2014, Keszthely, RLV

Megoldásvázlatok, megjegyzések

1. *A szeszélyes teknősbéka*
   Egy teknősbéka egy egyenes vonal mentén mozog egy irányban pontosan hat percig. Az út mentén megfigyelők állnak a következő két szabály szerint:
   (i) Minden megfigyelő pontosan egy percig folyamatosan nézi a teknőst;
   (ii) Minden pillanatban legalább egy ember figyeli a teknőst.
   Mindegyik megfigyelő azt állapítja meg, hogy az ő egy perce alatt a teknős pontosan egy métert tett meg. Mekkora az a minimális, illetve maximális távolság, amit a teknős a hat perc alatt megtehet? (Egyik válasz sem hat méter.)

   Válasz: A maximum 10, a minimum 4 méter.
   Megoldás: Először belátjuk, hogy ezek megvalósíthatók. Tegyük fel, hogy a teknőcünk félénk, és nem szereti, ha többen nézik egyszerre, ezért csak akkor hajlandó előrehaladni, ha mindössze egyetlen ember bámulja. Vegyünk két megfigyelőt, ahol a második $0 < m < 60$ másodperccel később kapcsolódik be a figyelésbe, és az így adódó összesen $60 + m$ másodperc alatt a szégyenlős teknős csak az első és az utolsó m másodperc alatt tesz meg 1–1 métert, és nem mozdul, amikor ketten nézik. Így a $60 + m$ másodperc alatt összesen 2 métert tett meg. Ha $m = 12$ és a hat perc alatt öt diszjunkt ilyen megfigyelőpár teljesít szolgálatot, akkor a teknős 10 métert robogott végig. Ha viszont egy magamutogató teknősünk van, amelyik csak akkor produkálja magát, ha legalább ketten nézik, akkor a fenti megfigyelőpár esetén csak a középső $60 - m$ másodpercben tesz meg 1 métert, tehát ha $m = 30$, akkor a hat perc alatt négy diszjunkt megfigyelőpárral csak 4 méter lesz a megtett táv. Meg kell még mutatni, hogy ennél nagyobb, illetve kisebb teljesítmény már nem lehet. Az első és utolsó percben biztosan ott áll egy megfigyelő, tehát ekkor a teknős pontosan 1–1 métert tesz meg. A közbenső időben legfeljebb 2 métert tehet meg percenként, hiszen azt az időintervallumot biztosan lefedi két megfigyelő, valamint kétpercenként meg kell tennie legalább 1 métert, mert ebbe az időintervallumba biztosan beleesik egy megfigyelő teljes ideje.

2. *A törhetetlen strucctojás*
   Van két strucctojásunk, és meg akarjuk tudni, hogy egy 36 emeletes háznak melyik az a legalacsonyabb emelete, ahonnan leejtve egy strucctojás eltörik (lehet, hogy már az első emeletről ledobva is eltörik, de lehet, hogy a 36. emeletről való esést is átvészeli; feltesszük, hogy a két tojás egyformán viselkedik, és ha egy emeletről leejtve nem törik el, akkor alacsonyabb emeletről leejtve sem törik el). Bármelyik emeletről ledobhatjuk az egyik tojást. Ha eltörik, akkor persze nem használhatjuk fel újra, de ha épségben landol, akkor újra leejthetjük egy másik emeletről. Mennyi az a legkisebb dobásszám, hogy legfeljebb annyi dobással minden esetben meg tudjuk kapni a helyes választ?

   Válasz: 8.
   Megoldás: Kicsit fordítsuk meg a kérdést: (legfeljebb) m dobással milyen magas

emeletig tudunk eljutni. Ha csak egy tojásunk van, akkor nyilván az 1. emelettel kell kezdeni, és egyesével felfelé haladni, amíg el nem törik a tojás. Tehát így az m-edik emeletig tudunk biztosan dönteni. Ha most két tojásunk van, akkor nem kezdhetünk az m-edik emeletnél magasabban, mert törés esetén a másik tojással és $m-1$ dobással nem tudnánk a hiányzó legalább m emeletet áttekinteni. Így az m-edik emelettel kezdünk (alacsonyabban nem érdemes, ez kiderül a további gondolatmenetből), és ha a tojás nem tört el, akkor van még $m-1$ dobásunk, tehát ugyanezzel az érveléssel a(z első) tojást az $m+(m-1)$-edik emeletről érdemes másodszorra leejteni. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy két tojással és m dobással az $m+(m-1)+\cdots+1=m(m+1)/2$-edik emeletig tudunk eljutni, azaz 36 emelet esetén 8 dobással oldható meg a törésteszt.

Általánosítás: Ha k tojásunk és (legfeljebb) m dobáslehetőségünk van, akkor $\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+...+\binom{m}{k}$ emelet a válasz, ezt a legegyszerűbben k és m szerinti kombinált teljes indukcióval igazolhatjuk.

3. *Az ugrándozó mókusok*
Egy kör alakú tisztás mentén m fa áll, mindegyiken egy-egy mókus. A mókusok össze szeretnének gyűlni egy fán, de csak úgy változtathatják a helyüket, hogy két tetszőleges mókus egyidejűleg átugorhat egy-egy szomszédos fára. Ezt a lépést akárhányszor ismételhetik. Milyen m esetén tudnak összegyűlni a mókusok? Mi a helyzet akkor, ha a szabályt úgy szigorítjuk, hogy a két mókusnak ellentétes körüljárási irányban kell ugornia?

Válasz: Páratlan m-re a szigorúbb feltétel mellett is össze tudnak gyűlni, az enyhébb szabály esetén pedig ezenkívül még a 4-gyel osztható m-ek jók.
Megoldás: Ha m páratlan, és kiszemelünk egy fát, akkor a szimmetrikusan elhelyezkedő fák mókuspárjai a két szomszédos fáról egy ugrással, a következő egy-egy fáról két ugrással stb. rendre odajutnak a kiválasztott fára, tehát ekkor a szigorúbb követelmény szerint is megvalósul a mókusgyűlés. Ha $4 \mid m$, akkor az enyhébb feltétel mellett megoldható a találkozó, mert egyetlen mókus kivételével a többiek az előző eljárással összegyűlnek, majd az egyetlen mókus $m/2$ ugrást végez, miközben valamelyik másik mókus ide-oda ugrál a gyülekezőhely és valamelyik szomszédos fa között. Belátjuk, hogy más esetben a mókusok hoppon maradnak. Ha m egy 4-gyel nem osztható páros szám, akkor a fákat nevezzük aszerint páros, illetve páratlan fáknak, hogy a gyülekezőhelyhez képest páros, illetve páratlan ugrásnyira vannak; az m párossága miatt ez nem függ attól, hogy melyik irányban mérjük az ugrásszámot, illetve attól sem, ha közben oda-vissza ugrálunk vagy akár néhányszor körbeugráljuk a teljes kört. Ekkor a páratlan fákról a mókusok páratlan sok, a páros fákról pedig páros sok ugrással juthatnak el a gyülekezőhelyre. Mivel $m/2$ mókus van páratlan fán, és $m/2$ páratlan, ezért az összes szükséges ugrás száma is páratlan, és így nem valósítható meg mókuspárokban való ugrásokkal. Végül, ha $4 \mid m$, és az ugrásoknál kikötjük az ellentétes körüljárási irányt, akkor a fákat sorban megszámozzuk $0,1,2,\dots,m-1$-gyel, és minden pillanatban összeadjuk azoknak a fáknak a sorszámát, amelyeken a mókusok éppen tartózkodnak (ha több mókus van azon a fán, akkor annyiszor vesszük összeadandónak, ahány mókus van a fán). Ennek az összegnek az m szerinti maradéka nem változik egy mókuspár ugrásával, tehát az eljárás során mindig ugyanaz marad. A kezdeti állapotban $0+1+\cdots+(m-1)=m(m-1)/2$ nem osztható m-mel (mert m páros), ha viszont

összegyűlnének a k számú fán, akkor az összeg mk, ami osztható m-mel, tehát ez nem valósulhat meg.

4. *A rozmárok pénze*
Egy kerek asztal körül véges sok rozmár ül, és a következő játékot játsszák. Mindegyikük előtt egy tízforintos fekszik az asztalon. Vezényszóra mindegyik rozmár megnézi a jobb oldali szomszédja előtti tízforintost, és ha fejet lát, akkor megfordítja a saját tízforintosát, ha viszont írást lát, akkor nem csinál semmit. Ezt addig ismételgetik, amíg mindegyik tízforintos írást nem mutat. Mekkora lehet a rozmárok száma, ha a tízforintosok tetszőleges kiinduló helyzete esetén a játék előbb-utóbb véget ér?

Válasz: A megfelelő rozmárlétszámok éppen a kettőhatványok.
Megoldás: Ha a fejet -1-nek, az írást $+1$-nek vesszük, akkor az $x_1,x_2,\dots,x_n$ számsorozatból a következő lépésben az $x_1x_2,x_2x_3,\dots,x_nx_1$ számsorozat keletkezik. Ezeknek a számoknak a szorzata a második lépéstől kezdve biztosan $+1$, tehát köztük páros sok -1-nek kell lennie. A csupa $+1$ helyzet előtt szükségképpen a csupa -1 állapotnak kell lennie, ez tehát páratlan n-re nem valósulhat meg (kivéve a csupa $+1$ vagy csupa -1 kiindulást). Ha n-nek van egy $t>1$ páratlan osztója, akkor egy t szerint periodikus (és nem a tiszta $+1$ vagy -1) helyzetből kiindulva ugyanígy nem juthatunk el a csupa $+1$-be. Végül, ha $n=2^k$, akkor teljes indukcióval vagy a Pascal-háromszög alapján kapjuk, hogy az r-edik lépésben a sorozatunk első tagja $x_1^{\binom{r}{0}}x_2^{\binom{r}{1}}\dots x_{r+1}^{\binom{r}{r}}$, ahol $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$ stb. Ha $r=n=2^k$, akkor minden kitevő páros, hiszen $x_1=x_{n+1}$ együttes kitevője 2, és a nem triviális $\binom{2^k}{j}$ értékek párosak. Ugyanez áll a sorozat többi tagjára is. Tehát az n-edik lépésben csupa négyzetszámot, azaz csupa 1-et kapunk.

5. *Micimackó és Malacka*
Micimackó gondolt 100 pozitív egész számot, ezek $a_1,a_2,\dots,a_{100}$. Malacka megkérdezheti tőle bármely olyan kifejezés értékét, amelyet ezekből az összeadás és kivonás segítségével képezhetünk, pl. mennyi $a_1+7a_2-13a_3$. A következő kérdés mindig függhet az előzőre kapott választól. Legkevesebb hány kérdéssel tudja Malacka kitalálni a száz számot? És ha szorozni is lehet, azaz pl. $3a_1^3a_5^5+8a_4a_2$ is megkérdezhető?

Válasz: Az első esetben 2, a másodikban 1 kérdés elég.
Megoldás: Ha tudnánk, hogy minden gondolt szám csak az $1,2,\dots,9$ közül kerülhet ki, akkor elég lenne megkérdeznünk azt a számot, amelynek számjegyei rendre az a_i értékek: $a_1+10a_2+10^2a_3+\dots+10^{99}a_{100}$. Ha tudnánk, hogy minden gondolt szám kisebb c-nél, akkor ugyanígy okoskodhatunk c alapú számrendszerben. Így az első kérdéssel keresünk egy ilyen korlátot, ehhez megkérdezzük $c=a_1+\dots+a_{100}$-at, majd a második kérdéssel megkapjuk az a_i-ket. Könnyű (ellen)példát adni arra, hogy egyetlen kérdés nem elég (hf). A szorzást is megengedve egy jó kérdés pl. $A=(a_1+a_2+\dots+a_{100})^{100}+(a_1+a_2+\dots+a_{99})^{99}+\dots+a_1$. Ugyanis ekkor $(a_1+a_2+\dots+a_{100})^{100}<A<(a_1+a_2+\dots+a_{100}+1)^{100}$, tehát $\lfloor\sqrt[100]{A}\rfloor=a_1+\dots+a_{100}$. Ennek ismeretében A-ból levonva az első tagját, és az eljárást ismételve megkapjuk rendre az $a_1+\dots+a_j$ értékeket, ahonnan az a_i-k is azonnal adódnak.

Megjegyzések:

(i) A szorzásos esetben tkp. az a_i-knek egy egész együtthatós polinomját lehet megkérdezni, és az imént egy 100-adfokú polinommal értünk célt. Belátjuk, hogy alacsonyabb fokú polinom nem lehet megfelelő. Az $1 \le a_i \le N$ helyeken a kitalálhatósághoz a polinomnak csupa különböző egész értéket kell felvennie, ez tehát N^{100} különböző egész szám kell, hogy legyen. Másrészt, ha f foka legfeljebb 99, akkor a fenti helyettesítési értékek abszolút értékét a polinom tagjai abszolút értékének összegével becsülve legfeljebb cN^{99} adódik, tehát elég nagy N-re az ilyen $2cN^{99} + 1 < N^{100}$ egész szám között nem lehet N^{100} különböző.

(ii) Ha pozitív egészek helyett tetszőleges egészekre gondolhat Micimackó, akkor az első esetben 100-nál kevesebb kérdés nem elég, ugyanis lényegében egy lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságát kell biztosítani. A második esetben azonban továbbra is elég egyetlen kérdés; A-t csak annyiben kell módosítani, hogy a_i helyére mindenütt pl. $(3a_i + 2)^2$-t írunk (így egy 200-adfokú polinomot kapunk).

6. *A sapkás majmok*
Az állatkert igazgatója közli a 100 majommal, hogy másnap valahogyan libasorba állítja őket, és mindegyikük fejére egy piros, kék, sárga vagy zöld sapkát tesz. Minden majom látja majd az előtte állók sapkájának a színét, de a sajátját és a mögötte állókét nem. Ezután hátulról előre haladva minden majom egymás után hangosan kimondja a négy szín valamelyikét, amit minden majom hall. Amelyik majom így eltalálja a saját sapkája színét, dupla adag banánt kap. Ha a majmok előre összebeszélhetnek a stratégiáról, hányan kapnak dupla adag banánt?

Válasz: Legalább 99-en.
Megoldás: Tegyük fel először, hogy csak két szín van, piros és kék. Ekkor az utolsó majom aszerint mond pirosat, illetve kéket, hogy előtte páratlan, illetve páros sok piros sapkát lát a többi majmon. Az utolsó előtti majom ezt összehasonlítja az általa látott képpel, és ha a pirosak paritása megegyezik az utolsó majom által mondottal, akkor tudja, hogy a fején kék sapka van, egyébként pedig piros. Így ő eltalálja a sapkája színét, és ezután a következő majom a kapott két információ birtokában ugyanígy okoskodhat stb. Tehát az utolsó majom kivételével minden majom dupla adag banánt kap, az utolsónál ez 50 százalékos valószínűségű (és ha pechje van, akkor az önfeláldozásáért bizonyára a többi majom ad neki valamennyit kárpótlásul). A több színre történő általánosításhoz az előző gondolatmenetet a következőképpen érdemes átfogalmazni. Ha a színek helyett számokat képzelünk, a piros az 1, a kék a 0, akkor az utolsó majom az általa látott számok modulo 2 összegét mondja. További két szín esetén a sárga legyen 2, a zöld 3, és az utolsó majom az általa látott számok modulo 4 összegét mondja. Ebből a többi majom ugyanúgy kikövetkeztetheti a saját számát, azaz színét, mint a két színnél láttuk.

7. *A fehér hollók*
A számegyenes minden pozitív egész pontjában ül egy fekete vagy fehér színű holló. Lehetséges-e, hogy nem keletkezik végtelen számtani sorozat csupa fekete hollóból, a fehér hollókból pedig még háromtagú számtani sorozat sem választható ki?

Válasz: Lehetséges.
Megoldás: Ha a fehér hollók a mondásnak megfelelően elég ritkán ülnek, pl. a következő mindig legalább kétszer akkora egész számra telepszik, mint az előző, akkor biztosan nem lesz közöttük háromtagú számtani sorozat. A végtelen fekete számtani sorozat megakadályozásához pedig soroljuk fel az összes végtelen számtani

sorozatot, és mindegyikbe rendre ültessünk be egy-egy fehér hollót (az előző szabályt betartva), a végén kimaradó helyeket pedig töltsük meg fekete hollókkal. Az $a+kd$, $k=0,1,2,\dots$ számtani sorozatokat pl. növekvő $a+d$ szerint sorolhatjuk fel: ha $a+d=2$, akkor $a=d=1$, azaz az első számtani sorozatunk az $1,2,3,\dots$. Ha $a+d=3$, akkor $a=1, d=2$ vagy $a=2,d=1$, azaz a következő két számtani sorozatunk az $1,3,5,\dots$ és a $2,3,4,\dots$ stb. Így az első fehér hollót ültethetjük pl. az 1-re, a másodikat az 5-re, a harmadikat a 12-re stb. Ily módon minden végtelen számtani sorozatot „elrontunk”, azaz egyik sem állhat csupa fekete hollóból.

8. *A láthatatlan bolha*
A számegyenes egy egész pontjában ül egy láthatatlan bolha, és minden percben átugrik egy másik egész számra, az alább megadandó valamelyik szabály szerint. Mi minden percben odaüthetünk egy egész számra, és ha a bolha éppen ott van, akkor megfogjuk. Az a kérdés, hogy mi (vagy a dédunokáink) el tudjuk-e valamikor csípni a bolhát, ha az
   (a) (előbb-utóbb) periodikusan mozog;
   (b) mindig ugyanakkorát ugrik (azonos irányban);
   (c) mindig valamelyik szomszédos számra ugrik, és a pályája korlátos.

Válasz: Mindhárom esetben el tudjuk kapni a bolhát (csak idő kérdése).
Megoldás:
(a) A haditervünk olyan (végtelen) ütéssorozat, amely minden egész számból akármilyen (véges) hosszú konstans sorozatot tartalmaz. Így ha a bolha periódusa p és a periódus egyik eleme m, akkor a p hosszúságú $m,m,m,\dots,m$ sorozat is végtelen sokszor fellép, tehát valamikor biztosan eltaláljuk a bolhát. Ilyen ütéssorozat pl. $0,1,0,0,-1-1,-2,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2,2,2,3,3,3,2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,-1,$ $-1,-1,-1,-2,-2,-2,-2,-3,-3,-3,-3,-4,-4,-4,-4,-3,-3,-3,-3,-2,\dots$.

(b) A bolha most egy számtani sorozat mentén mozog. A 7. feladatban látottakhoz hasonlóan most is felsoroljuk az összes lehetséges számtani sorozatot (mivel az a kezdőtag és a d differencia most 0 vagy negatív is lehet, ezért pl. növekvő $|a|+|d|$ szerint végezhetjük a felsorolást), és utána sorra megnézzük, hogy ha a bolha az i-edik számtani sorozat szerint ugrál, akkor az i-edik percben éppen hol kell lennie, és odaütünk.

(c) Itt a bolha lehetséges mozgásai nem sorolhatók fel (azaz a halmazuk nem megszámlálható, pl. ha a 0-ról mindig véletlenszerűen lép az 1-re vagy a -1-re és vissza, akkor ez egy végtelen 0–1 sorozattal reprezentálható, és ezeket $[0,1)$-beli valós számok bináris alakjának képzelve adódik, hogy ezek számossága kontinuum). Azonban a pályát korlátozó $[a,b]$ intervallumok (azaz az $a<b$ egész számpárok) már sorozatba rendezhetők, és megmutatjuk, hogy adott $[a,b]$ intervallumba eső pálya esetén csak a $b-a$-tól függő idő alatt elcsíphetjük a bolhát. Ezért, ha rendre megcsináljuk az egyes intervallumokon a stratégiát, akkor előbb-utóbb sor kerül a bolha tényleges pályáját tartalmazó intervallumra is, és akkor nincs menekvés. A stratégiát az egyszerűbb leírás kedvéért az $[1,m]$ intervallumra mondjuk el. Először feltesszük, hogy a bolha most páros számon ül. Ekkor a következő percben az 1-re ütünk. Ha nem találtuk el, akkor biztos, hogy legalább a 3-on van, és így a következő percben legalább a 2-n lesz, ezért akkor oda ütünk. Ha nem találtuk el, akkor legalább a 4-en van, tehát a következő percben legalább a 3-on lesz, és oda fogunk ütni stb. Így ha induláskor pároson ült, akkor ezzel a beszorítással végül elkapjuk. Ha nem sikerült,

akkor feltesszük, hogy az eljárásunk kezdetén páratlanon ült, és kiszámítjuk, mikor lesz legközelebb pároson, és újra elvégezzük az előző algoritmust. Ha nincs meg a bolha, akkor nem volt benne a pályája ebben az intervallumban, és akkor áttérünk a következő intervallumra.

9. *A folytonos bolha*
A most is láthatatlan bolha az origóból indul, és minden percben ugyanakkora valós számot ugrik (azonos irányban). Minden percben egységnyi hosszú intervallumra tenyerelhetünk rá, és ha a bolha abban van, akkor megfogtuk. El tudjuk-e csípni a bolhát? És ha a bolha a számegyenes helyett a síkon mozog ugyanígy (valamely félegyenes mentén), és minden percben egy egységnégyzetet ellenőrizhetünk?

Válasz: Az egyenesen meg tudjuk fogni a bolhát, a síkon nem.
Megoldás: Az egyenesen legyen a bolha (előjeles) ugrása d. Az első percben a [0,1] intervallumot fogjuk le, ezzel akkor csípjük el a bolhát, ha $0 \leq d \leq 1$. A második percben a $[-1, 0]$ intervallumot választjuk, ezzel akkor nyerünk, ha $-1 \leq 2d \leq 0$, azaz $-1/2 \leq d \leq 0$. A harmadik percben az $1 \leq d \leq s$ értékekre próbáljuk megfogni a bolhát, ez akkor működik, ha $3 \leq 3d \leq 3s$, tehát a [3,4] intervallumot kell lefognunk, $s = 4/3$, azaz az $1 \leq d \leq 1 + 1/3$ értékeket is elintéztük. Hasonlóan, a negyedik percben a $-(1/2 + 1/4) \leq d \leq -1/2$ ugrások kontrollálhatók stb. Mivel az $1 + 1/3 + 1/5 + \cdots + 1/(2s - 1) > 1/2 + 1/4 + 1/6 + \cdots + 1/(2s) = (1/2)(1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/s)$ összegek minden határon túl nőnek, ezért előbb-utóbb minden d-t elérünk. — (b) A síkon a k-adik percben lefogott egységnégyzet pontosan akkor tartalmazza a bolhát, ha a bolha ugrásvektora ennek a négyzetnek az origóból történt k-szoros kicsinyítésében van. Ez utóbbi egy $1/k^2$ területű négyzet. Mivel a négyzetszámok reciprokösszege korlátos, ezért ezeknek a kicsinyített négyzeteknek az összterülete is véges, tehát (messze) nem fedik le az egész síkot, vagyis a bolha ugrásvektora bőven felderítetlen maradhat (sőt még akkor is, ha pl. kikötjük, hogy a bolha csak egy nagyon szűk szögtartományban mozoghat).

Megjegyzés: A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a pozitív egészek, illetve a négyzetszámok reciprokösszegéről felhasznált állítások pl. a következőképpen bizonyíthatók:
(i) $1/3+1/4 > 1/4+1/4 = 1/2$, $1/5+1/6+1/7+1/8 > 4\cdot(1/8) = 1/2$, és ugyanígy a $2^{k-1} + 1$-től 2^k-ig terjedő egészek reciprokösszege nagyobb, mint $1/2$, vagyis a pozitív egészek reciprokösszege akárhányszor $1/2$-nél nagyobb lehet, ha elég messzire megyünk.
(ii) Ha $k > 1$, akkor $1/k^2 < 1/k(k - 1) = 1/(k - 1) - 1/k$. Így $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2 < 1 + (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/(n - 1) - 1/n) = 2 - 1/n < 2$.

10. *Egy különös álom*
Álmomban végtelen sok majmot láttam, éspedig minden egyes valós számon ült egy-egy majom, és mindegyik fején volt egy sapka, amelyre egy valós számot írtak. Minden majom mindegyik másik majom sapkáján levő számot látta, csak a sajátját nem. Sípszóra mindegyik majom egyszerre mondott egy valós számot, most is előre összebeszélhettek, milyen stratégiát alkalmazzanak. Azt álmodtam, hogy véges sok majom kivételével minden majom el tudja találni a sapkáján levő valós számot. Ez csak álom volt, vagy a „valóságban” is így van-e?

Válasz: Valóban csak véges sok majom tévedhet.

Megoldás: Bármely két majom előtt majdnem ugyanaz a kép tárul fel, hiszen mindegyikük látja az összes többi majom számát. Ennek alapján úgy érdemes csoportosítani az összes lehetséges valós szám kiosztást, hogy egy osztályba teszünk két kiosztást, ha csak véges sok majomnál térnek el a számok. Könnyen adódik, hogy ezzel (az ekvivalenciarelációval) valóban diszjunkt osztályokra bontjuk az összes kiosztást. A majmok az előzetes megbeszélésükön minden ilyen osztályból kiválasztanak egyetlen kiosztást. Az éles helyzetben minden majom látja, hogy melyik osztályból történt a tényleges kiosztás (hiszen csak a saját számát nem tudja, és egyetlen elem nem befolyásolja az osztályt), és mindegyik majom azt a számot mondja be, amit az osztályból előzetesen kiválasztott kiosztás szerint viselne. Mivel a tényleges kiosztás ettől csak véges sok majomnál térhet el, ezért csak véges sok majom lehet, aki nem találta el a saját számát.

11. *A zebracsikók legelője*
A zebramamának egy különleges (kissé sovány, de nem üres) legelője van a sík(ság)on. Amikor megszületik a két kis csikója, felosztja ezt a legelőt három egyforma, ráadásul az egész legelővel is egybevágó(!) részre, hogy neki és a csikóknak ugyanolyan, sőt a régivel is minden szempontból megegyező legelője legyen. Hogyan lehetséges ez?

Megoldás: Bemelegítésül gyártsunk olyan síkbeli korlátos halmazt, amely egybevágó egy valódi részhalmazával (nem korlátos ilyen halmaz pl. egy félegyenes vagy félsík). Vegyünk egy c pontot, erre sorozatosan alkalmazzunk egy A egybevágóságot, ekkor a $H = \{c, Ac, A^2c, \dots\}$ halmazt kapjuk. Ha ez csupa különböző pont, akkor $A(H) = \{Ac, A^2c, A^3c, \dots\} = H \setminus \{c\}$ valódi része H-nak és egybevágó vele (éppen az A egybevágóság viszi át H-t $A(H)$-ba). A korlátosság és a csupa különböző pont miatt A csak forgatás lehet, megfelel például egy c-től különböző pont körüli α szögű forgatás, ahol α/π irracionális szám.

Térjünk most rá az eredeti feladatra: olyan H nem üres, síkbeli halmazt kell megadni, amely három, az eredetivel egybevágó részhalmazának diszjunkt egyesítése. Ehhez elég H-t két ilyen részhalmazára bontani, mert utána az egyik (az eredetivel egybevágó) részhalmazt ugyanígy tovább bonthatjuk két részre. Az előzőekben látottakhoz hasonlóan most is egyetlen c pontból indulunk ki, csak erre most két egybevágóságot, F-et és T-t alkalmazunk sorozatosan minden lehetséges módon, azaz $H = \{c, Fc, Tc, F^2c, T^2c, FTc, TFc, \dots, F^5T^7F^2Tc, \dots\}$. Azt szeretnénk, hogy H az $F(H)$ és $T(H)$ (a H-val egybevágó) részhalmazok diszjunkt egyesítése legyen. Nyilván $F(H) \cup T(H) \supseteq H \setminus \{c\}$, tehát el kell érnünk, hogy c benne legyen pl. $F(H)$-ban. Erre megfelel, ha F a c körüli α szögű elforgatás (ahol α-t később alkalmasan megválasztjuk). A T egybevágóságot alkalmas eltolásnak fogjuk választani. A diszjunktság biztosításához áttérünk a komplex számokra, legyen $c = 0$ az origó, T az x-tengely pozitív irányába történő egységnyi hosszúságú eltolás. Ekkor bármely u pontra (azaz komplex számra) $T(u) = u + 1$ és $F(u) = wu$, ahol $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$. A $c = 0$ ponttal így addig nem történik semmi, amíg csak F-et alkalmazzuk, utána pedig minden lehetséges kombinációban 1-eket adunk hozzá, illetve w-vel szorozzuk. Pl. $F^2T^4F^3Tc = ((0+1)w^3+4)w^2 = w^5+4w^2$. Ez azt jelenti, hogy H minden pontja $g(w)$ alakú, ahol $g(x)$ egy egész együtthatós polinom. Az $F(H)$ elemeit az jellemzi, hogy utoljára forgattunk, vagyis w-vel szoroztunk, és így a megfelelő $g(x)$ polinom konstans tagja 0, míg $T(H)$ pontjainál utoljára eltolás, azaz 1 hozzáadása történt, tehát ekkor $g(x)$ konstans tagja nem nulla. A diszjunktsághoz azt kell elérnünk, hogy $g_1(w) \neq g_2(w)$, ahol g_1 konstans tagja 0, g_2-é viszont nem. Ez azt jelenti, hogy a $h = g_1 - g_2$ polinom konstans tagja nem 0 és $h(w) \neq 0$. Ha tehát a w komplex szám nem gyöke egyetlen nem azonosan nulla egész együtthatós polinomnak sem, akkor készen vagyunk. Mivel az összes (nem nulla) egész együtthatós polinomot (pl. a fokszám és az együtthatók abszolút értékei összegének mentén) sorozatba tudjuk rendezni, ezért ezek összes komplex gyökét is fel tudjuk sorolni. Azonban a $0 \leq \alpha < 2\pi$ valós számok „többen” vannak, ezért lesz olyan α, hogy a neki megfelelő w komplex szám nem gyöke egyetlen nem nulla egész együtthatós polinomnak sem, és a konstrukciót ezen α-val elkészítve $F(H)$ és $T(H)$ valóban diszjunktak lesznek.

Megjegyzések:
(i) A befejező gondolatmenet egyetemi szinten úgy fogalmazható, hogy transzcendens w-t kell venni, és mivel az algebrai számok halmaza megszámlálható, ezért az egységkörön van transzcendens szám.
(ii) A feladatban fellépő meglepő paradoxonnál talán még furcsább jelenségek is előfordulnak. A Hausdorff-paradoxon (egyik változata) szerint a G gömbfelülethez készíthető olyan S „sablon”, hogy ennek egyrészt négy példánya együttesen lefedi G-t, másrészt S-nek végtelen sok diszjunkt példánya is elfér G-n. (Azaz $G = \cup_{i=1}^{4} K_i$ és $G \supseteq \cup_{j=1}^{\infty} L_j$, ahol az L_j-k diszjunktak és $K_i \cong L_j \cong S$.) A Banach–Tarski-paradoxon pedig azt állítja, hogy egy (tömör) M gömböt 10 (nem feltétlenül szép) diszjunkt részre vágva ezekből összerakható két(!), az eredetivel egybevágó gömb. (Azaz M az $U_i, i = 1, \ldots, 10$, a két darab M pedig a $V_i, i = 1, \ldots, 10$ halmazok diszjunkt egyesítése, ahol $U_i \cong V_i$.) Sőt, ugyanez igaz (10 helyett véges sok résszel) bármely két olyan korlátos térbeli halmazra is, amelyek a belsejükben tartalmaznak egy akármilyen picike gömböt. Itt érdemes megemlítenünk Laczkovich Miklós 1988-as „körnégyszögesítési” eredményét is, amellyel egy 60 évig megoldatlan sejtést igazolt: Egy K kör átdarabolható egy vele azonos területű N négyzetbe, azaz alkalmas m-re K az $U_i, i = 1, \ldots, m$, N pedig a $V_i, i = 1, \ldots, m$ halmazok diszjunkt egyesítése, ahol $U_i \cong V_i$ (ráadásul csak eltolásokra van szükség).