont (v_4) a másik három által meghatározott háromszög belsejében van. Ekkor $v_1v_2v_3$ háromszög belsejében pontosan eggyel több pont van, mint a $v_1v_2v_4, v_1v_3v_4$ és $v_2v_3v_4$ háromszögek belsejében összesen, ami azt jelenti, hogy $v_1v_2v_3$ háromszögben lévő pontok számának paritása biztosan ellenkezője $v_1v_3v_4$ háromszögben található pontok számának paritásának (páros + páros + páros + 1 = páratlan, valamint páratlan + páratlan + páratlan + 1 = páros) Ez azonban ellentmondást jelent, hiszen mindegyik hármas ugyanabba az osztályba esik; azaz a pontok konvex helyzetben vannak.

□

23.2 Bizonyítás Az $n = 4$ esetet már a második fejezetben beláttuk, így feltehetjük, hogy $n \geq 5$. Tekintsünk $n \geq R_4(n,n)$ általános helyzetű pontot a síkon és osztályozzuk az összes 4-elemű részhalmazt, aszerint, hogy konvex helyzetűek vagy sem. Ramsey tétele kimondja, hogy van olyan n -elemű részhalmaz, amely összes négyelemű részhalmaza ugyanabba az osztályba esik. A 8. állítás értelmében, ebben a halmazban található legalább egy konvex négyes, amelyből következik, hogy az összes négyes konvex helyzetben van, vagyis az n pont konvex helyzetben van.

□

Ezen a ponton érdemes egy kicsit visszatekinteni honnan hová jutottunk. Zárótételként megjegyezzük, hogy a Ramsey-tétel érvényességének nem szükséges feltétele az alaphalmaz végeessége, éppen ezért az állításnak megfogalmazható végtelen halmazokra érvényes formában is:

24. Állítás Legyen H megszámlálhatóan végtelen halmaz és soroljuk $H^{(n)}$ (az alaphalmaz n -elemű részhalmazait) elemeit r osztályba. Ekkor igaz az, hogy létezik olyan R részhalmaz, amelynek n -elemű részhalmazai ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak.

Ezzel az állítással záránk ezt a rövid bevezető jellegű írományt; reméljük, hogy sikerült némi betekintést nyújtani a kombinatorikus geometria problémakörébe, valamint ennek kapcsán néhány mélyebb eredményt bemutatni.

„Egy matematikai elméletet - mint egyébként minden más dolgot - könnyebb felfogni, mint elmagyarázni a szépségét”

/Arthur Cayley/

Feladatok

1. feladat Egy n -oldalú sokszögben legfeljebb hány hegyesszög lehet?
2. feladat Legfeljebb hány metszéspontja van a síkon n egyenesnek?
3. feladat (*Steiner* 1826) Legfeljebb hány részre osztja a síkot n egyenes?
4. feladat Adott a síkon 5000 általános helyzetű pont. Mutassuk meg, hogy van 1000 olyan konvex négyszög, melyek csúcsai ezek közül a pontok közül valók, és a négyszögeknek nincs közös pontjuk.
5. feladat* (*Erdős, Szekeres*) Bizonyítsuk be, hogy a valós számok minden $k^2 + 1$ tagú sorozata tartalmaz $k + 1$ tagú monoton részsorozatot.
6. feladat* Bizonyítsuk be, hogy létezik k hosszúságú monokromatikus út, ha két színnel színezzük a $\left\lfloor \frac{3k+1}{2} \right\rfloor$ pontú teljes gráfot.
7. feladat* (*Nelson* 1950) Bizonyítsuk be, hogy három színnel színezve a síkot mindig található két egyszínű pont egymástól egység távolságra.
8. feladat Adott a síkon n pont, melyek nem illeszkednek egy körvonalra, és a pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Igazoljuk, hogy van olyan körvonal, amely a pontok közül pontosan háromra illeszkedik.
9. feladat Adjunk meg minden pozitív n esetén $2n$ pontot a síkon úgy, hogy azon egyenesek száma, melyek pontosan két pontra illeszkednek, éppen n legyen.
10. feladat* Mely $n \geq 3$ egész számok esetén adható meg n pont a síkon úgy, hogy semelyik 3 nem esik egy egyenesre, és a konvex burkuk bármely 3 csúcsa által meghatározott háromszög belsejébe közülük pontosan 1 esik?
11. feladat Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex poliéder minden lapja öt- vagy hatszög, akkor a hatszögek száma 12.
12. feladat Mutassuk meg, hogy egy körbe n húrt behúzva a kapott tartományok kiszínezhetők két színnel.
13. feladat Adjunk meg 8 pontot a síkon úgy, hogy közülük semelyik 5 se alkosson konvex ötszöget.
14. feladat Mutassunk K_5 -nek olyan színezését, amelyre igaz, hogy nem tartalmaz monokromatikus háromszöget.
15. feladat (*Melchior* 1940) Mutassuk meg, hogy a valós síkon $n \geq 5$ esetén a közös pontok száma legalább 3.
16. feladat Hány metszéspontja van egy szabályos konvex n -szög átlóinak?
17. feladat* Egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlók háromszögekre bontanak fel. A sokszög minden csúcsa páratlan sok ilyen háromszög csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög oldalszáma 3-mal osztható.
18. feladat* (*IMO* 1964) 17 ember mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról a témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan egyén, akik közül bármely kettő azonos témáról levelez.

Irodalomjegyzék

- [1] Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról, Köz. Mat. Lapok 24 (1962), 1-9.
- [2] N. G. de Bruijn, P. Erdős: On a combinatorial problem, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 51 (1948), 1277-1279
- [3] N. E. Steenrod: Solution 4065 / Editorial Note, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 170-171
- [4] P. Erdős: Problem 4065, „Problems for solution: 4064-4069”, Amer. Math. Monthly 50, (1943) 65
- [5] L. M. Kelly: A solution of the Sylvester-Gallai problem of J. P. Serre, Disc. and Comp. Geometry 1 (1986) 101-104
- [6] J. Csima, E. Sawyer: There exist $6n/13$ ordinary points”, Disc. and Comp. Geometry 9. (1993) 187-202
- [7] J. Pach, G. Tóth: A generalization of the Erdős-Szekeres theorem to disjoint convex sets, Disc. and Comp. Geometry 19 (1998), 437-445
- [8] G. Tóth, P. Valtr: Note on the Erdős-Szekeres theorem, Disc. and Comp. Geometry 19 (1998) 457-459
- [9] J. Pach, G. Tóth: Erdős-Szekeres-type theorems for segments and non-crossing sets, Geometria e Dedicata 81 (2000), 1-12
- [10] Lovász L. Pelikán J. Vesztegombi K: Diszkrét matematika, Typotex 2006.
- [11] P. Ungar: $2N$ non collinear points determine at least $2N$ directions, J. Combin. Theory Ser. A33 (1982) 343-347
- [12] L. M. Batten, A. Beutelspacher: The theory of finite linear spaces, Cambridge University Press 1993.