A „Trinomiális együtthatókról”

És a Pascal-háromszög egyéb általánosításairól

A binomiális együttható fogalma abból ered, hogy két szám összegének egész hatványait ezekkel lehet felírni a két szám hatványaival. Például: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

A kérdés: ilyen alapon lehetnek-e „trinomiális együtthatók”, vagyis olyan számok, amelyek három szám összegének egész hatványainak együtthatói?

Három szám összegének hatványai

Kezdjük a négyzettel:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Itt látszik, hogy ezt nem lehet „lineárisan ábrázolni”. Háromágú képet kapunk. Legalább is ezt várnánk el.

Pascal-tetraéder...

Készítsünk egy olyan tetraédert, amelyben egy elem azt jelenti, hogy hányféleképpen választhatunk ki n dolog közül k-t és a megmaradóból m-et.

Amikor egy háromtagú összeg n-edik hatványát vesszük, akkor minden tagban a kitevők összege n lesz. Hiszen amikor a négyzetet zárójelekre bontjuk, mindegyik zárójelből kiválaszthatjuk az a, b, c valamelyikét.

Tehát a cél, hogy a háromtagú összeg hatványának n-edik hatványban a tagokat ábrázoljuk.

Tegyük fel, hogy a c-k közül nem választunk ki egyet sem! Ekkor sorra ezeket az értékeket kapjuk: a^n, $a^{n-1} \cdot b, \ldots, b^n$.

De ha c-t egyszer választjuk ki, eggyel rövidebb sort kapunk: $c \cdot a^{n-1}$, $c \cdot a^{n-2} \cdot b, \ldots, c \cdot b^{n-1}$.

$\vdots$

És végül ha a c-k közül n-et választunk, akkor már csak egy hosszúságú lesz a sor: c^n.

Például $n = 3$ esetén (a trinomokkal együtt) kitöltve így néz ki a kép:

$$\begin{array}{llll}
a^3 & & & \\
 & 3a^2 \cdot c & & \\
3a^2 \cdot b & & 3a \cdot c^2 & \\
 & 6abc & & c^3 \\
3a \cdot b^2 & & 3bc^2 & \\
 & 3b^2 \cdot c & & \\
b^3 & & &
\end{array}$$

... vagy Pascal-kocka?

Most bebizonyítjuk, hogy ezek olyan ,,tetraédert" alkotnak, amelyben egy szám a fölötte levők közül annak a háromnak az összege, amelyek a legközelebb állnak hozzá. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy az n-edik szintig teljesül ez az állítás, azaz az első n szint mindegyike tartalmazza a háromtagú hatványok együtthatóit. (Az első néhány szinten ez tényleg igaz)

Tekintsük az $(n+1)$-edik szintet. Az $(a+b+c)^{n+1}$ egy tagját az $(a+b+c)^n$-ből úgy kapjuk, hogy az eddigi szorzatot meg kell ezt szorozni még $(a+b+c)$-vel. a-val megszorozva a következő sorban az egyik irányba ,,mozdulnak". b-vel megszorozva a következő sorban egy másik irányba mozdul, és hozzáadódik ahhoz, ahol már van érték. c-vel megszorozva meg egy harmadik irányba megy, és ismét hozzáadódik a szám. Ez pedig nem más, mintha minden számot lefelé, mindhárom irányba elvittük volna. (Lásd: A binomiális együtthatók és a Pascal-háromszög kapcsolata.)

A Pascal-tetraédernek egy oldala a Pascal-háromszög, mivel a harmadik irányból nem ,,érkezik" szám, ami szorzótényezőként szerepelne.

Mivel a Pascal-háromszöget is lehet nevezni Pascal-téglalapnak, -ötszögnek, stb., ugyanúgy a Pascal-tetraéder is nevezhető Pascal-kockának és ,,Pascal-dodekaédernek". (Mivel ezeknél is három lap találkozik a csúcsokban).

Hányféleképpen is?

Régi Pascal-háromszöges feladat a következő: *Hányféleképpen lehet A-ból B-be eljutni egy négyzetrácson, ha csak felfelé és jobbra léphetünk egységnyivel?* A válasz a Pascal-háromszög téglalapba rendezésén alapul.

De ha a Pascal-tetraéder nevezhető Pascal-kockának, akkor meg lehet oldani a feladat térbeli megfelelőjét. amely így szól: *Hányféleképpen lehet az A térbeli rácspontból a B térbeli rácspontba eljutni, ha csak fel, jobbra és előre léphetünk egységnyi lépésekkel?*.

A régi válasz úgy szólt, hogy hányféleképpen választható ki $x+y$ lépésből y felfele... Az új kérdés pedig így szól: *Hányféleképpen választható ki $x+y+z$ lépésből y felfele, és a maradék $x+z$-ből z előre?*

$x+y+z$-ből y fel $\binom{x+y+z}{y}$ féleképpen választható ki. $x+z$-ből meg z esetén $\binom{x+z}{z}$ féle van. (Ez a megfogalmazás hasonlít arra, ahogyan az együttható-tetraédert hoztunk létre.)

Ez összesen $\binom{x+y+z}{y}\binom{x+z}{z}$ eset.

Ezzel már akkor akár a Trinomokat is felírhatjuk három szám együtthatójaként, ha tudjuk, hogy a három szám ezzel a felírással $x+y+z$, $x+z$, z. Ha a, b, és c e három szám, a trinom $\binom{a}{a-b}\binom{b}{c}=\binom{a}{b}\binom{b}{c}$.

És a visszatérés

És a legfontosabb probléma: egy szinten a számok összege mindig 3-hatvány.

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy az n-edik emeleten 3^n:

1. A 0-dik szinten az összeg $1 = 3^0$.
2. Az n-ediken igaz. Az $n+1$-edikre minden szám háromszor megy le. Tehát megháromszorozódik.

Most már csak azt kell tisztázni, hogy miként alkalmazhatók a trinomok mint együtthatók.

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \cdot a^i b^j c^{n-i-j} \right).$$

(Az $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ mintájára.)

Pascal-gúlák

Ha pedig a Pascal-tetraéder háromszög alapú, miért ne lehetnének négyszögalapú, ötszögalapú, stb. **Pascal-gúlák**?

A Pascal-gúlák gondolata megragadó, de (szerintem) nem olyan kézzelfoghatóak, mint a Pascal-tetraéder. Ugyanis a négyszög alapú, például már a második emeleten tartalmaz középső elemet, míg a háromszög csak a harmadikon, s míg a többi középen azt a számot tartalmazza, ahány szögű az alapja, a háromszögalapúnál viszont egy szerény 6-tal kezdi a közepét.

A Pascal-szimplex és a Quatronomok

A Quatronomok megmutatják $(a+b+c+d)$ n-edik hatványában azt, hogy a tagok hányszorosa szerepel, a Pascal-szimplex pedig tetraéder-szeletekből álló „torony”, amelyben egy új szeletbe az előzőből felfelé, előre-le, jobbra-hátra-le, balra-hátra-le mozog; éppen úgy, mint a Pascal-tetraéderben. (Szimplex: a 2-dimenziós szimplex a háromszög; az n-dimenziós szimplex általában azt jelenti, hogy az $(n-1)$-pontú $(n-1)$-dimenziós szimplex minden csúcsát összekötöm egy n-edik ponttal. Ez esetben a 4-dimenziós szimplexről van szó.)

E kettő azonossága hasonlóan bebizonyítható úgy, hogyan azt a trinomokkal tettük, de a tagok 4 irányba mozdulhatnak.

Az is bebizonyítható, hogy egy szeletben a tagok összege négyhatvány, az előző bizonyítással, illetve a három dimenziós esetével összehangolva.

Természetesen ez akárhány dimenzióra átvihető. (De – csak zárójelben – lehet-e ilyesmi alkotni például végtelen dimenzióban? Vagy maga az ötlet is egészen irreális?)

Egyéb általánosítási ötletek

Kicsit más témájú kérdés a következő:

Készítsünk táblázatot arról, hogy egy n-dimenziós szimplexnek hány k-dimenziós oldala van!

Aki otthonosan mozog több dimenzióban is, és követte az eddigieket, az beláthatja, hogy ebből $\binom{n}{k}$ darab van, ami minden n-re és k-ra táblázatba rendezve a Pascal-háromszöget adja.

Vajon el lehet-e ezt játszani kockával is?

Vigyáznunk kell! A négyzet térbeli megfelelője nem csak a kocka, hanem az oktaéder is, a négydimenzióban pedig már három megfelelője is van a kockának! Az a kérdés sarkalatos része, hogy mit értünk n-dimenziós kockán, oktaéderen!

Egy másik észrevétel az, hogy ha a Pascal-háromszög egyik oldalával párhuzamos szeleteket nézünk, akkor a ,,pontszámokat", a ,,szakaszszámokat", a ,,háromszögszámokat", a ,,tetraéderszámokat" és egyáltalán az ,,n-dimenziós szimplexszámokat" kapjuk. (Ezek:

pontszámok: 1, 1, 1, 1, ... (0-dimenziós szimplexszámok)

szakaszszámok: 1, 2, 3, 4, ... (1-dimenziós szimplexszámok)

háromszögszámok: 1, 3, 6, 10, ... (2-dimenziós szimplexszámok)

tetraéderszámok: 1, 4, 10, 20, ... (3-dimenziós szimplexszámok)

4-dimenziós szimplexszámok: 1, 5, 15, 35, ...

[A k-adik n-dimenziós szimplexszám: az első k darab $(n-1)$-dimenziós szimplex szám összege. Ezt úgy lehet szemléltetni, hogy egyre kisebb szeleteket teszünk egymásra eleinte szakaszokból, majd háromszögekből; ezzel háromszögeket és tetraédereket kapunk.

${}_0\Sigma_n = n = \binom{n}{1}$,

${}_1\Sigma_n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$,

${}_2\Sigma_n = \dfrac{n\cdot(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$,

${}_3\Sigma_n = \dfrac{n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} = \binom{n+3}{4}$, stb.]

Ennek az az egyszerű oka, hogy a szimplexszámokat eleve úgy értelmezem, hogy az előtte lévőhöz hozzáillesztem a neki megfelelő, egy dimenzióval alacsonyabb alakzatot.

Ha már ismerjük a négyzetszámokat, meg lehetne próbálni ezt is!

Búcsú a Pascal-családtól

A lehetőségek egyáltalán nem fogytak ki, mert rengeteg nyitott kérdés van még hátra, és én a már feltártaknál is csak a legalapvetőbb dolgokat tártam fel.

De ez a dolgozat egyébként is elsősorban a ,,Trinomokról" szólt, csak én úgy gondolom, hogyha Pascalt 3 dimenzióban megnézem, miért ne lehetne egyebet hozzátenni?

Ezzel én búcsúzom, de nem véglegesen, Pascaltól, de elsősorban a háromszögétől és az újonnan kifejlesztett mutációitól.

Megjegyzés: n-dimenziós Pascal-háromszögnél a ,,multinomális együttható":

$$\binom{a_1}{a_2}\binom{a_2}{a_3}\cdots\binom{a_{n-1}}{a_n}.$$