Nem mindig az a bonyolult, ami annak látszik

azaz
geometria feladatok megoldása
egy ritkán használt eszköz segítségével

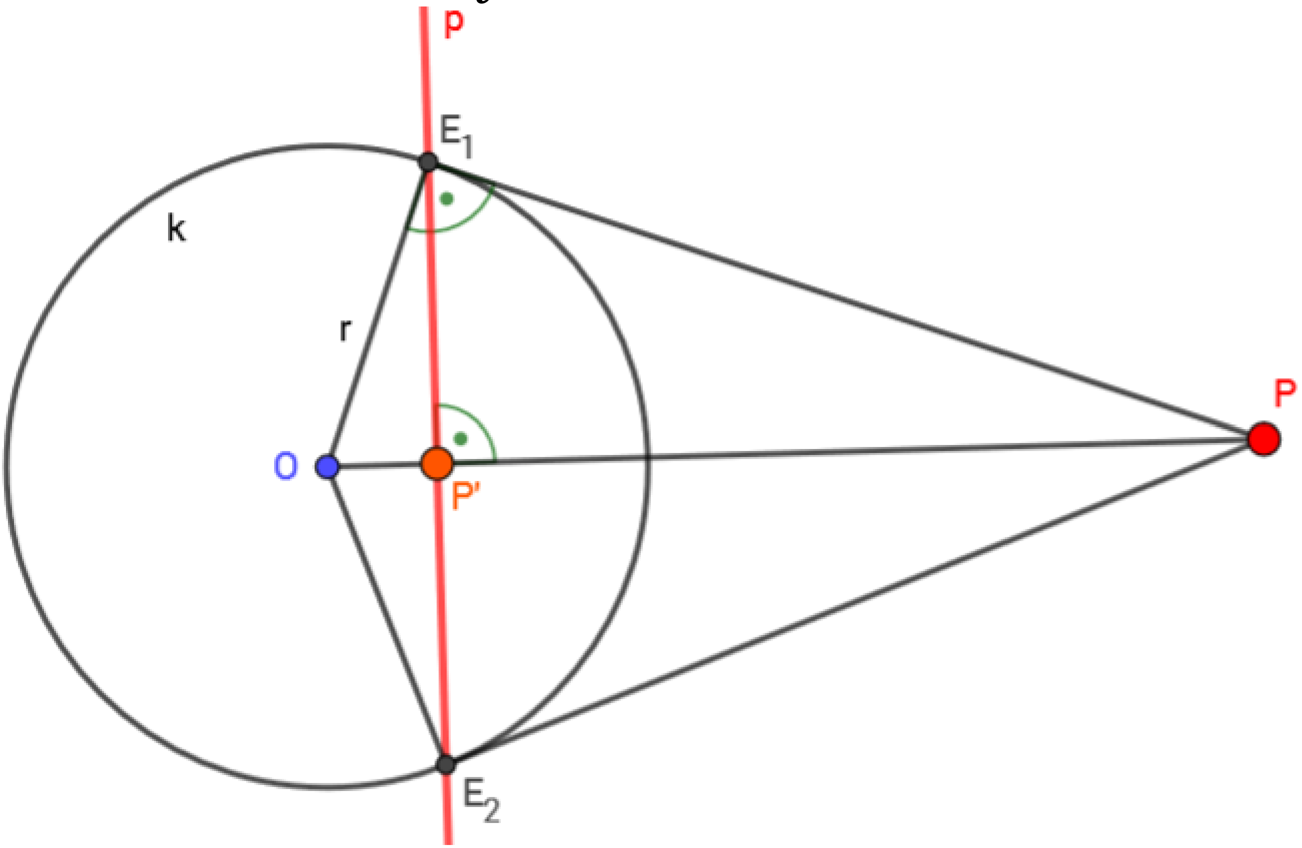
Rátz László Vándorgyűlés
2018 Győr

Fonyó Lajos
Keszthelyi Vajda János Gimnázium

A prezentációt készítette:
Fonyóné Németh Ildikó

Pólus – poláris kapcsolat

a) P a k körön kívül helyezkedik el



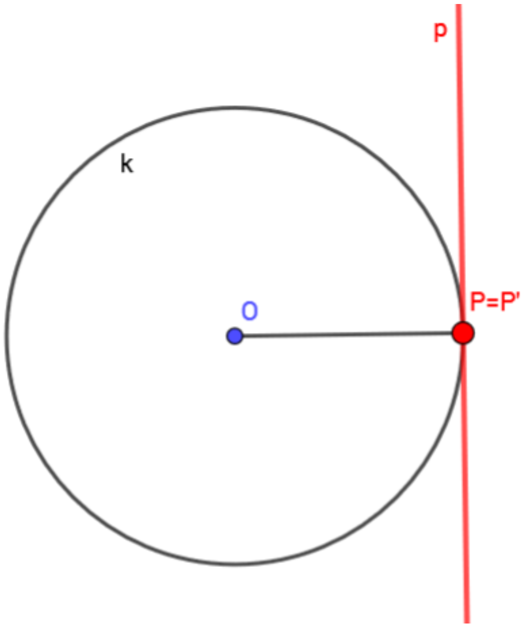
Befogótétel: $OP \cdot OP' = r^2$

P: pólus

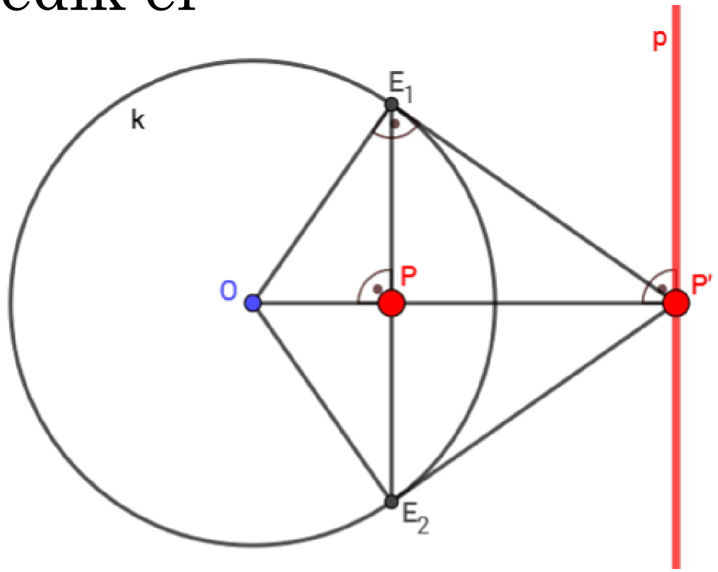
p: poláris

Pólus – poláris kapcsolat

b) *P* rajta van a *k* körön



c) *P* a *k* körön belül helyezkedik el

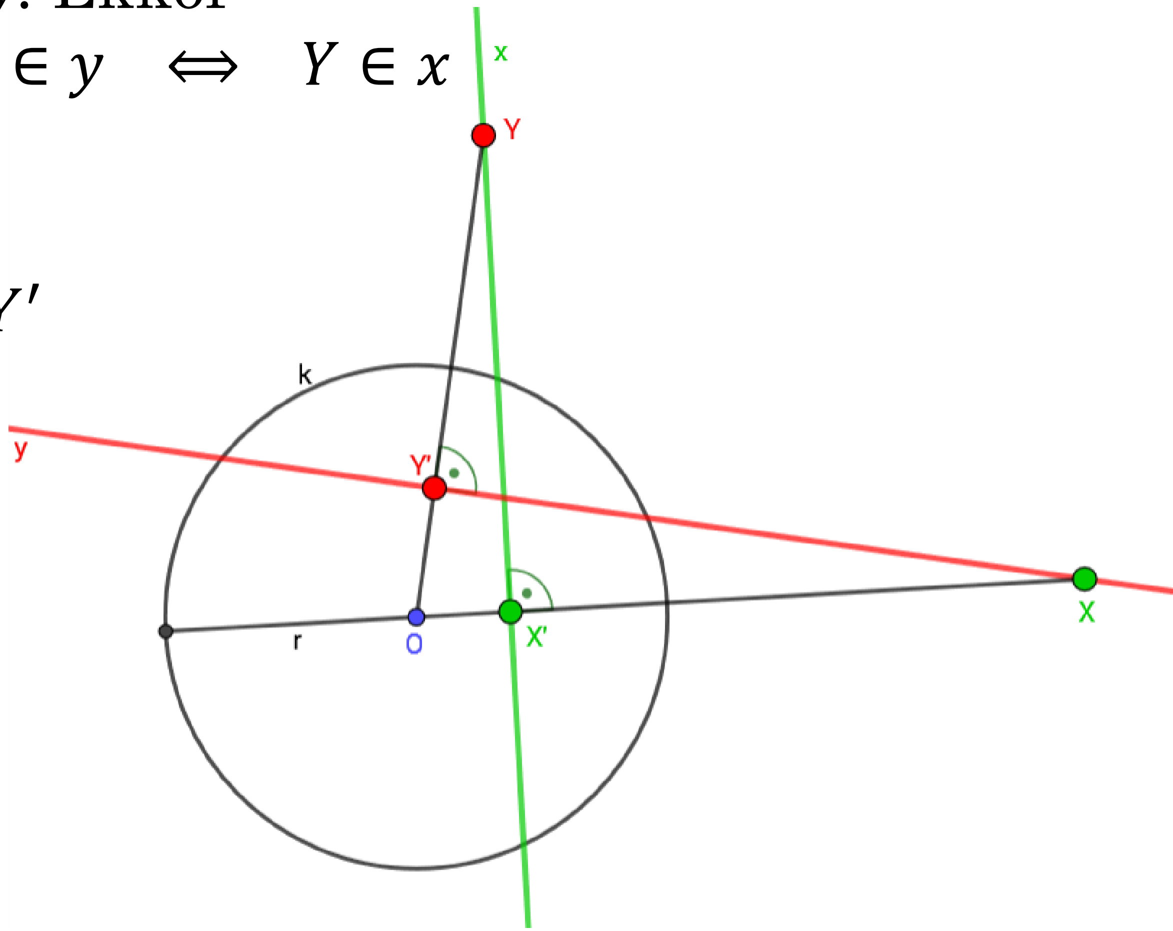


1. La Hire elmélet:

Legyenek a k körre vonatkozóan az X és Y pólusokhoz tartozó polárisok x és y. Ekkor

$$X \in y \quad \Leftrightarrow \quad Y \in x$$

Bizonyítás:



$$OX \cdot OX' = r^2 = OY \cdot OY'$$

$\Rightarrow$ X, X', Y, Y' egy körön vannak

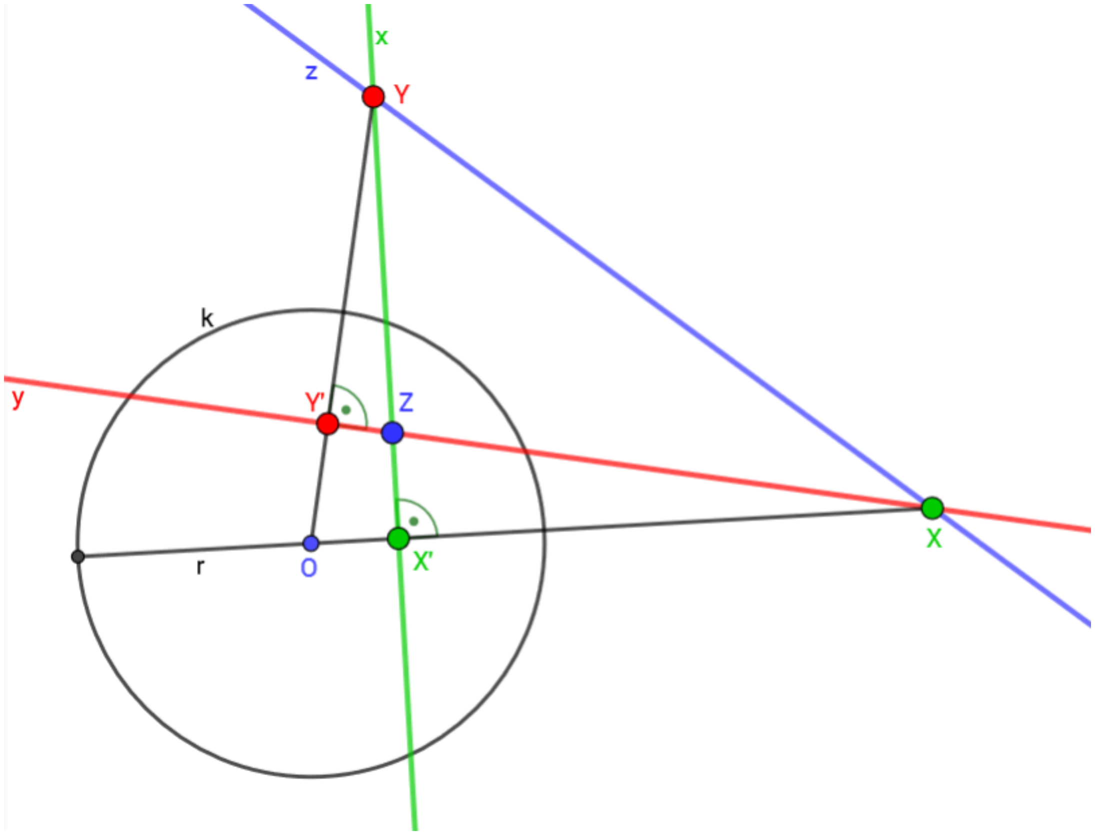
$$X \in y \quad \Leftrightarrow \quad XY'Y\sphericalangle = 90° \quad \Leftrightarrow \quad XX'Y\sphericalangle = 90° \quad \Leftrightarrow \quad Y \in x$$

2. tétel:

Legyenek a k körre vonatkozóan az X, Y, Z pólusokhoz tartozó polárisok x, y, z. Ekkor

$$Z = x \cap y \quad \Leftrightarrow \quad z = XY$$

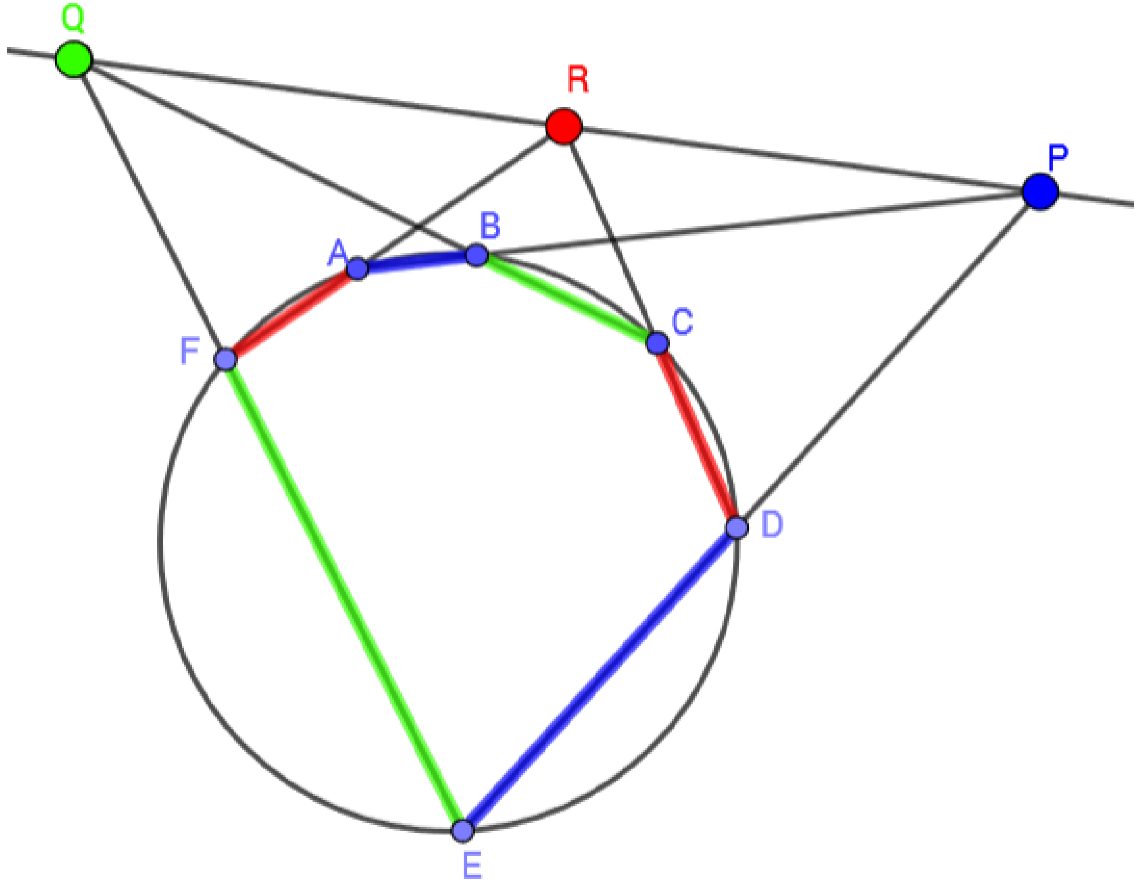
Bizonyítás:



$$Z = x \cap y \quad \Leftrightarrow \quad Z \in x \text{ és } Z \in y \quad \Leftrightarrow \quad X \in z \text{ és } Y \in z \quad \Leftrightarrow \quad z = XY$$

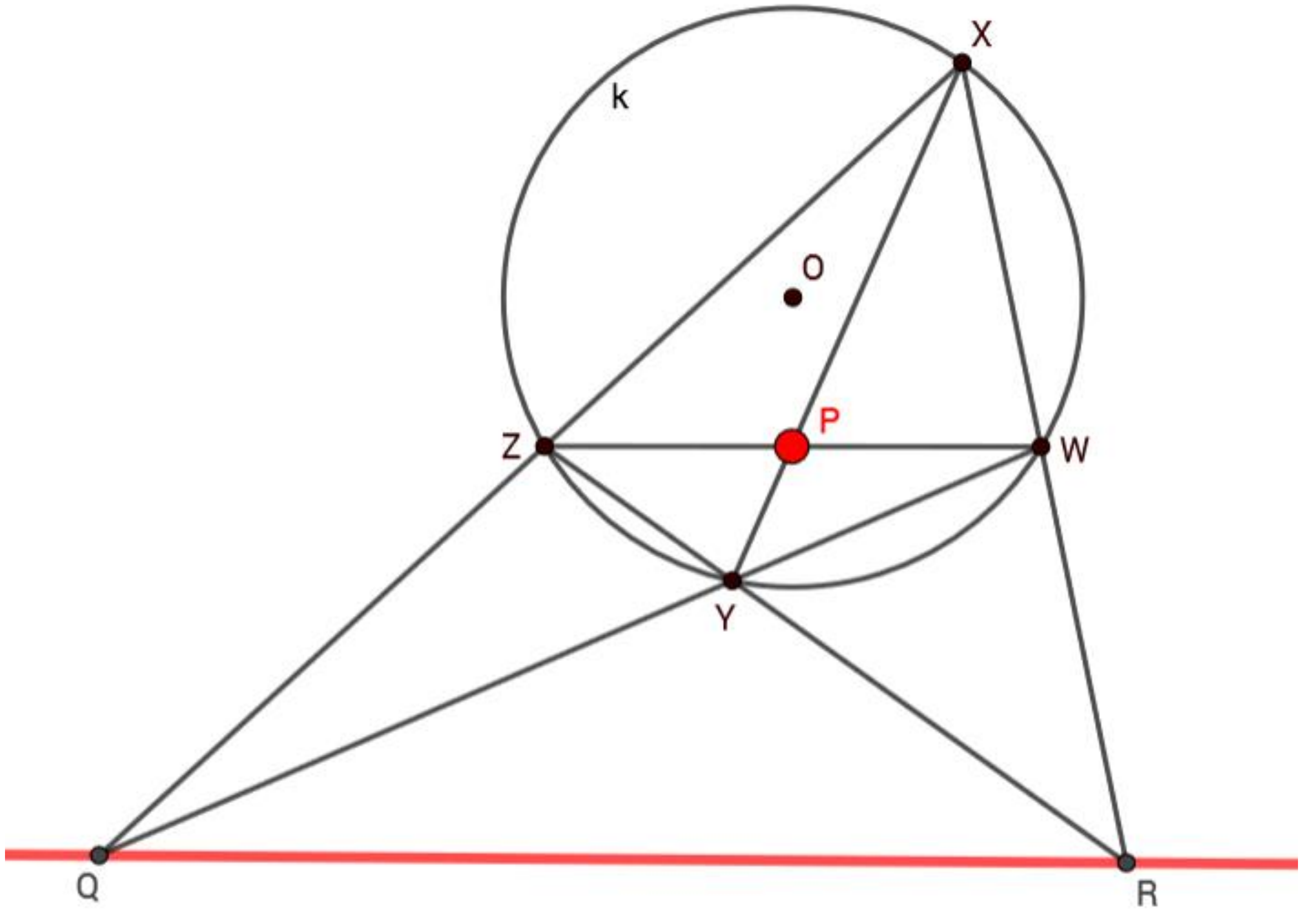
Pascal tétel speciális esete:

Legyenek egy körbe írt hatszög csúcsai A, B, C, D, E, F. Ha $AB \cap DE = P$, $BC \cap EF = Q$ és $CD \cap FA = R$, akkor a P, Q, R pontok egy egyenesre esnek.



3. tétel:

Legyenek X, Y, Z, W egy k kör pontjai, $XY \cap ZW = P$, $XZ \cap WY = Q$ és $XW \cap ZY = R$. Ekkor a k körre vonatkozóan a P pólushoz tartozó p poláris áthalad a Q és R pontokon.



3. tétel:

Bizonyítás:

$XY = s, \quad ZW = t, \quad s \longmapsto S, \quad t \longmapsto T$

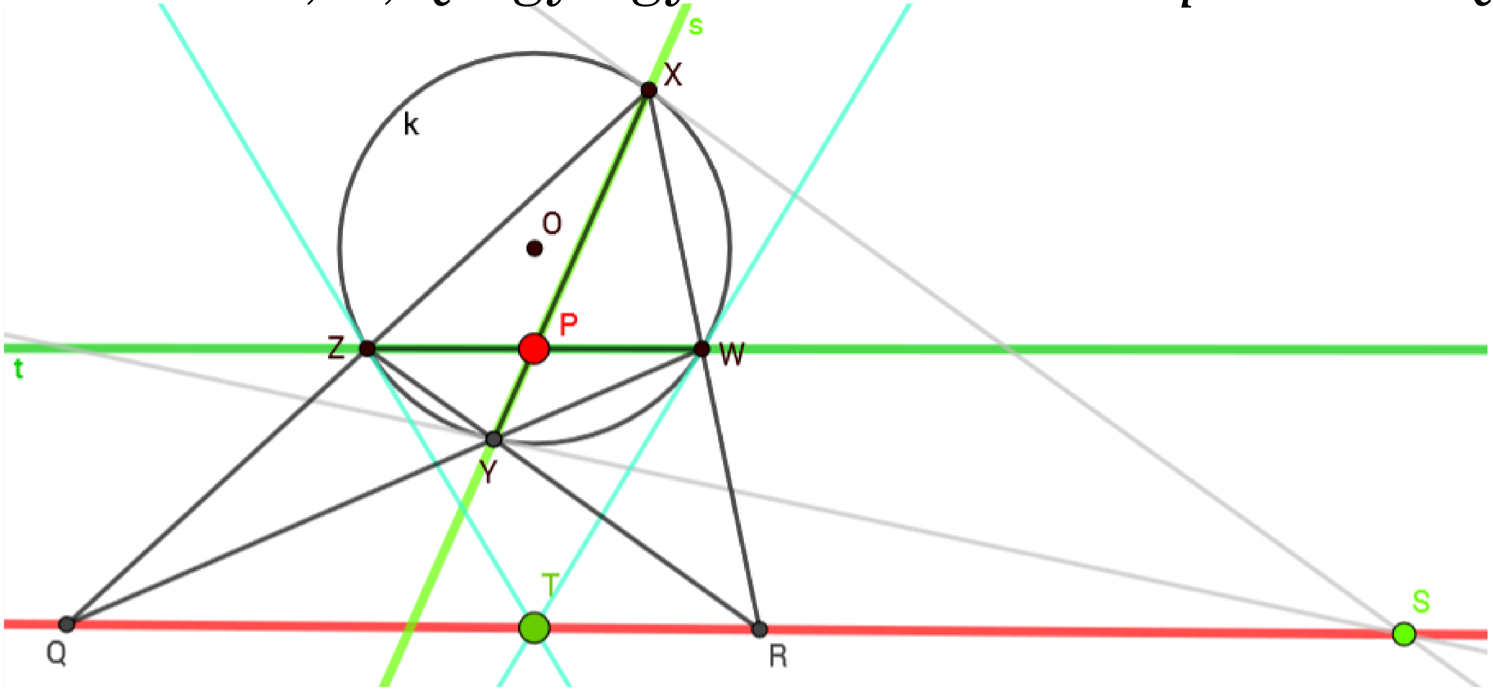
$s \cap t = P$ 2. tétel $\Rightarrow$ $p = ST$

$XXZYYW$ hatszögnél $XX \cap YY = S$, $XZ \cap YW = Q$, $ZY \cap WX = R$

Pascal tétel $\Rightarrow$ S, Q, R egy egyenesre esnek

$ZZYWWX$ hatszögnél $ZZ \cap WW = T$, $ZY \cap WX = R$, $YW \cap XZ = Q$

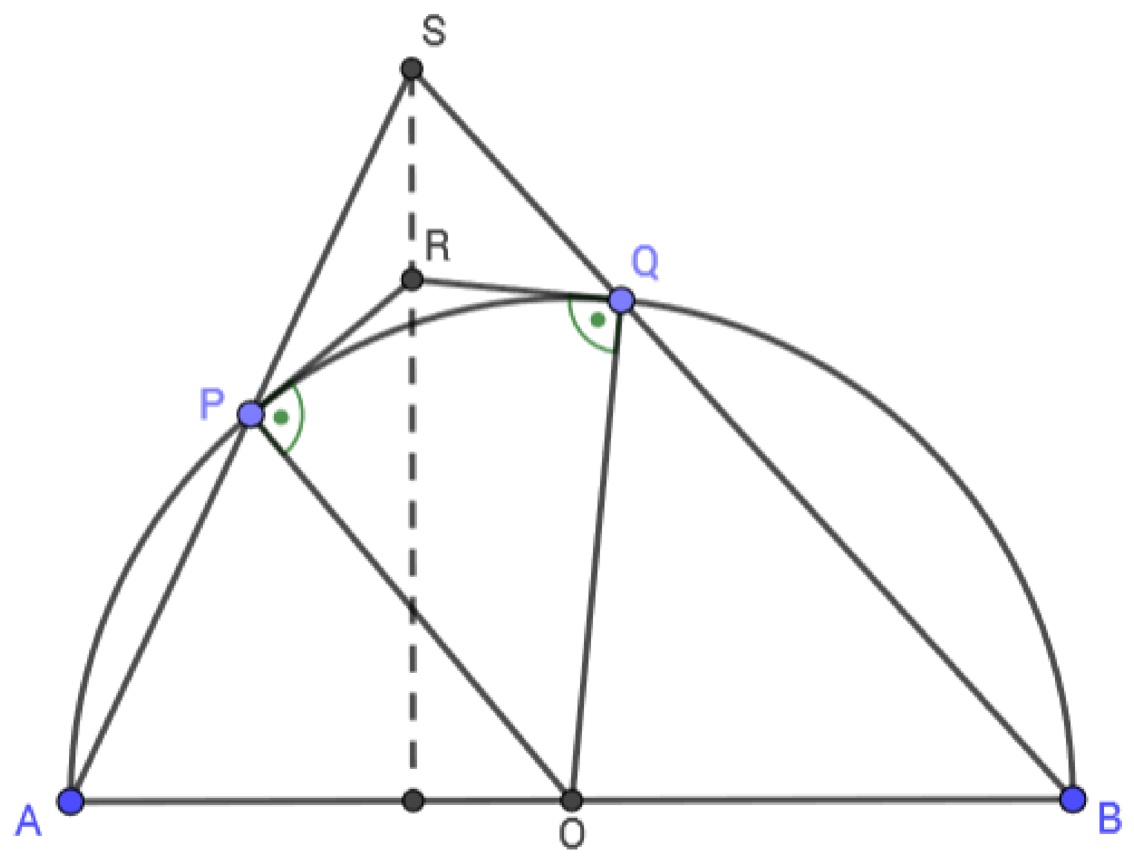
Pascal tétel $\Rightarrow$ T, R, Q egy egyenesre esnek $\Rightarrow p = ST = QR$



1. feladat:

Az AB átmérőjű félkörnek P és Q két olyan pontja, melyekre $AP < AQ$ és $AP \neq BQ$. A félkör P és Q pontbeli érintőinek metszéspontja R, $AP \cap BQ = S$.

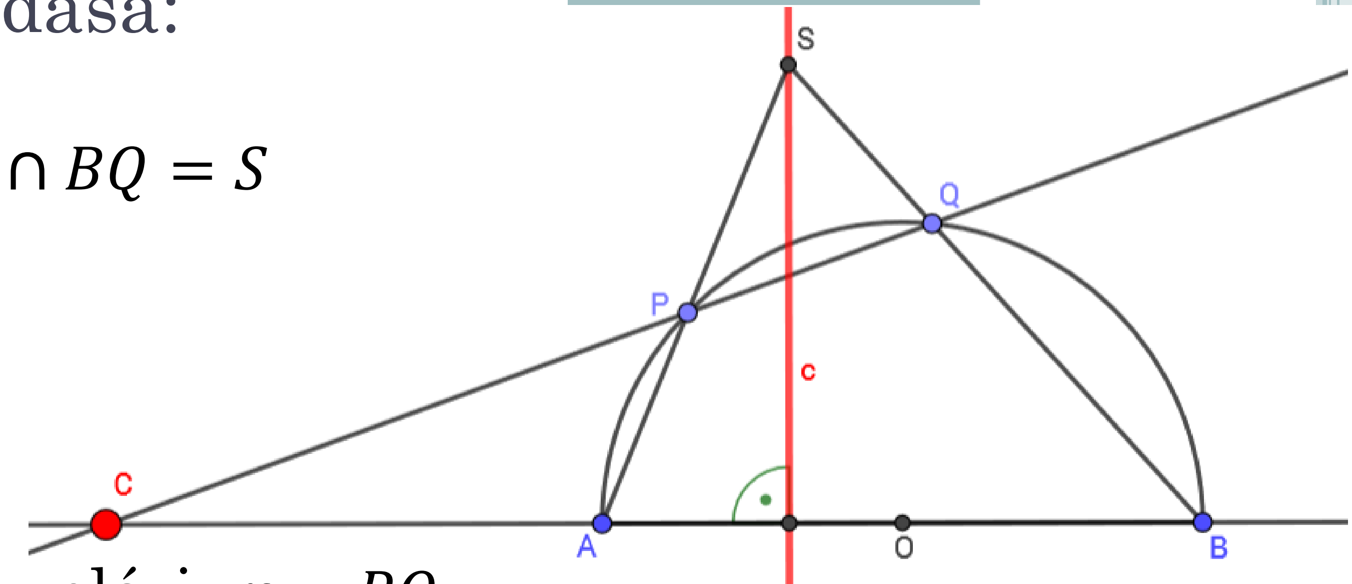
Bizonyítsuk be, hogy $RS \perp AB$.



1. feladat megoldása:

$AB \cap PQ = C, AP \cap BQ = S$

3. tétel $\Rightarrow$ $S \in c$

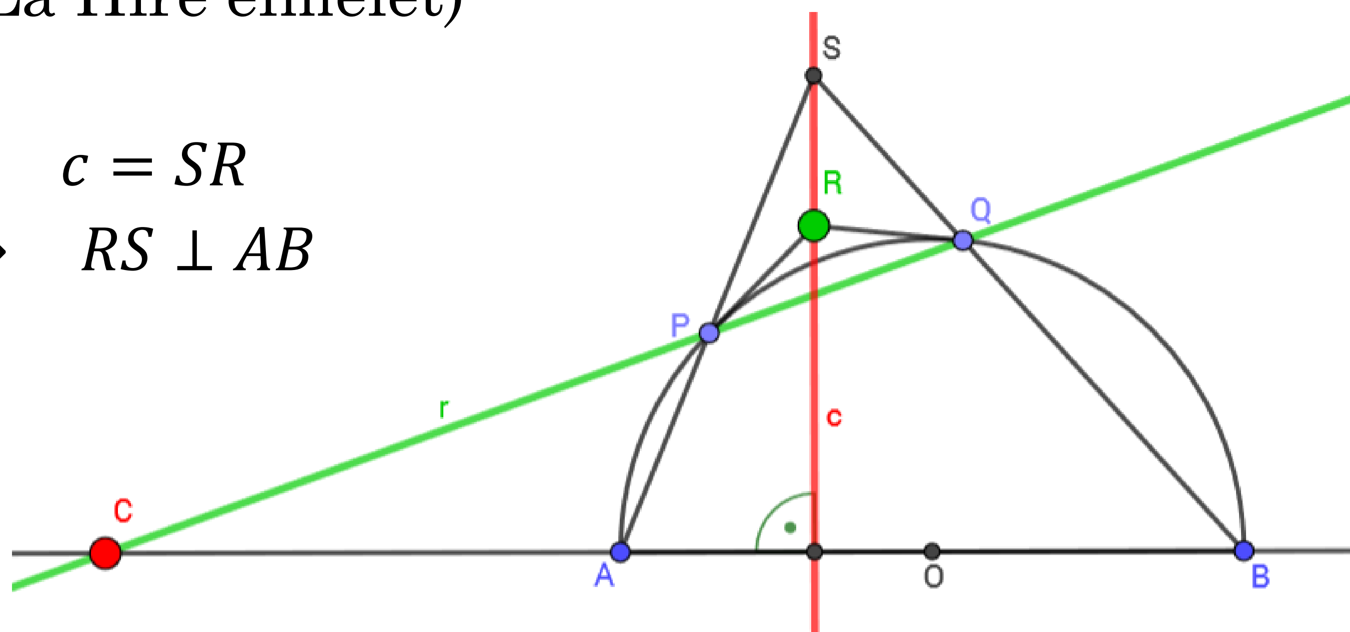


Az R-hez tartozó poláris $r = PQ$

$C \in r \;\Rightarrow\; R \in c$ (La Hire elmélet)

$S \in c$ és $R \in c \;\Rightarrow\; c = SR$

$\Rightarrow \quad RS \perp OC \quad \Rightarrow \quad RS \perp AB$

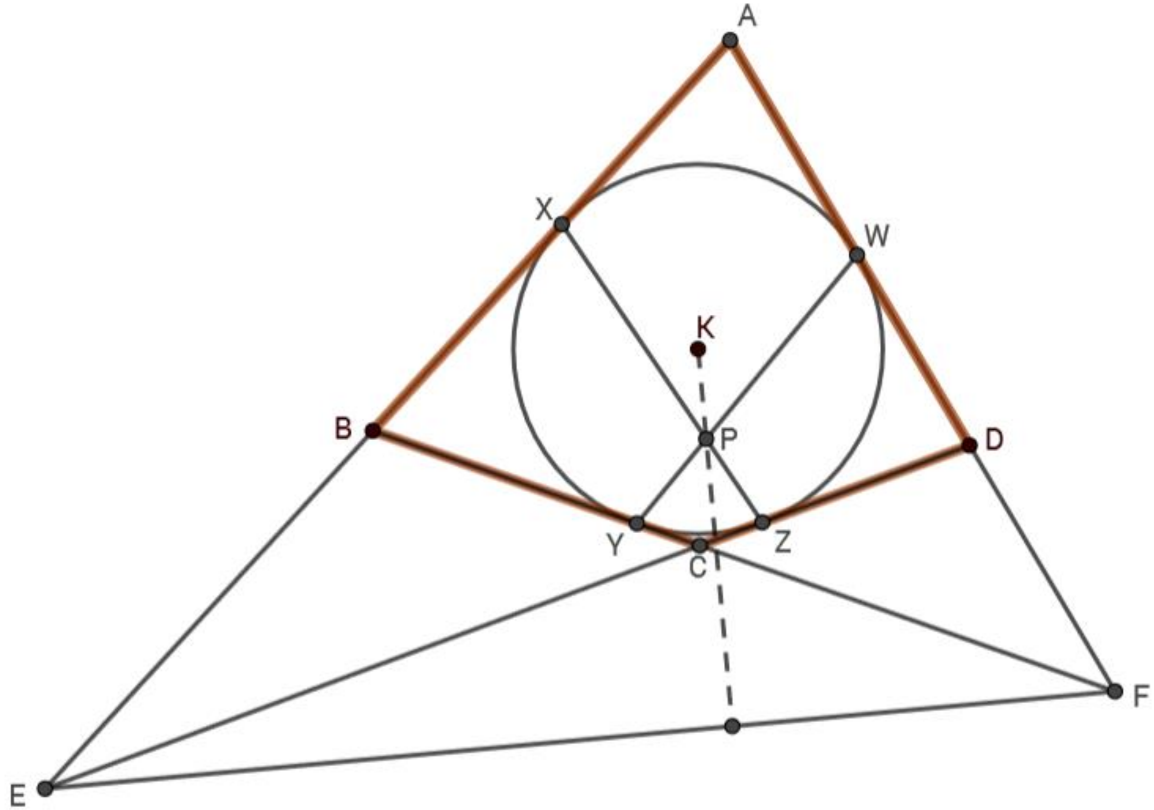


2. feladat:

Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre k, amely az AB, BC, CD, DA oldalakat az X, Y, Z, W pontokban érinti.

Legyen $AB \cap CD = E$, $AD \cap BC = F$ és $XZ \cap YW = P$.

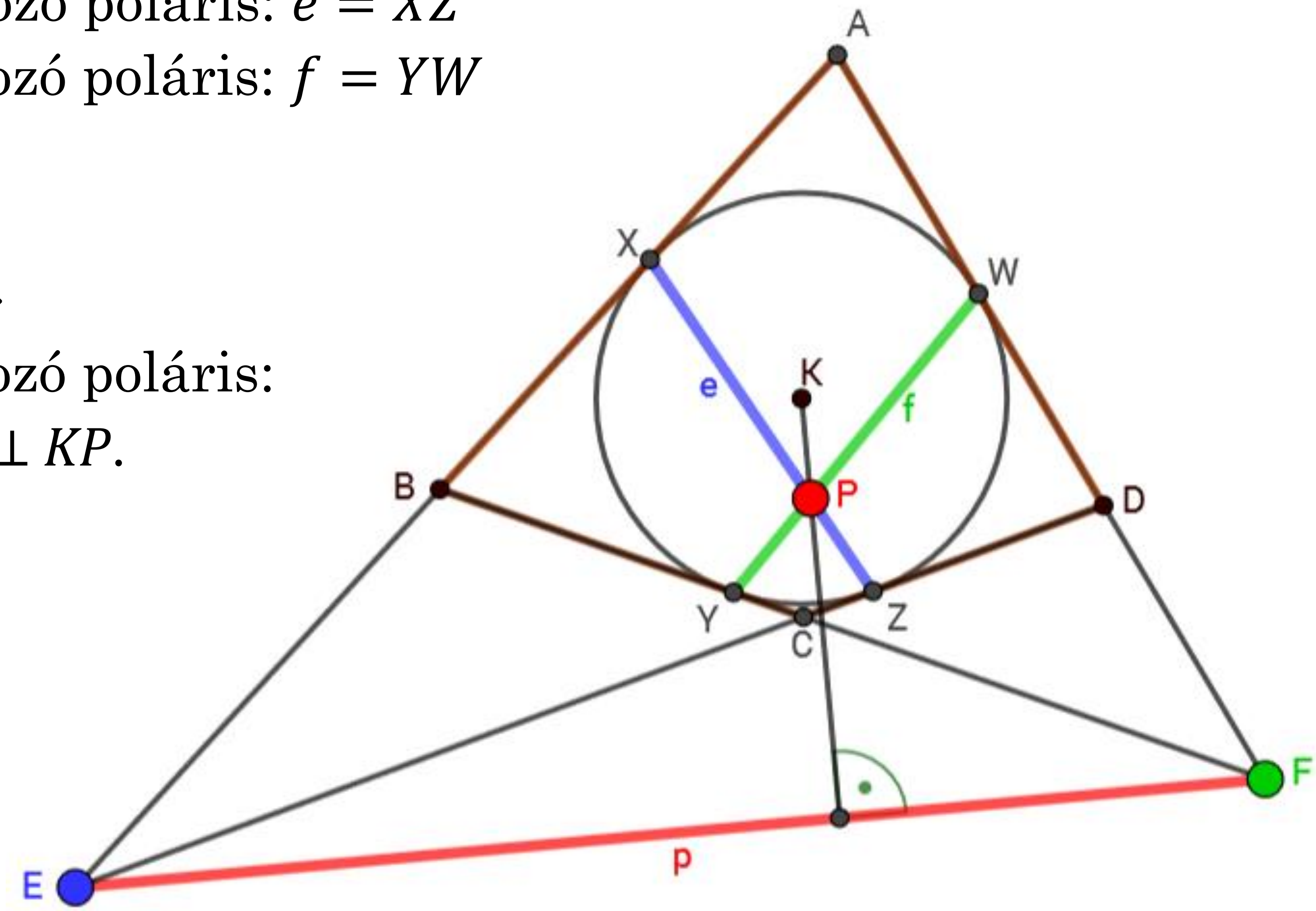
Igazoljuk, ha a k kör középpontja K, akkor $EF \perp KP$.



2. feladat megoldása:

E-hez tartozó poláris: $e = XZ$
F-hez tartozó poláris: $f = YW$

$e \cap f = P$
2. tétel $\Rightarrow$
P-hez tartozó poláris:
$p = EF \perp KP.$

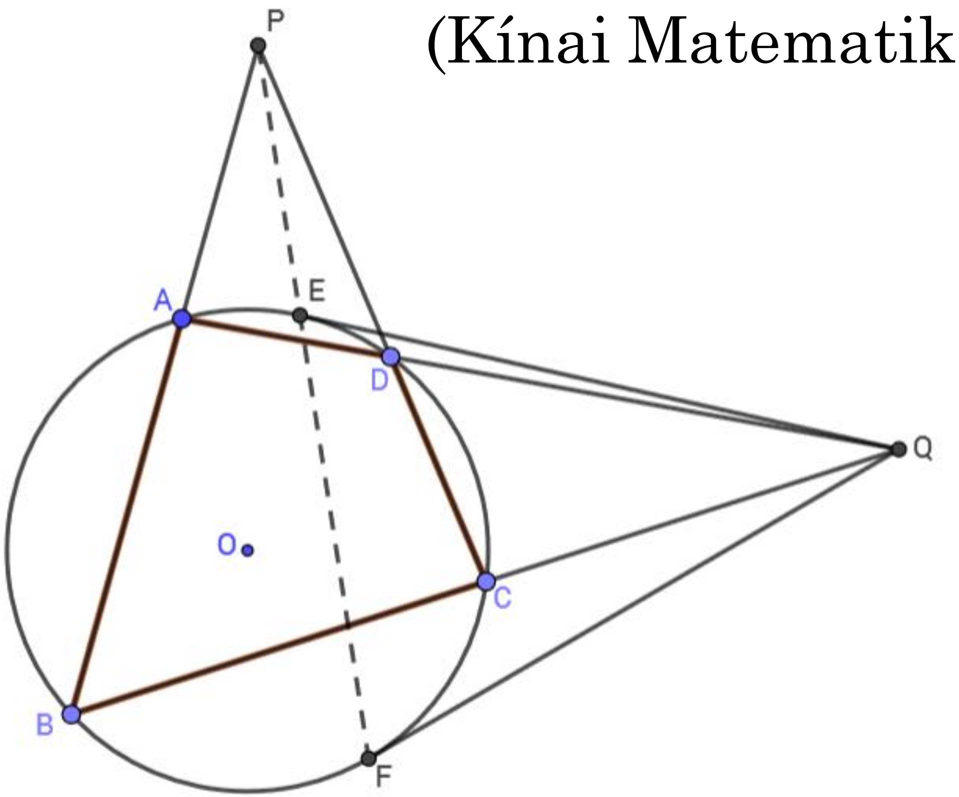


3. feladat:

Az $ABCD$ húrnégyszög AB és CD oldalegyeneseinek metszéspontja P, BC és DA oldalegyeneseinek metszéspontja pedig Q. A Q pontból a négyszög körülírt köréhez érintőket húzunk, az érintési pontok E és F.

Bizonyítsuk be, hogy a P, E, F pontok egy egyenesre esnek.

(Kínai Matematikai Olimpia 1997)



3. feladat megoldása:

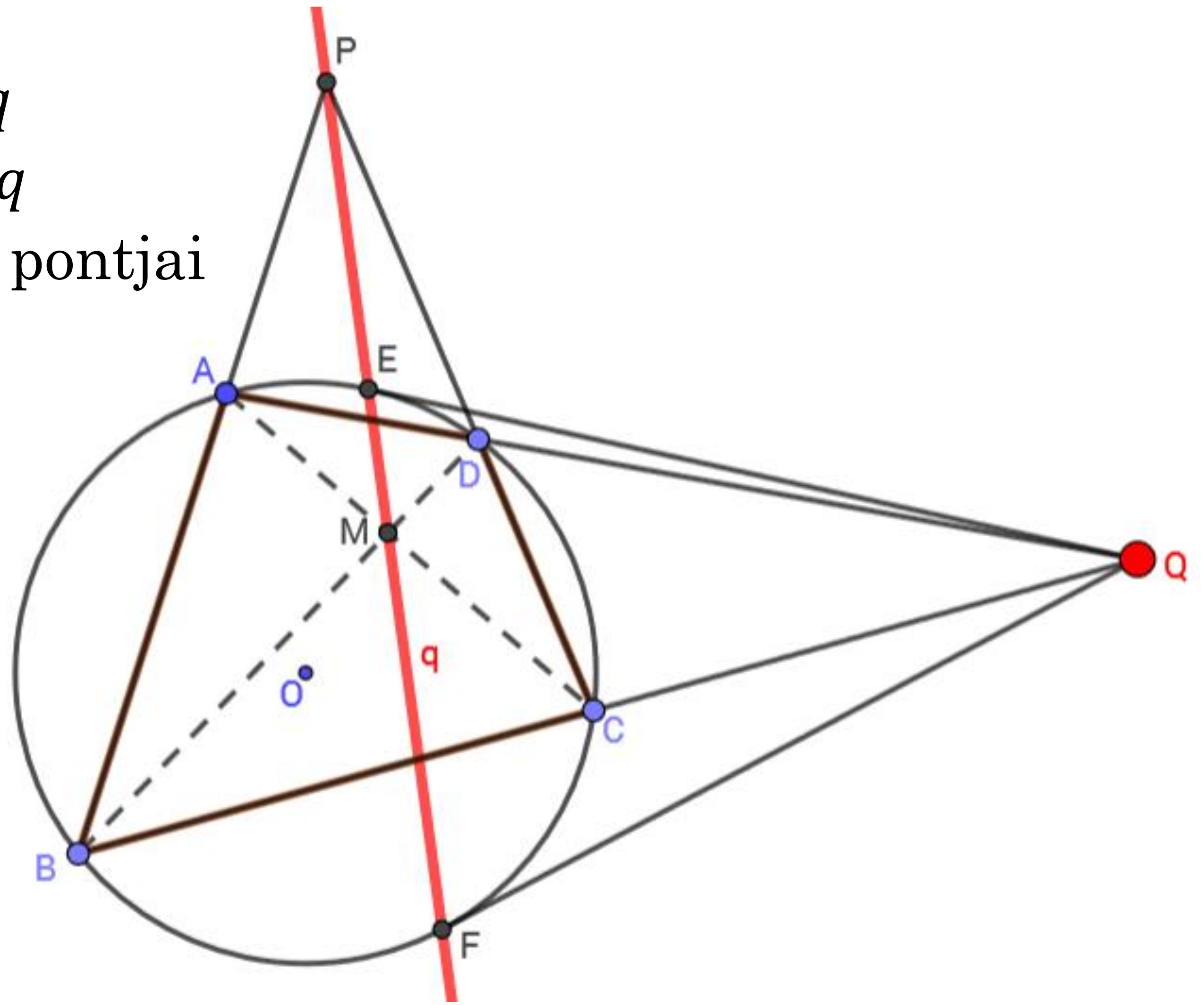
Q polárisa $q = EF$

3. tétel $\Rightarrow$

$AB \cap CD = P \in q$

$AC \cap BD = M \in q$

P, E, F a q egyenes pontjai (sőt M is)

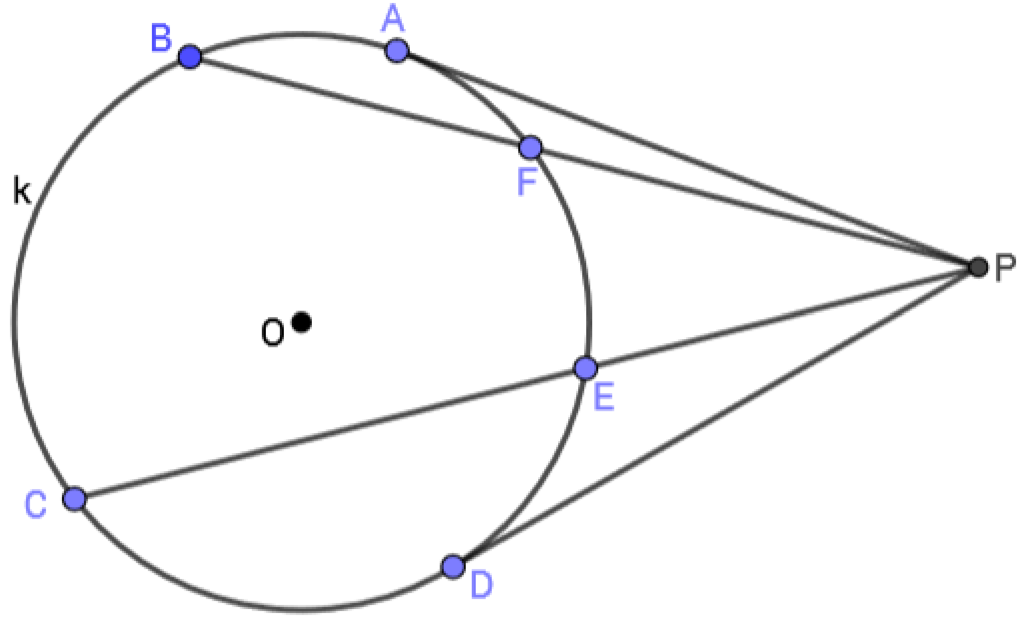


4. feladat:

Az A, B, C, D, E, F pontok a megadott sorrend szerint helyezkednek el egy k körön. A kör A és D pontbeli érintői, valamint a BF és CE egyenesek P pontban metszik egymást.

Bizonyítsuk be, hogy az AD, BC és EF egyenesek vagy párhuzamosak, vagy egy pontban metszik egymást.

(Lengyel–Osztrák Matematikai Olimpia 1998)



4. feladat megoldása:

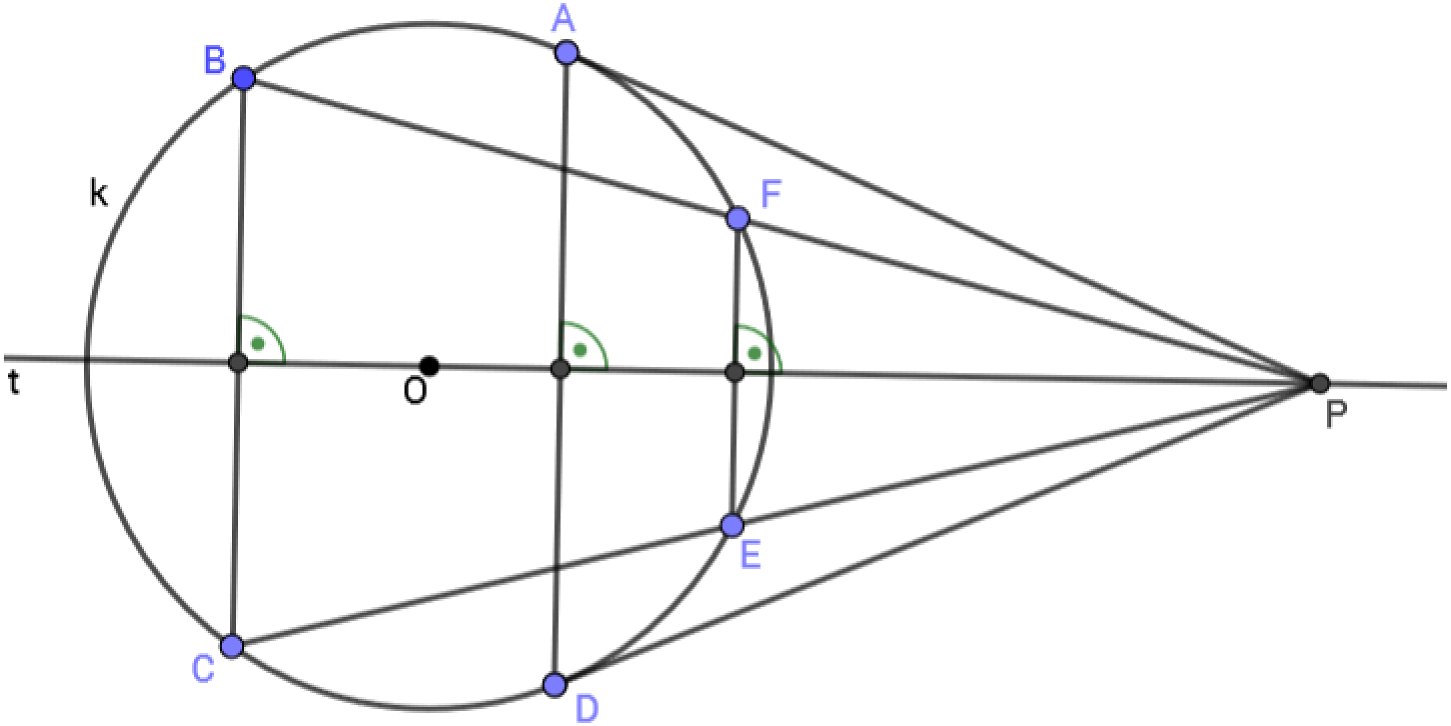
$a)$ $BC \parallel EF$

$BC \parallel EF \;\Rightarrow\; BCEF$ húrtrapéz,

tengelyesen szimmetrikus $OP = t$-re

A és D is tengelyesen szimmetrikus t-re

$BC \perp t$, $AD \perp t$, $EF \perp t \quad \Rightarrow \quad BC \parallel AD \parallel EF$



4. feladat megoldása: (folytatás)

$b)$ $BC \cap EF = Q$

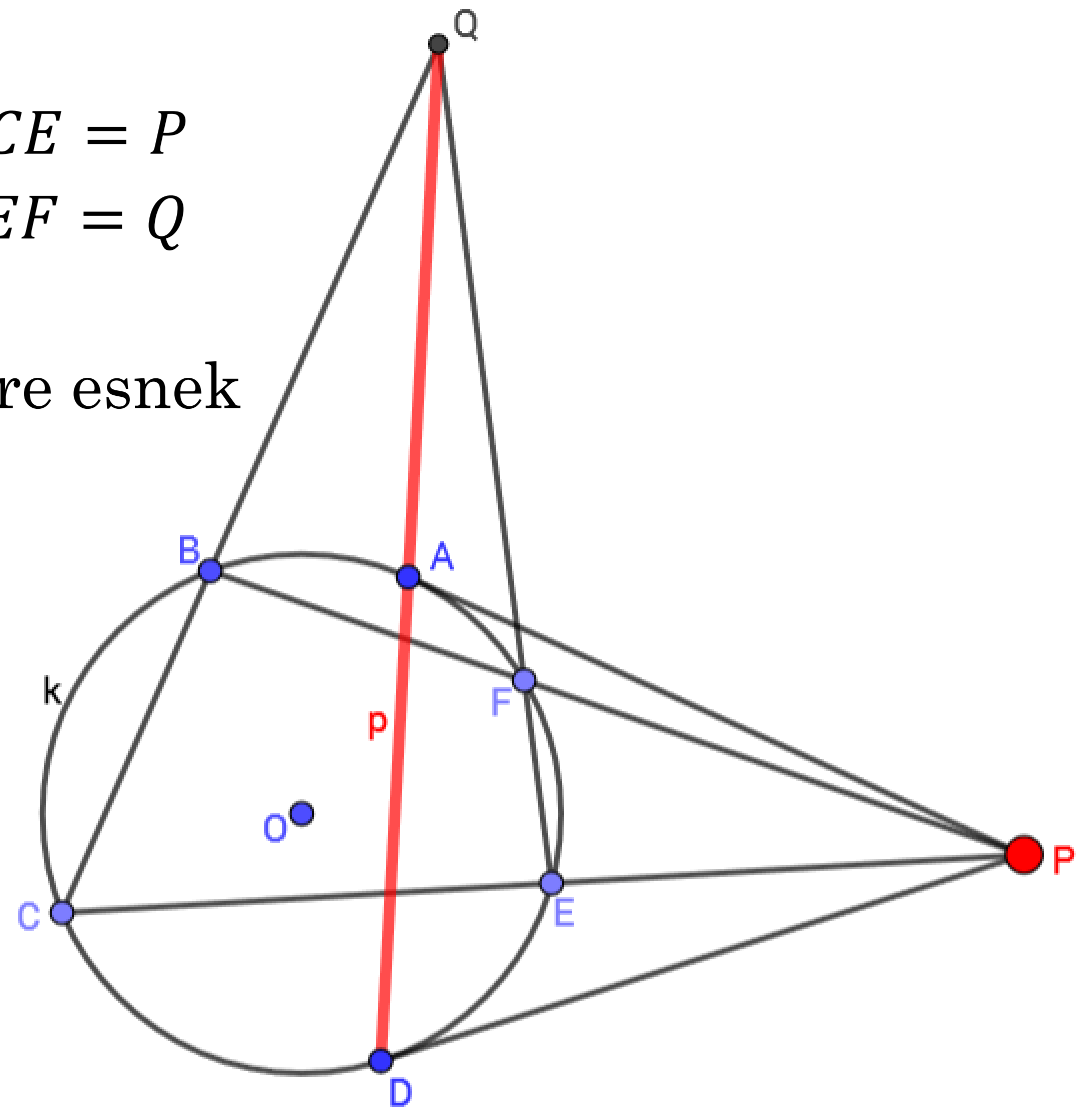
P polárisa $p = AD$

$BCEF$ húrnégyszög $BF \cap CE = P$

$BC \cap EF = Q$

3. tétel $Q \in p$

$\Rightarrow$ A, D, Q egy egyenesre esnek

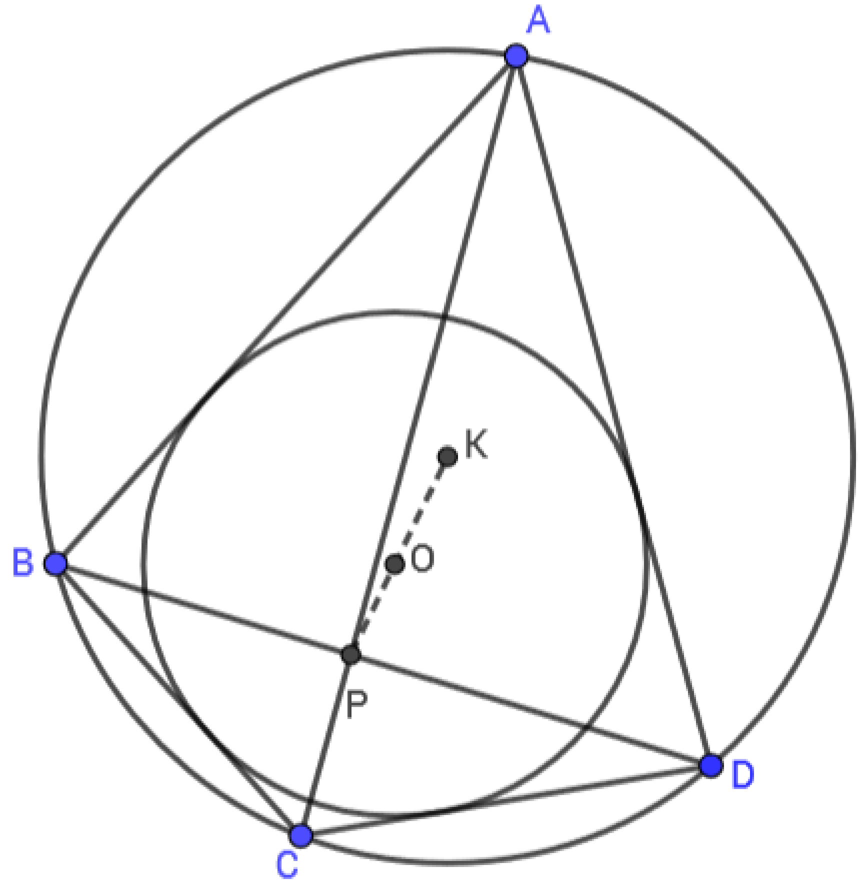


5. feladat:

Az $ABCD$ bicentrikus négyszög körülírt körének középpontja K, beírt körének középpontja O. Az AC és BD átlók a P pontban metszik egymást.

Igazoljuk, hogy a K, O, P pontok egy egyenesre esnek.

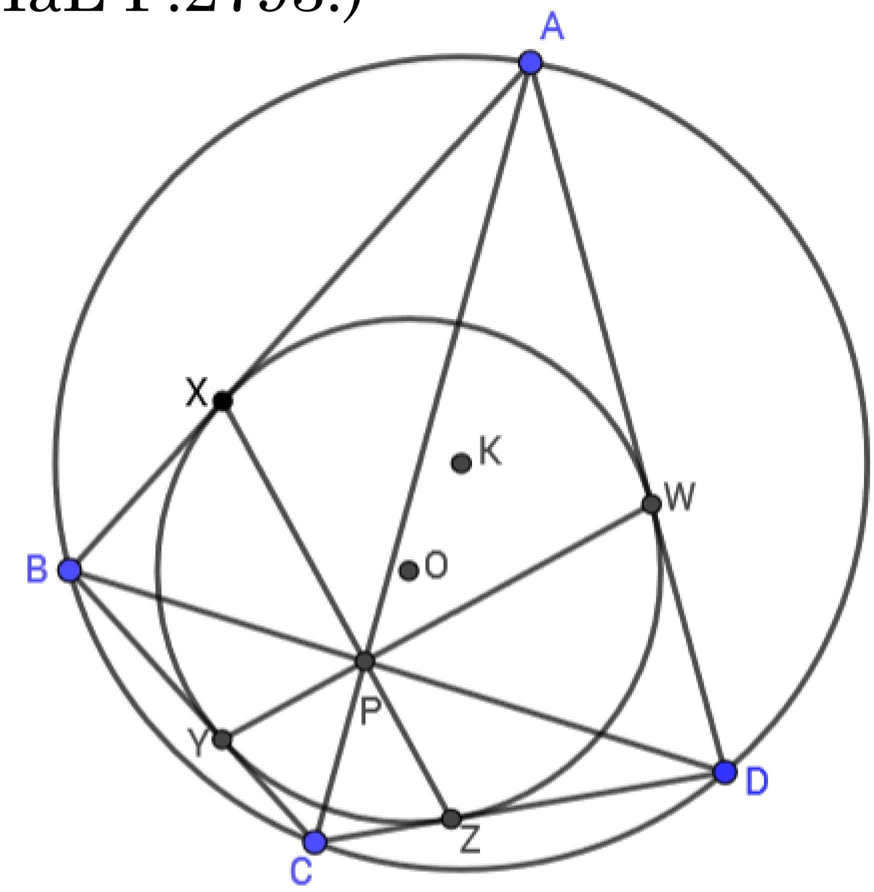
(IMO shortlist)



5. feladat megoldása:

a) Segédtétel:

Bicentrikus négyszögben a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok és az átlók egy pontban metszik egymást. (KöMaL F.2793.)

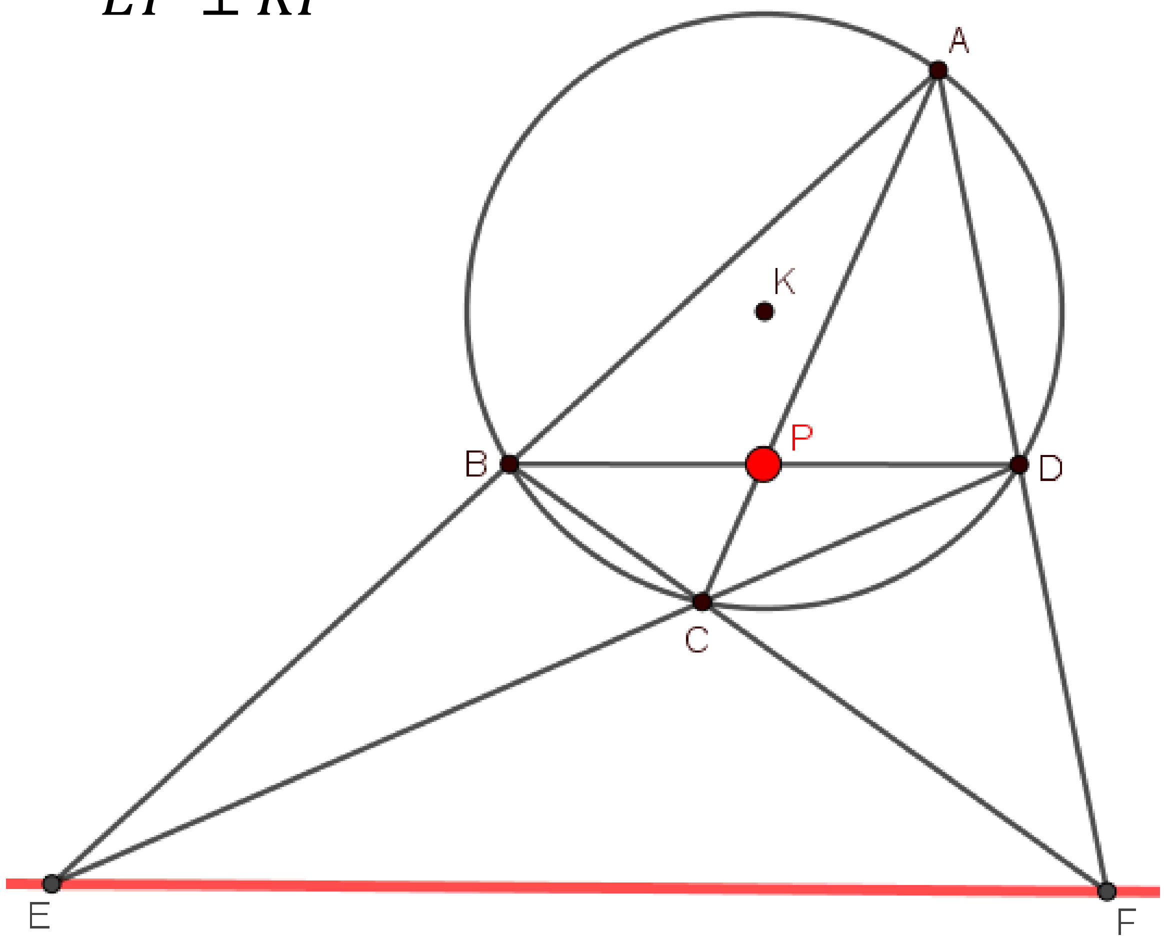


5. feladat megoldása: (folytatás)

$b)\ AB \cap CD = E,\ BC \cap AD = F$

3. tétel $\quad \Rightarrow \quad p = EF$ (a körülírt körre vonatkozóan)

$\qquad\qquad\qquad\quad EF \perp KP$

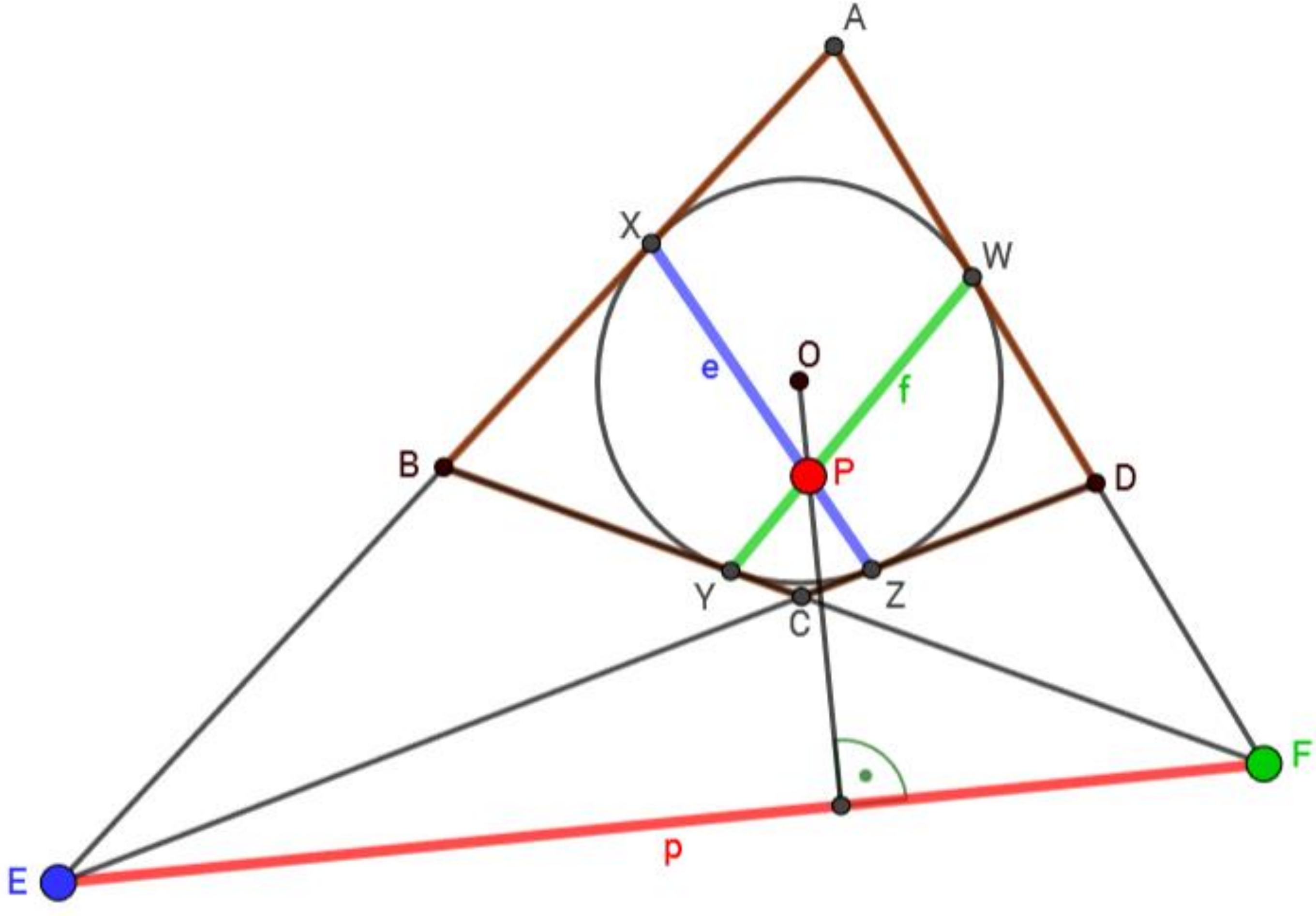


5. feladat megoldása: (folytatás)

c) 2. feladat $\quad p = EF \quad$ (a beírt körre vonatkozóan)

$EF \perp OP$

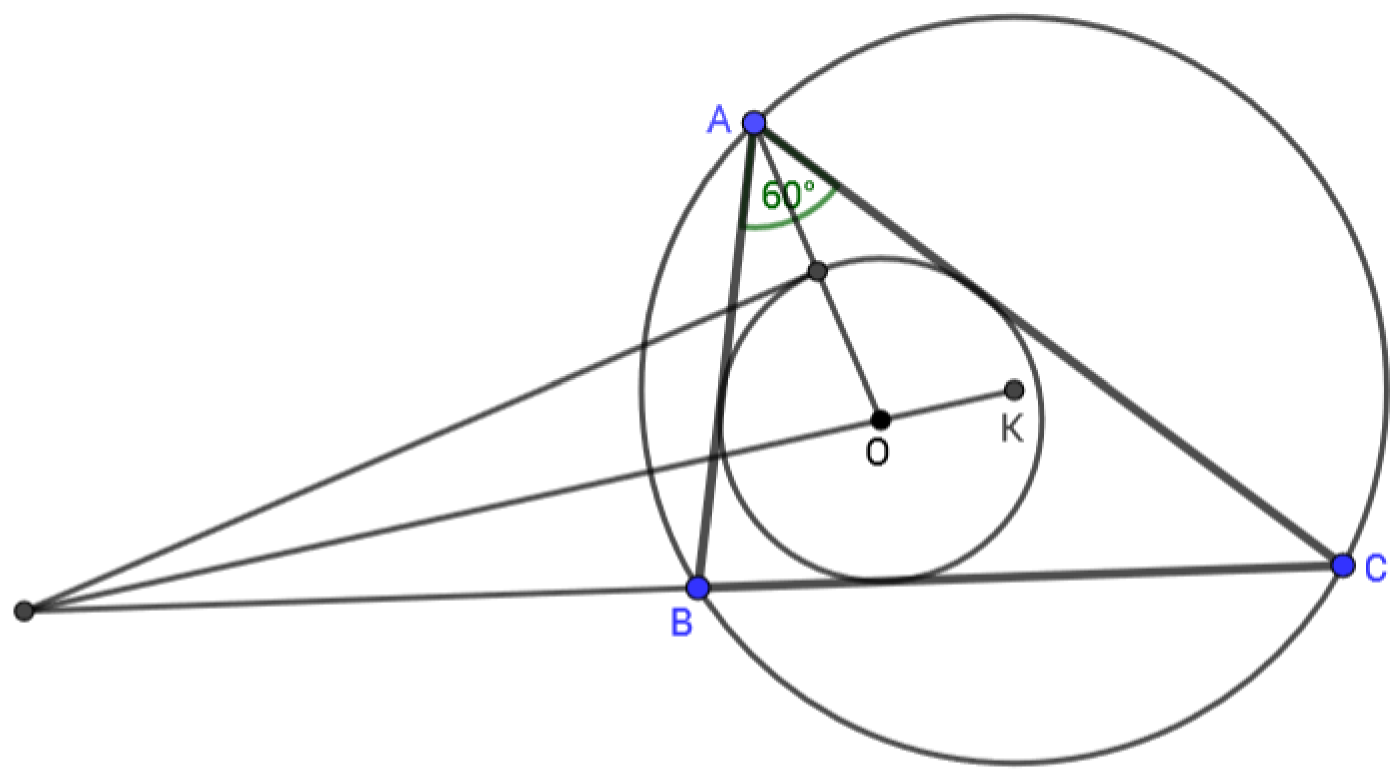
$\Rightarrow \quad KP \parallel OP \quad \Rightarrow \; K, O, P$ egy egyenesen vannak



6. feladat:

Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő szög 60°, $AB \neq AC$, O a beírt, K a körülírt kör középpontja.

Bizonyítsuk be, hogy az AO szakasz felezőmerőlegese, a KO és BC egyenesek egy közös ponton haladnak át.



6. feladat megoldása:

$AFO \triangle$ félszabályos háromszög

X az AO felezőpontja $\Rightarrow$ X az AFO körülírt körének középpontja

$\Rightarrow XF = XA = XO, \quad XFO$ szabályos $\triangle \Rightarrow \quad XO = OF = r$

$\Rightarrow k_1$ felezi az AO szakaszt

$\Rightarrow AO$ felezőmerőlegese érintője k_1-nek

$$BOC\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 180° - \frac{180° - 60°}{2} = 120°$$

$\Rightarrow BO'C \sphericalangle = 120° \Rightarrow O' \in k_2 \Rightarrow KA = KO'$

$OA = OO' = 2r \quad \Rightarrow \quad KOA \triangle \cong KOO' \triangle$

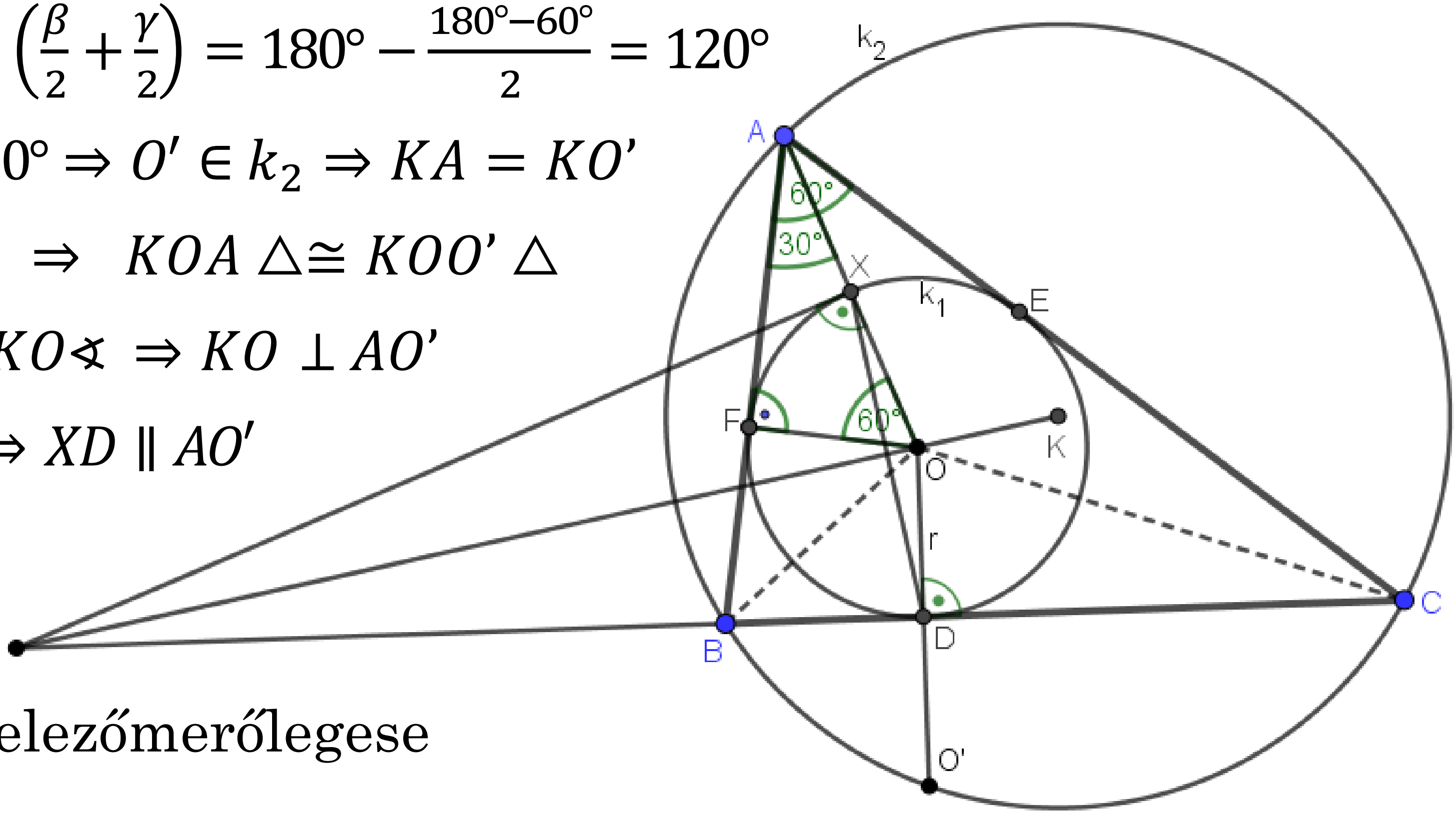
$\Rightarrow OKA\sphericalangle = O'KO\sphericalangle \Rightarrow KO \perp AO'$

$AO'O \triangle$-ben $\Rightarrow XD \parallel AO'$

$\Rightarrow \; KO \perp XD$

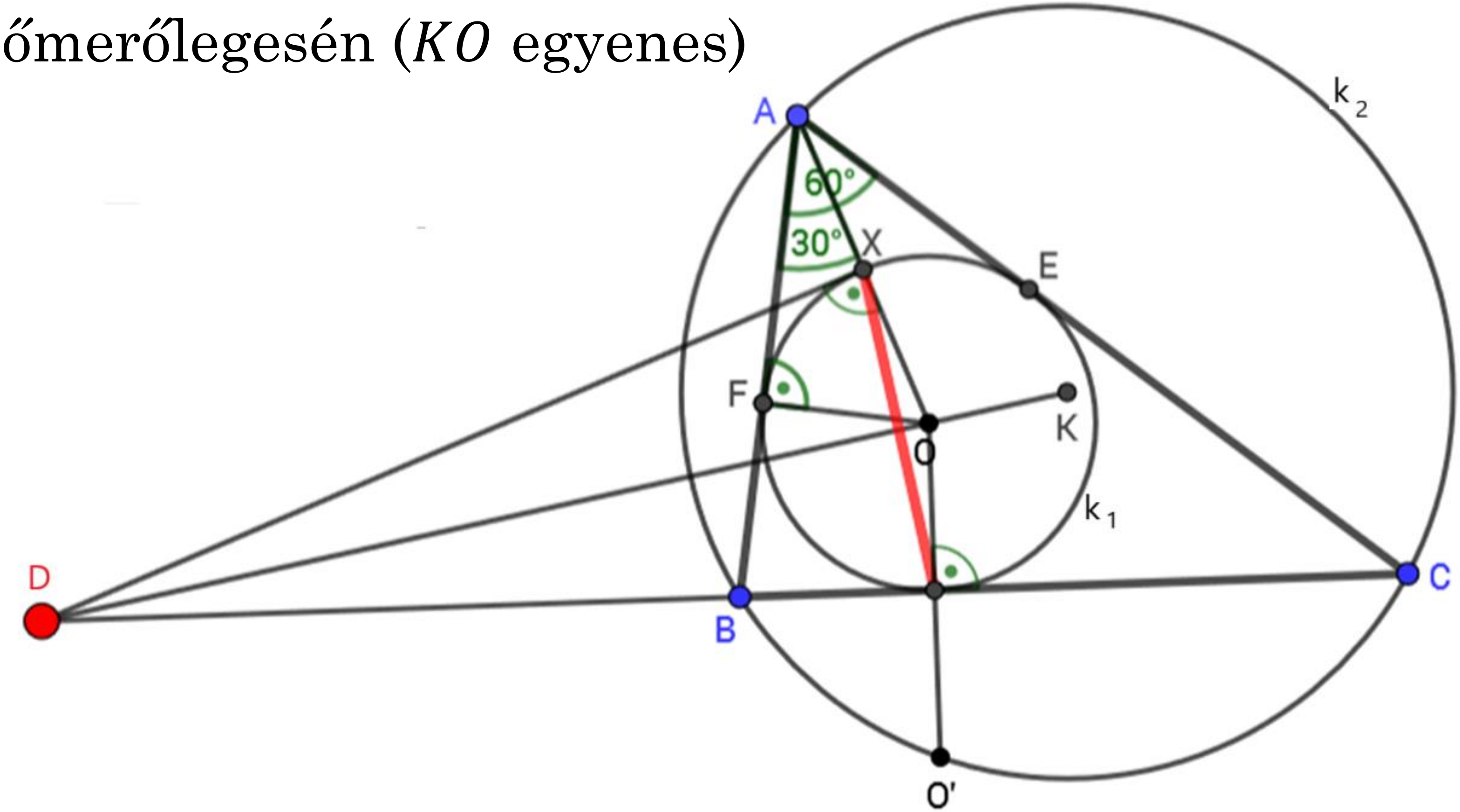
$OX = OD = r$

$\Rightarrow KO$ az XD felezőmerőlegese



6. feladat megoldása: (folytatás)

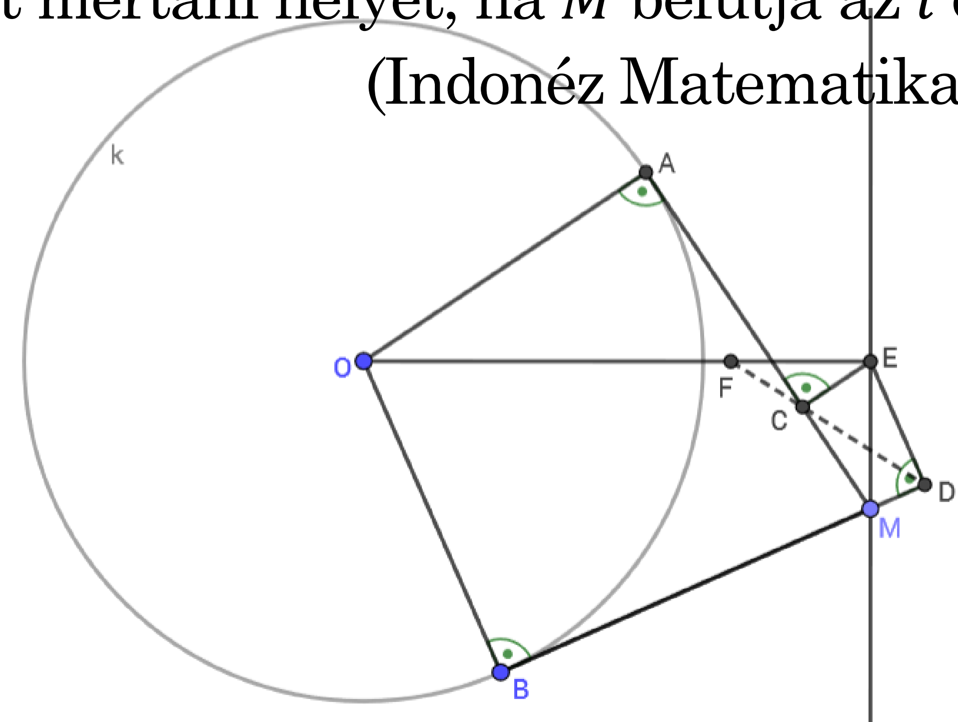
k_1 körre vonatkozóan
XD pólusa rajta van
k_1 X pontbeli érintőjén (AO felezőmerőlegese)
k_1 D pontbeli érintőjén (BC oldalegyenes)
XD felezőmerőlegesén (KO egyenes)



7. feladat:

Adott egy O középpontú k kör, és egy olyan l egyenes, melynek nincs közös pontja k-val. E az l egyenes azon pontja, melyre OE merőleges l-re. Legyen M egy E-től különböző pontja l-nek, A és B pedig az M-től a k-ig húzott érintőszakaszok egy-egy végpontja. Legyen C és D az E pontból az MA és MB egyenesekre állított merőlegesek talppontja és $CD \cap OE = F$. Határozzuk meg az F pont mértani helyét, ha M befutja az l egyenest.

(Indonéz Matematikai Olimpia, 2012)



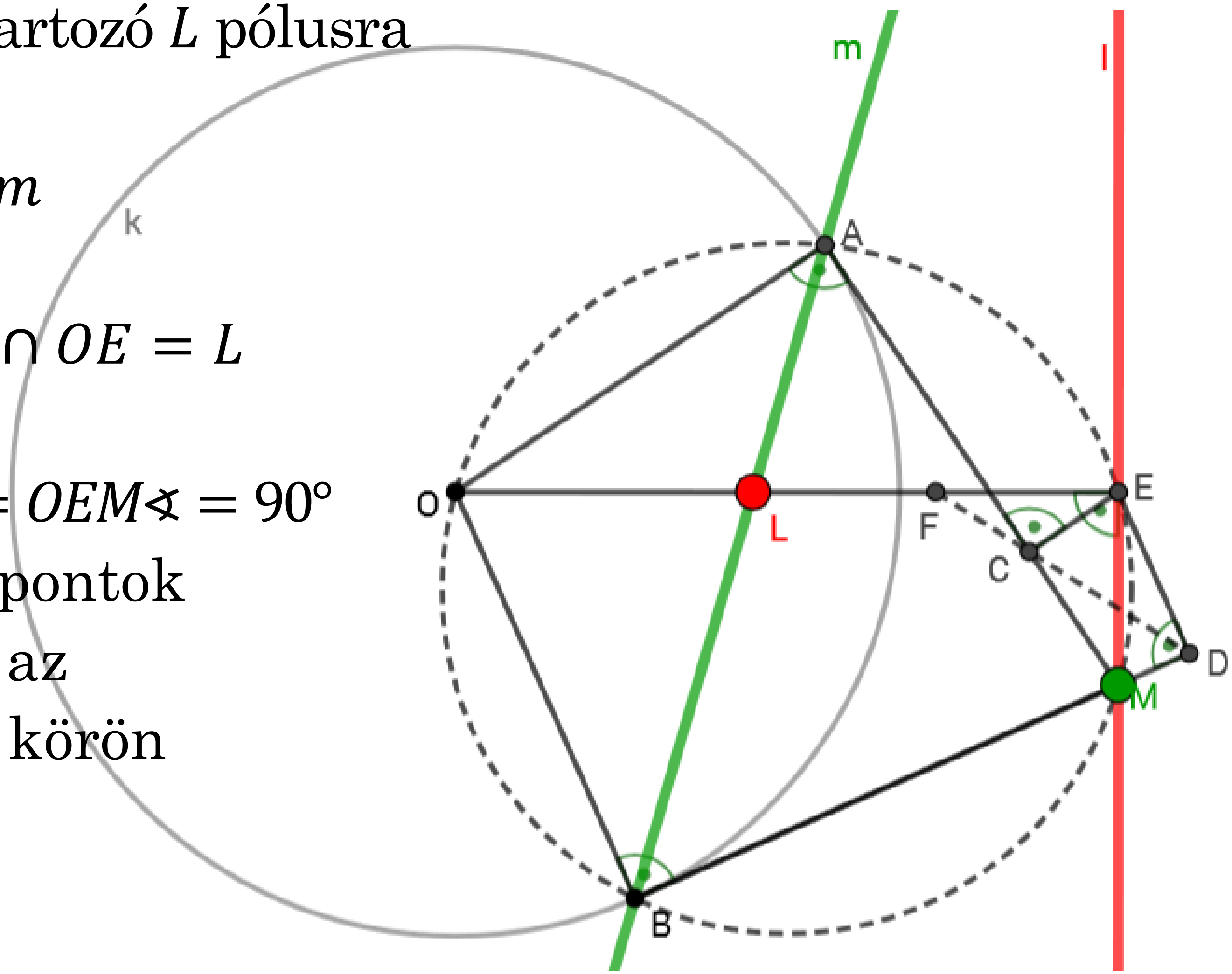
7. feladat megoldása:

M pont polárisa $m = AB$

Az l polárishoz tartozó L pólusra
La Hire elmélet
$\Rightarrow \quad M \in l \Rightarrow L \in m$

$OL \perp l \quad \Rightarrow \quad AB \cap OE = L$

$OAM\sphericalangle = OBM\sphericalangle = OEM\sphericalangle = 90°$
$\Rightarrow O, M, A, B, E$ pontok
rajta vannak az
OM átmérőjű körön



7. feladat megoldása: (folytatás)

E-ből állítsunk merőlegest AB-re (talppont G)

D, C, (F), G egy egyenesre esnek (Simson egyenes)

$BDEG$ húrnégyszögben:

$FGE\sphericalangle = DGE\sphericalangle = DBE\sphericalangle = MBE\sphericalangle$

$BMEO$ húrnégyszögben:

$MBE\sphericalangle = MOE\sphericalangle$

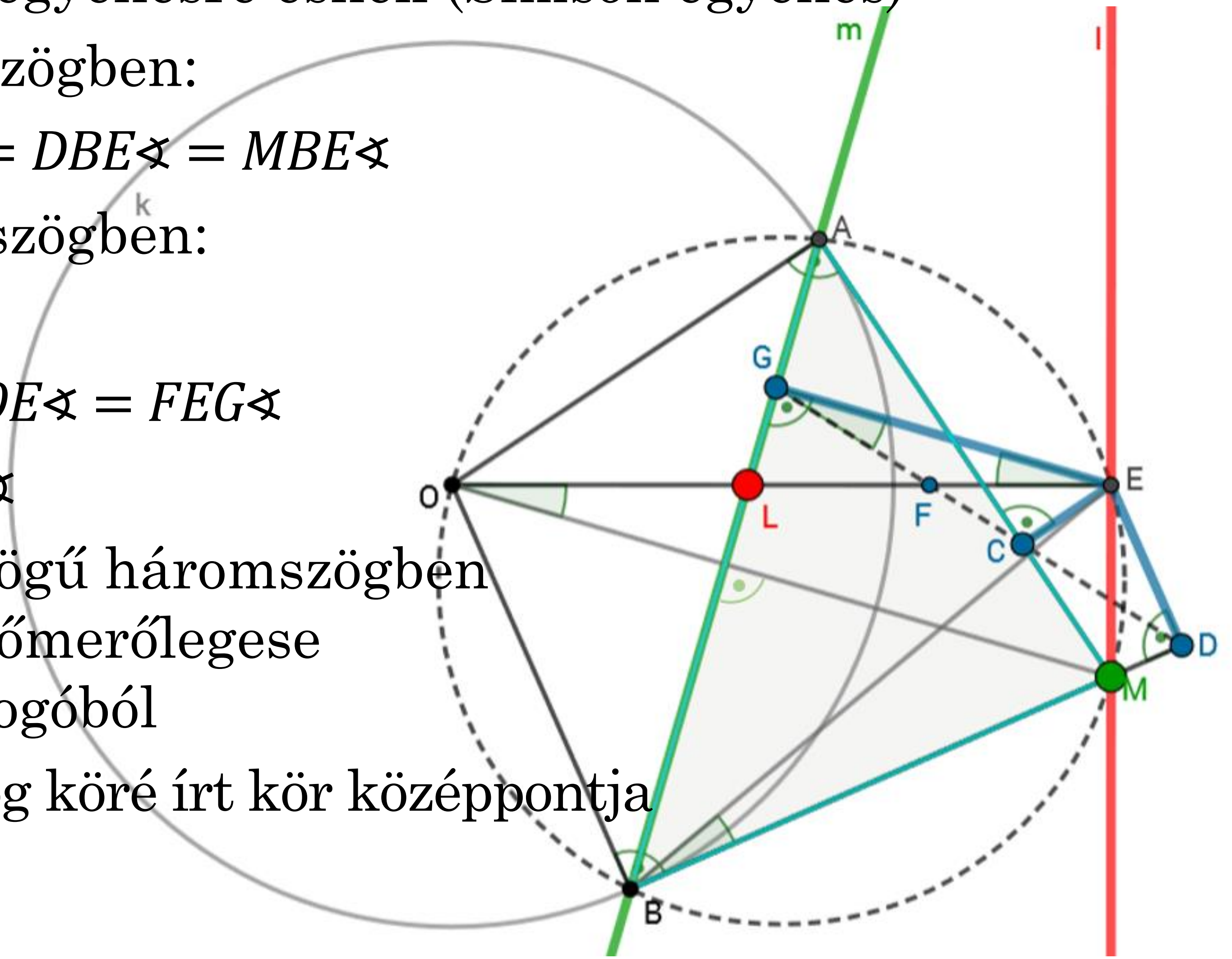
$MO \parallel EG \quad \Rightarrow \quad MOE\sphericalangle = FEG\sphericalangle$

$\Rightarrow \quad FGE\sphericalangle = FEG\sphericalangle$

Az LEG derékszögű háromszögben F-et az EG felezőmerőlegese metszi ki az átfogóból

$\Rightarrow$ F a háromszög köré írt kör középpontja

$\Rightarrow$ $LF = FE$

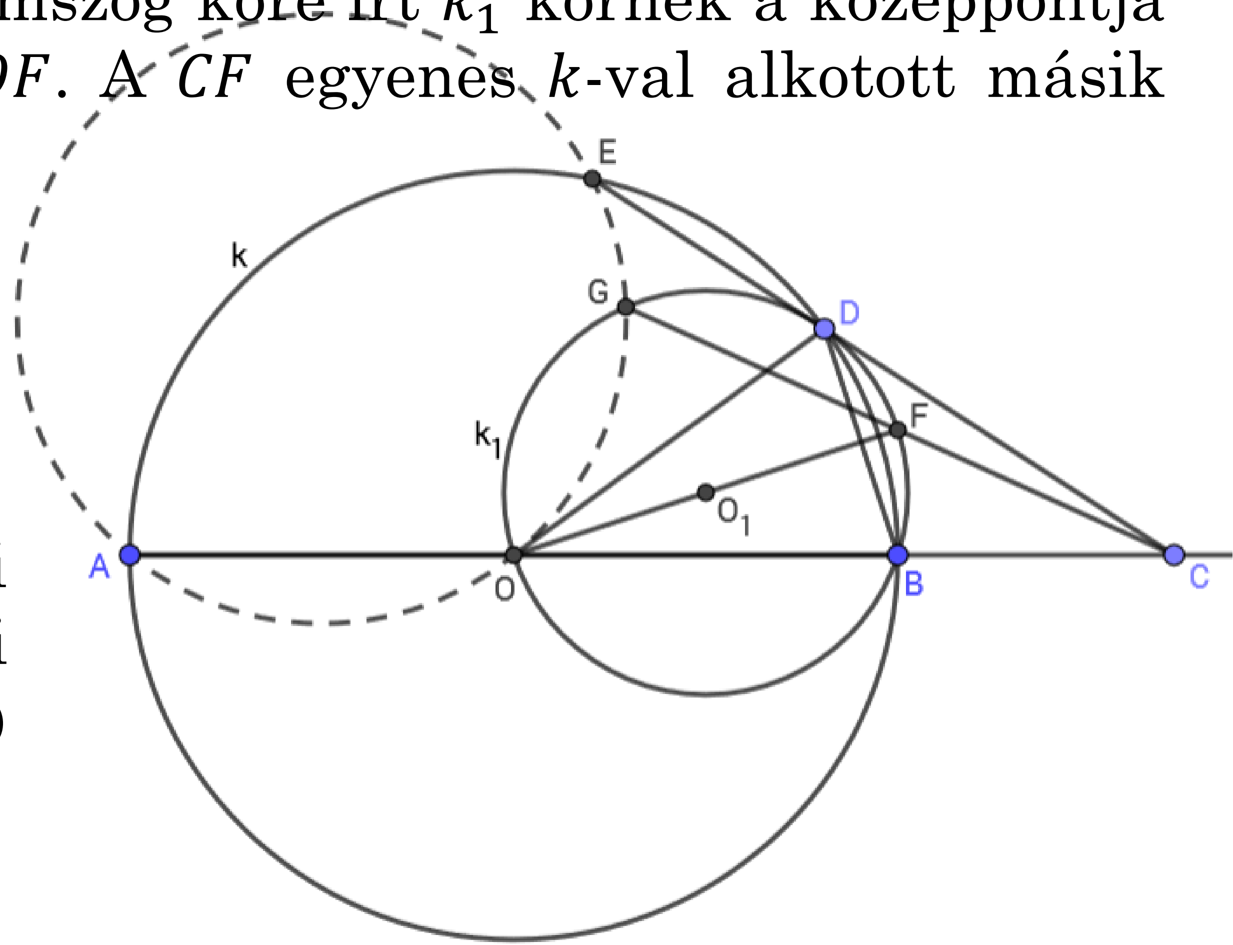


8. feladat:

Az O középpontú k kör AB átmérőjének B-n túli meghosszabbításán felveszünk egy C pontot, és ezen keresztül húzunk egy olyan szelőt, amely a k kört a D és E pontban metszi. Az OBD háromszög köré írt k_1 körnek a középpontja O_1, egyik átmérője OF. A CF egyenes k-val alkotott másik metszéspontja G.

Igazoljuk, hogy az O, A, E, G pontok egy körön helyezkednek el.

(Nyugat-Kínai Matematikai Olimpia 2006)



8. feladat megoldása:

Az $ABDE$ húrnégyszögben

$AE \cap BD = P$, $AD \cap BE = H$, $AB \cap DE = C$

3. tétel $\Rightarrow$ P polárisa k-ra vonatkozóan $p = CH \Rightarrow CH \perp OP$

$OP \cap CH = Q$

$\Rightarrow P, H, D, E, Q$
pontok egy körön vannak

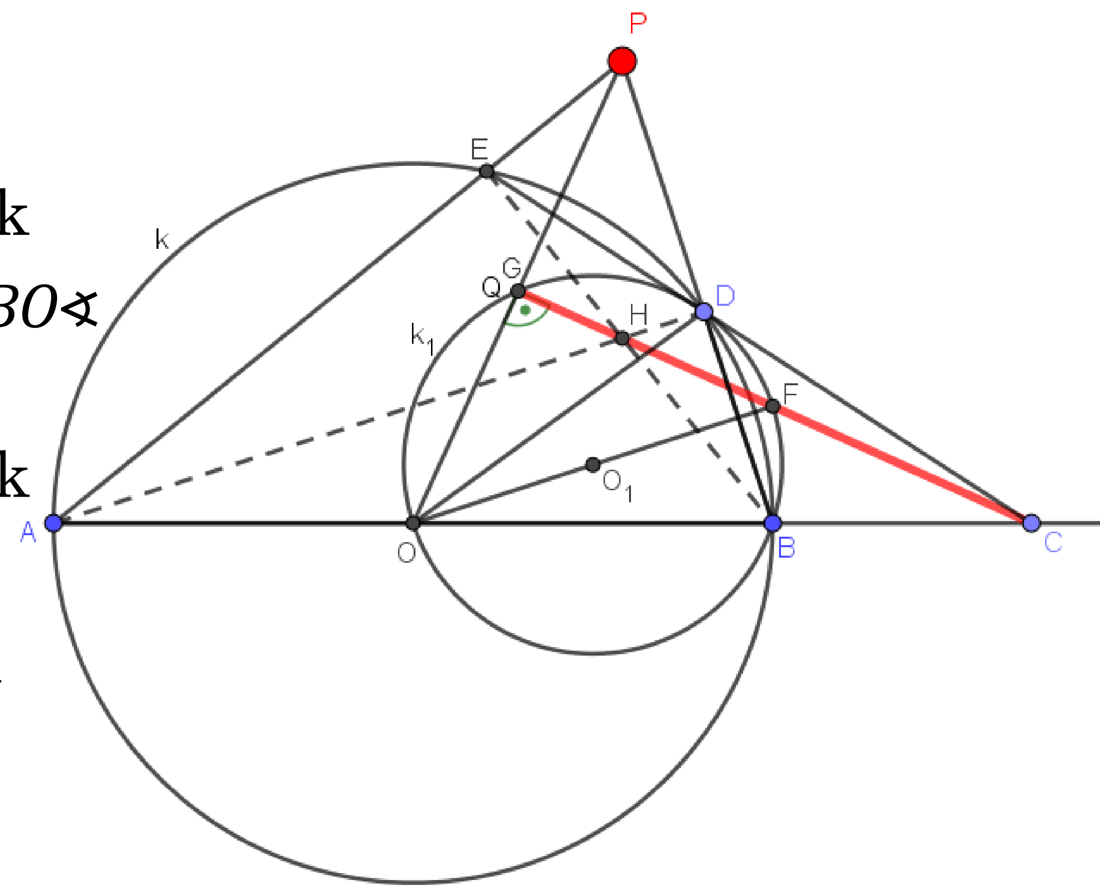
$PQD\sphericalangle = PED\sphericalangle = DBA\sphericalangle = DBO\sphericalangle$

$\Rightarrow O, B, D, Q$
pontok egy körön vannak

$\Rightarrow Q = G$

$\Rightarrow C, F, H, G$ kollineárisak

$\Rightarrow O, G, P$ kollineárisak



8. feladat megoldása:

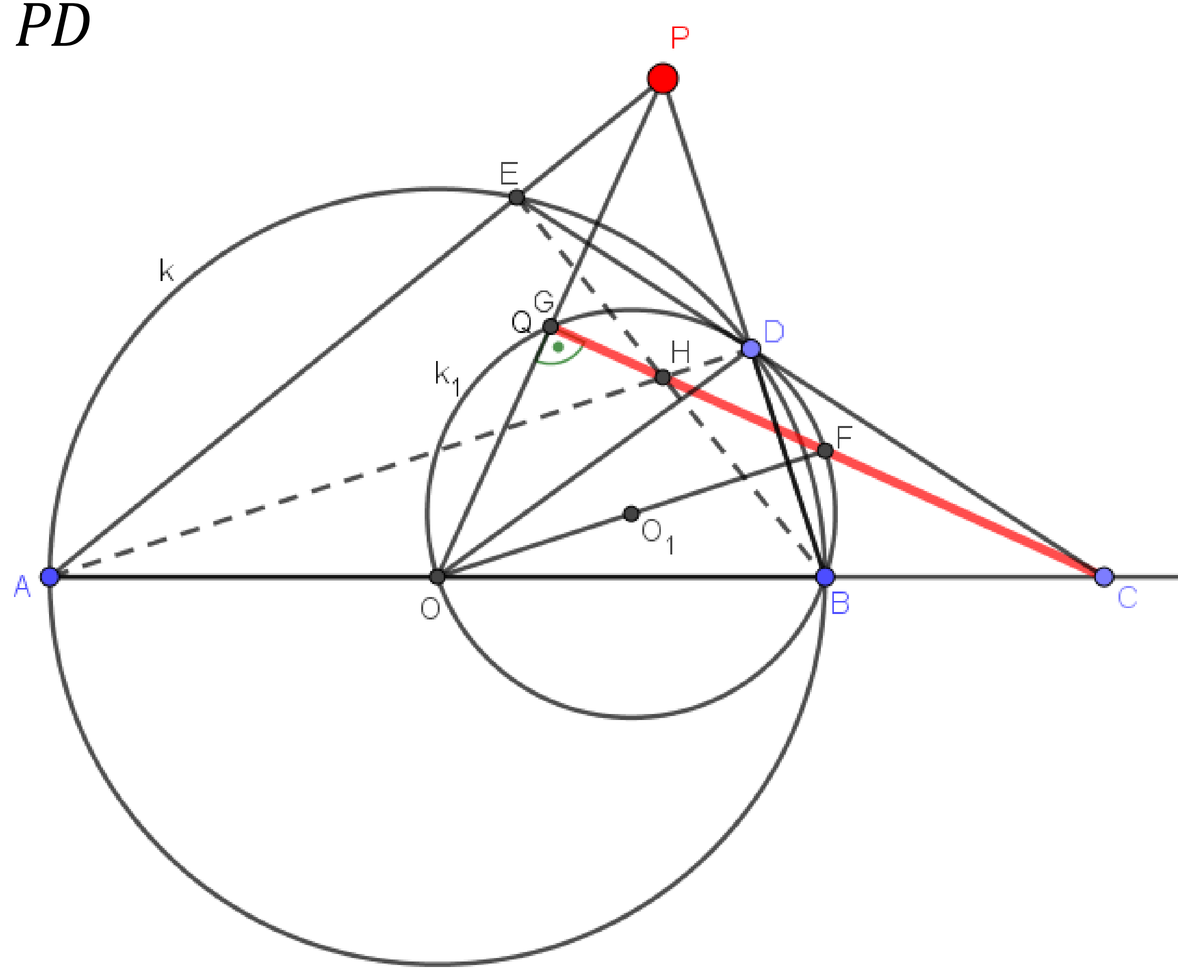
Szelőtétel alapján:

k körben $PA \cdot PE = PB \cdot PD$

k_1 körben $PO \cdot PG = PB \cdot PD$

$\Rightarrow PA \cdot PE = PO \cdot PG$

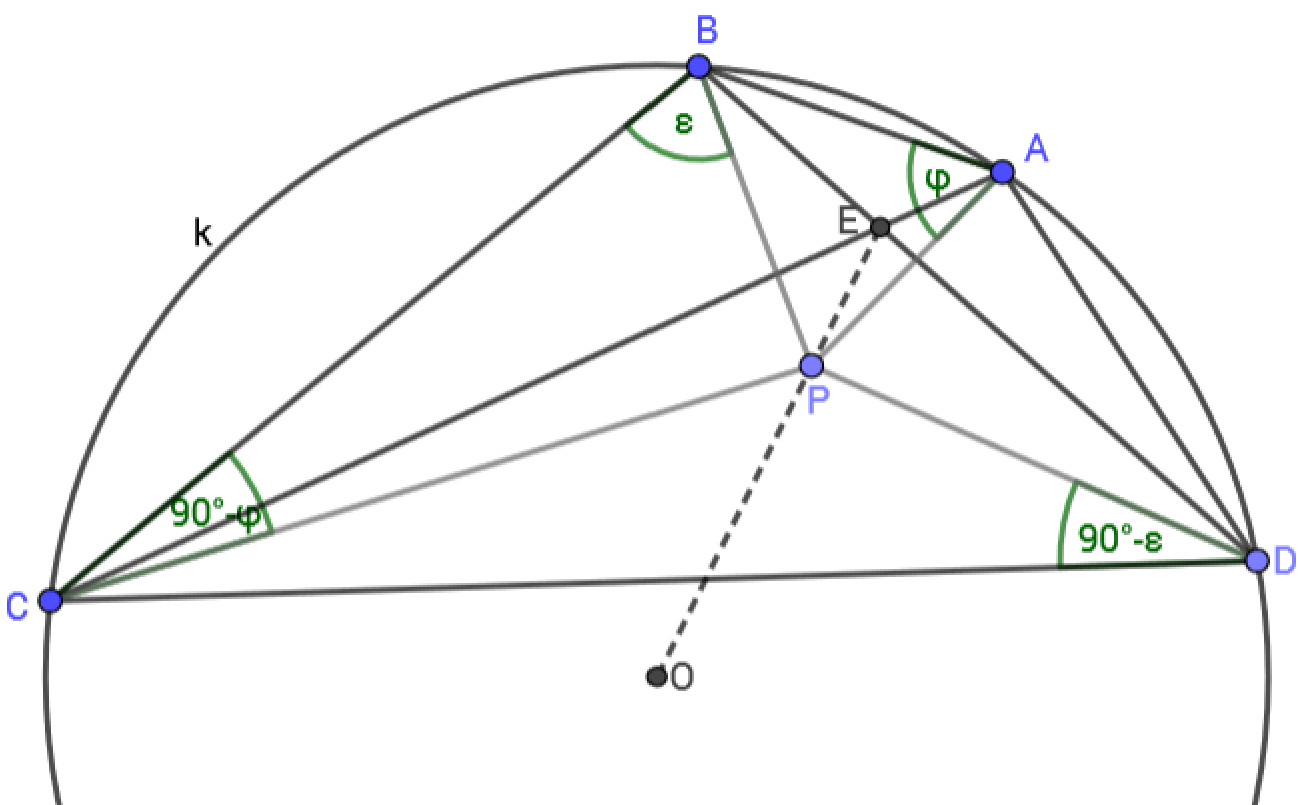
$\Rightarrow O, A, E, G$ pontok egy körön vannak



9. feladat:

Az O középpontú k körbe írt $ABCD$ négyszögben $AC \neq BD$, és az átlók az E pontban metszik egymást. P a négyszög azon belső pontja, melyre teljesül, hogy $PAB\sphericalangle + PCB\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PDC\sphericalangle = 90°$. Bizonyítsuk be, hogy az O, P és E pontok egy egyenesre esnek.

(Hong Kong-i Matematikai Olimpia, 2006)



9. feladat megoldása:

k körben:

$AOC\sphericalangle = 2 \cdot ADC\sphericalangle = 2(180° - ABC\sphericalangle) = 360° - 2 \cdot ABC\sphericalangle$

k_1 körben:

$AO_1C\sphericalangle = 2(180° - APC\sphericalangle) =$

$= 360° - 2[360° - (ABC\sphericalangle + PAB\sphericalangle + PCB\sphericalangle)] =$

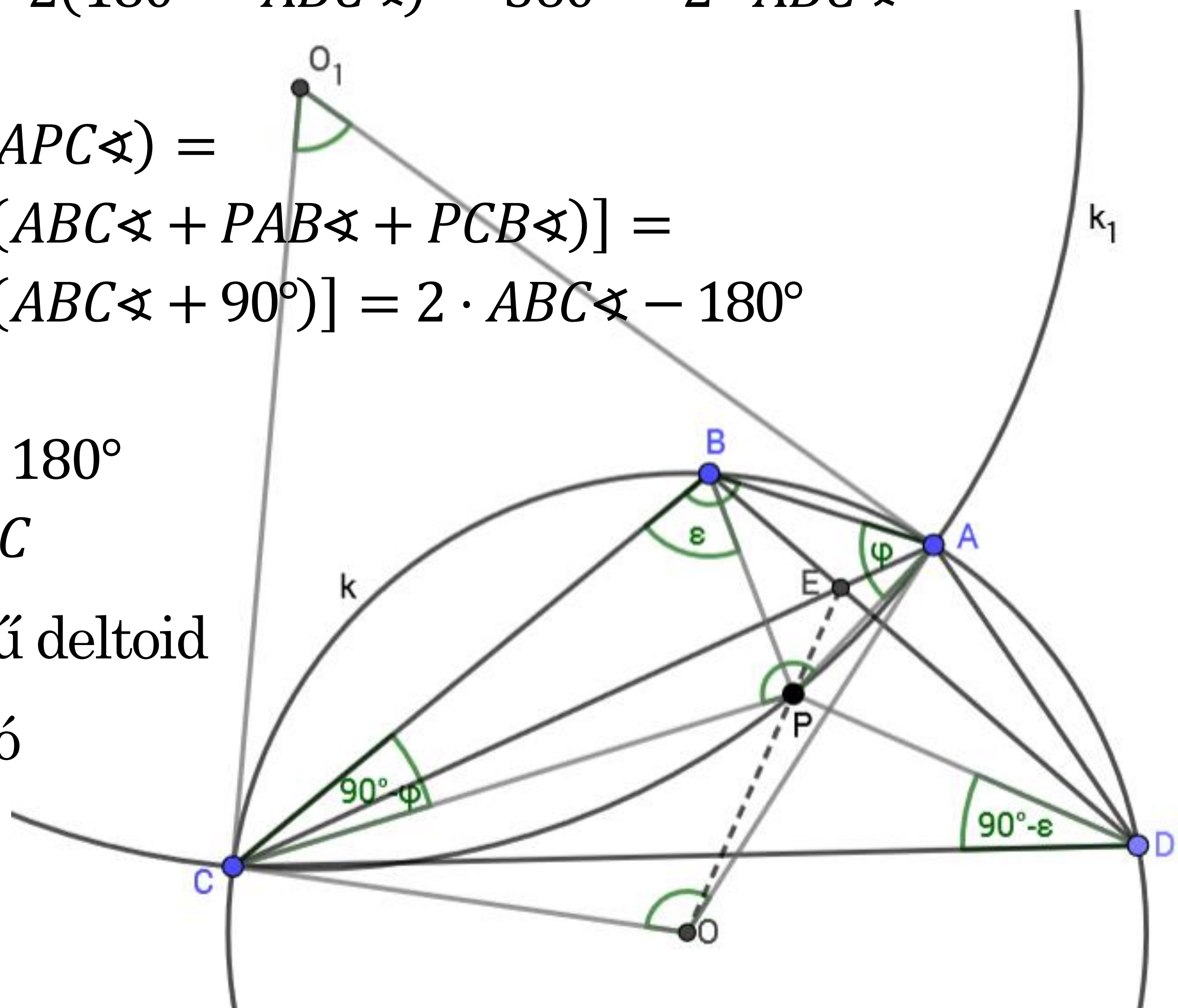
$= 360° - 2[360° - (ABC\sphericalangle + 90°)] = 2 \cdot ABC\sphericalangle - 180°$

$\Rightarrow AOC\sphericalangle + AO_1C\sphericalangle = 180°$

$O_1A = O_1C, OA = OC$

$\Rightarrow OAO_1C$ derékszögű deltoid

$\Rightarrow O_1$ k-ra vonatkozó polárisa AC



9. feladat megoldása: (folytatás)

O_1 k-ra vonatkozó polárisa AC
Hasonlóképpen O_2 k-ra vonatkozó polárisa BD

$o_1 \cap o_2 = E$
2. tétel $\Rightarrow e = O_1O_2 \Rightarrow OE \perp O_1O_2$

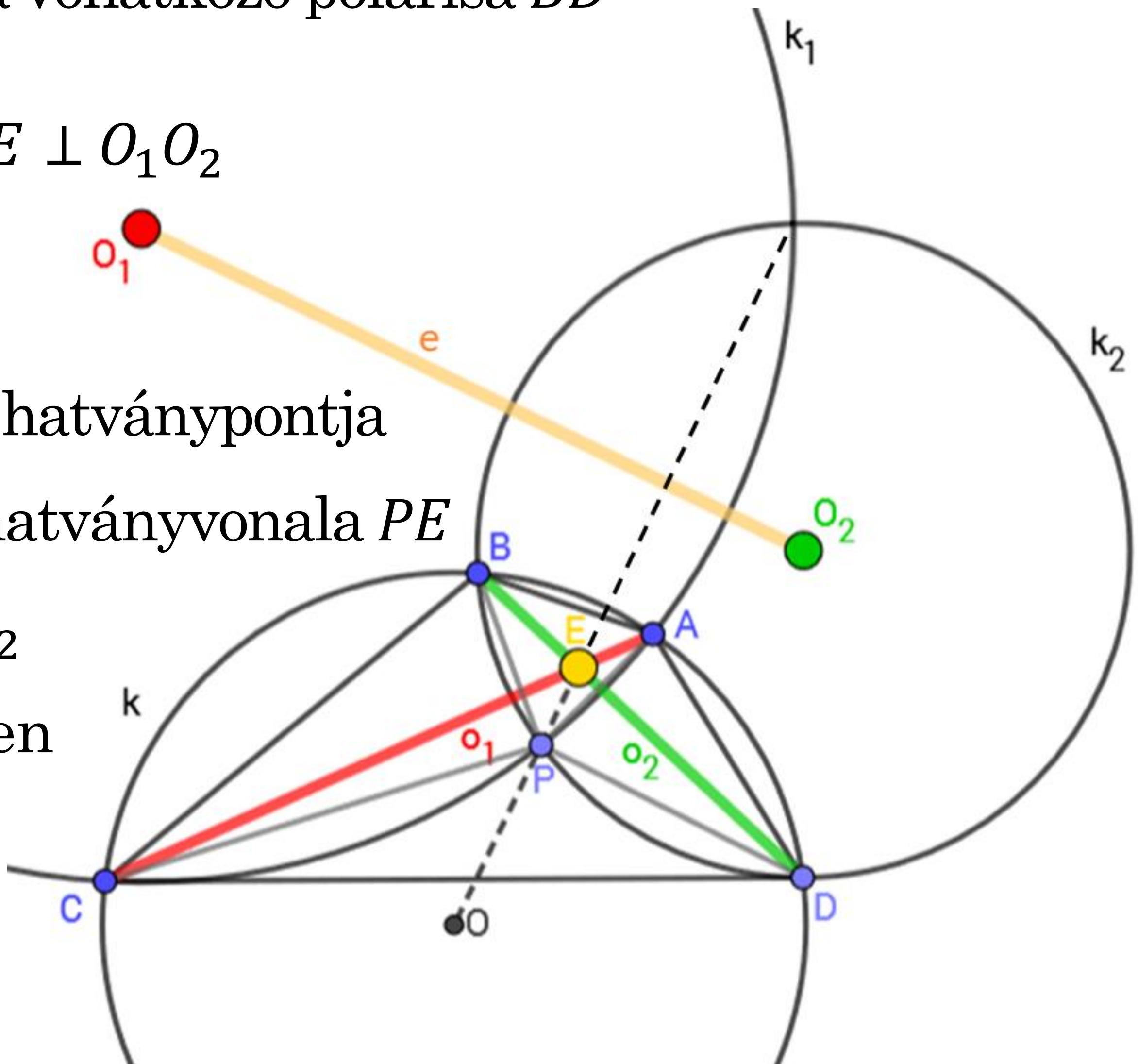
k, k_1 hatványvonala AC
k, k_2 hatványvonala BD

$AC \cap BC = E \quad k, k_1, k_2$ hatványpontja

$P \in k_1, P \in k_2 \Rightarrow k_1, k_2$ hatványvonala PE

$\Rightarrow PE \perp O_1O_2, OE \perp O_1O_2$

$\Rightarrow O, P, E$ egy egyenesen vannak

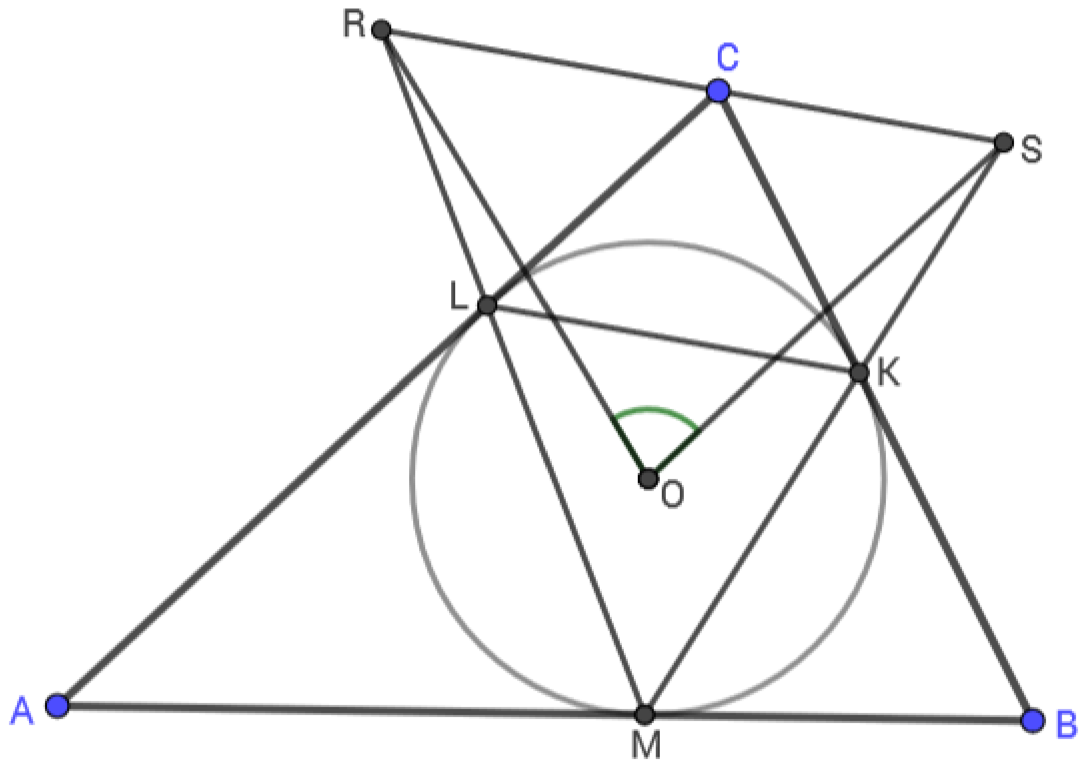


10. feladat:

Az ABC háromszög beírt körének középpontja O. Ez a kör a háromszög BC, CA, AB oldalait a K, L, M pontokban érinti. A C csúcsra illeszkedő KL-lel párhuzamos egyenes az ML és MK egyeneseket az R és S pontokban metszi.

Bizonyítsuk be, hogy $ROS\sphericalangle < 90°$.

(IMO, 1998)



10. feladat megoldása:

C-hez tartozó poláris: $c = LK \quad LK \cap OC = C'$

C'-höz tartozó poláris ($C \in c',\ RS \parallel LK$): $c' = RS$

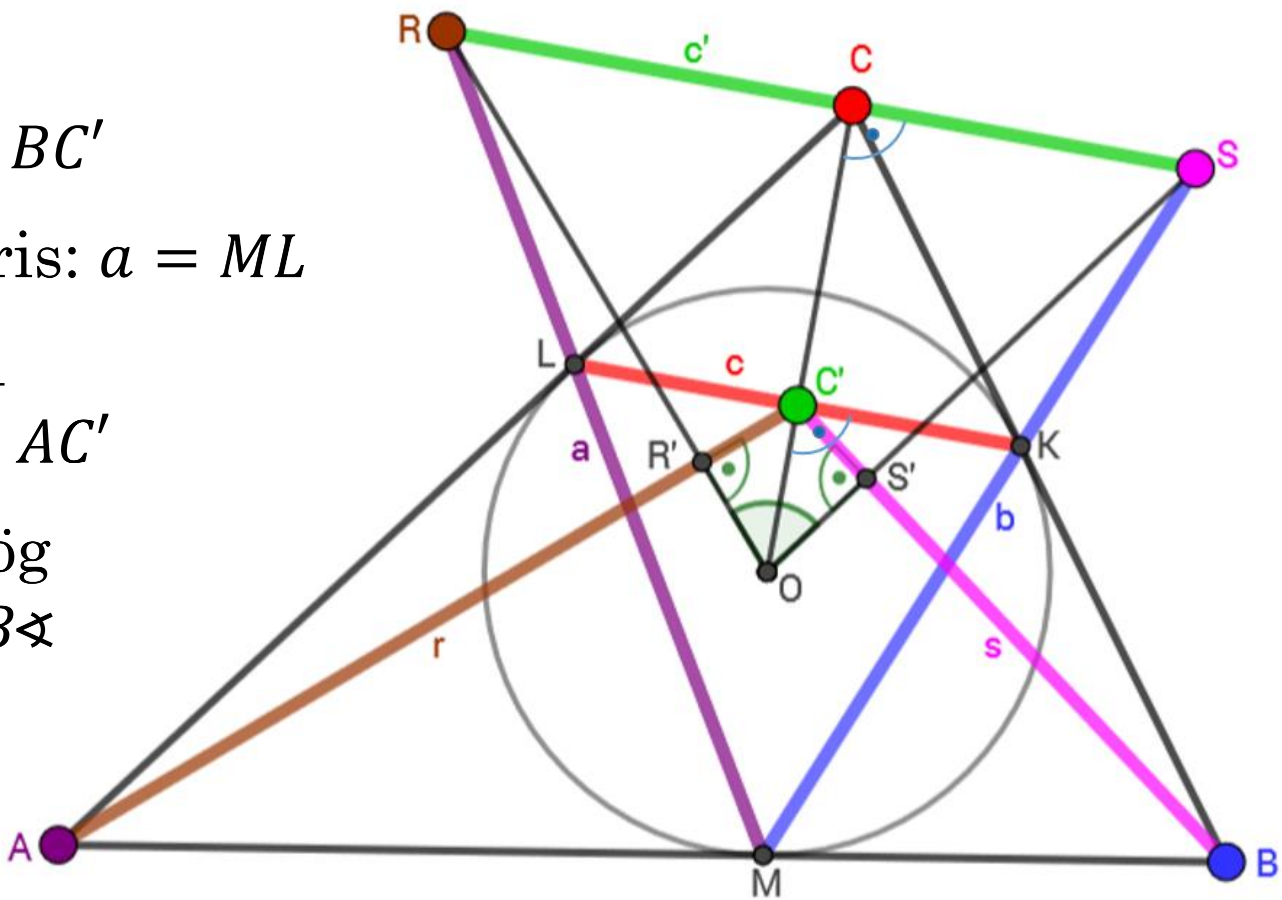
B-hez tartozó poláris: $b = MK$

$b \cap c' = S$, 2. tétel
$\Rightarrow\ s = BC' \ \Rightarrow\ OS \perp BC'$

A-hoz tartozó poláris: $a = ML$

$a \cap c' = R$, 2. tétel
$\Rightarrow\ r = AC' \ \Rightarrow\ OR \perp AC'$

$OS'C'R'$ húrnégyszög
$ROS\sphericalangle = 180° - AC'B\sphericalangle$



10. feladat megoldása: (folytatás)

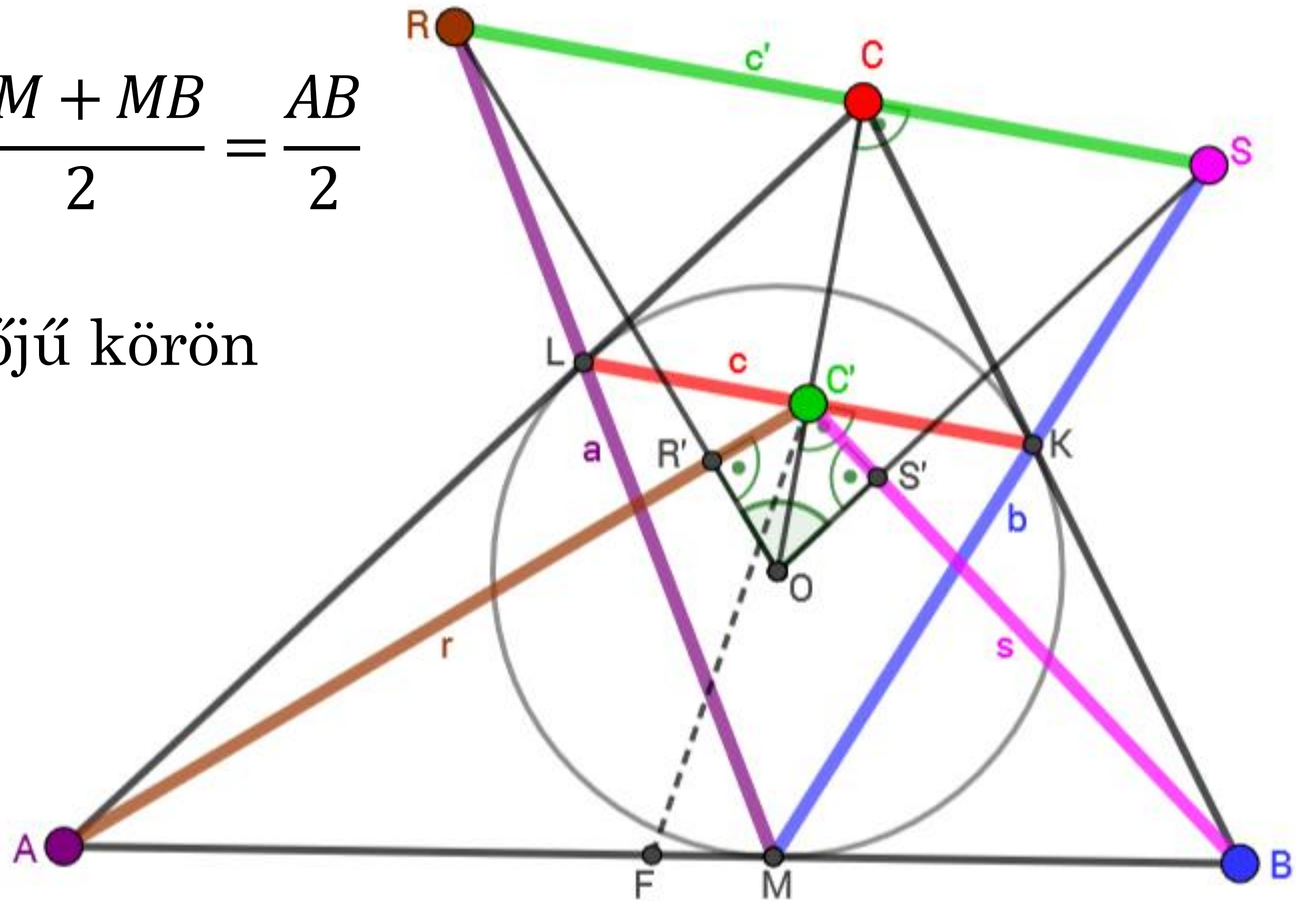
$$ROS\sphericalangle < 90° \quad \Leftrightarrow \quad AC'B\sphericalangle > 90°$$

$$2\overrightarrow{C'F} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{C'L} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{C'K} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{KB}$$

$$C'F < \frac{LA + KB}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}$$

$\Rightarrow$ C' az AB átmérőjű körön belül van

$\Rightarrow \quad AC'B\sphericalangle > 90°$



Köszönöm a figyelmet!

Fonyó Lajos
Keszthelyi Vajda János Gimnázium
fonyolajos@gmail.com