5. Trigonometria

I. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} = \sqrt{3}.$$

KöMaL 2010/október; C. 1048.

2. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra $PAB\sphericalangle = PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α, β és γ, akkor

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}.$$

KöMaL 1999/április; F. 3284.

3. Az $ABCD$ négyszögben $AB = 1, BC = 2, CD = \sqrt{3}$, $ABC\sphericalangle = 120°$, $BCD\sphericalangle = 90°$. Mekkora az AD oldal pontos értéke?

KöMaL 2002/december; C. 697.

4. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 60°$, $\beta = 20°$ és $AB = 1$. Mennyi az $\frac{1}{AC} - \mathrm{BC}$ kifejezés pontos értéke?

KöMaL 1996/szeptember; F. 3134.

5. Határozzuk meg a háromszög területét két oldal és a közbezárt szög szögfelezőjének ismeretében.

KöMaL 1985/október; Gy.2292.

6. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

KöMaL 2005/december; C.834.

7. Mekkora $\operatorname{ctg} x$ értéke, ha $\operatorname{ctg} x = \sin x$?

KöMaL 2006/március; C.849.

8. Oldjuk meg a

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2$$

egyenletet.

KöMaL 2014/január; B.4599.

9. Az $x^3 - 10x + 11 = 0$ egyenlet gyökei u, v és w.
Határozzuk meg az $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v + \operatorname{arctg} w$ értékét.

KöMaL 2002/november; B.3590.

10. Határozzuk meg a $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban az

$$f(x)=\frac{4-3\sin^6 x-3\cos^6 x}{\sin x\cos x}$$

függvény értékkészletét.

KöMaL 1992/december; F.2932.

11. Az e és f párhuzamos egyenesek közé eső P pont távolsága az e-től a, f-től b. Határozzuk meg a legkisebb területű EPF háromszög oldalait, ha a háromszög P-nél lévő szöge derékszög, E csúcsa az e egyenesre, F pedig f-re esik!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1978; haladók, általános tantervű osztályok, 2. forduló

12. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t=\frac{25}{4}r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013;haladók, II. kategória, 1.forduló

13. Egy tizenkét egység alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög szárait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a csúcshoz közelebbi harmadoló pontban metszi?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2004/2005; haladók II. kategória, 1 .forduló

14. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját.
Határozza meg az $AE\cdot AC+DB\cdot DE$ kifejezés pontos értékét!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014; kezdők I-II. kategória, 2 .forduló

15. Határozzuk meg a $18°, 36°, 54°, 72°$ szögfüggvényeinek pontos értékét!

16. Legyen az $ABCDE$ szabályos ötszög AC átlójának felezőpontja F. Hogyan aránylik egymáshoz az ABC, a CDF és a DEF háromszög területe?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1973; haladók, 1 .forduló

17. Az ABC háromszögben a C csúcsnál kétszer akkora szög van, mint az A-nál. Milyen értékeket vehet fel az $\frac{AC}{AB}$ hányados?

OKTV 1979; általános tantervű osztályok, 2. forduló

18. Milyen „a” valós érték mellett van megoldása a

$$\cos 3x\cdot\cos^3 x-\sin 3x\cdot\sin^3 x=a$$

egyenletnek?

OKTV 1975; 1. forduló

19. Közelítő értékek használata nélkül adjuk meg a

$$K = \operatorname{tg} 47° + \operatorname{tg} 43° - \operatorname{tg} 2°(\operatorname{tg} 47° - \operatorname{tg} 43°)$$

kifejezés pontos értékét!

OKTV 2000/2001; általános tantervű osztályok, 1. forduló

20. Az alábbi kifejezés egyes tagjainak nincs értelme, ha α értéke $45°$ vagy $225°$. Van-e a kifejezésnek határértéke, ha α az egyik vagy a másik szöghöz tartó olyan sorozaton fut végig, amelynek elemeire van értelme az egyes tagoknak?

$$(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) \cos \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \sin \alpha + \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2(\sin \alpha - \cos \alpha)}.$$

OKTV 1974; 1. forduló

21. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $0 \leq x \leq 2\pi$, és $0 \leq y \leq 2\pi$:

$$\cos x + \cos y = 1, \qquad (1)$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

OKTV 2006/2007; II. kategória, 2. forduló

22. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3} > 1 + 2 \cdot \operatorname{tg} x$$

OKTV 2013/2014; II. kategória, 1. forduló

23. Mennyi a $\sqrt{1 + \cos 30°} - \sqrt{1 - \sin 60°}$ különbség értéke?

$(A)\ \frac{1}{2}$ $\quad (B)\ \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad (C)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad (D)\ 1$ $\quad (E)\ \sqrt{3}$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, megyei forduló

24. Egy tompaszög tangense -2. Mennyi a szög felének a tangense?

$(A)\ \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$ $\quad (B) -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad (C)\ \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad (D)\ \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad (E)\ \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 11. osztály, megyei forduló

25. Mennyivel egyenlő a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 8 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 5 \cos x$ függvény legnagyobb és legkisebb értékének szorzata?

$(A) - 169$ $\quad (B) - 49$ $\quad (C) - 40$ $\quad (D) - 26$ $\quad (E)\ - 13$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, országos forduló

26. Azon háromszögek közül, amelyeknek a területe egyenlő és egyik szögük közös, melyikben lesz az ismert szöggel szemközti oldal a legkisebb?

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1964; országos selejtező feladata

27. Megmértük egy vízszintes terepen álló antennatorony emelkedési szögét a talpponttól $100\ m, 200\ m$ és $300\ m$ távolságból. A három szög összege 90°. Milyen magas a torony?

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1959.évi 2. feladata

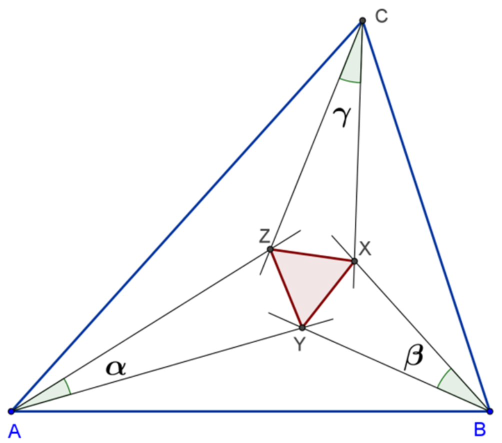
28. Bizonyítsuk be, hogy a konvex négyszögek közül csak a paralelogrammáknak van meg az a tulajdonságuk, hogy mind a négy csúcs esetében ugyanakkora összeget kapunk, ha a rajta át nem haladó oldalegyenesektől való távolságait összeadjuk.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1967.évi 3. feladata

29. Jelölje egy paralelogramma két szomszédos oldalának arányát λ (ahol $\lambda > 1$). Határozzuk meg, hogy hogyan függ λ-tól az átlók közti hegyesszög legnagyobb lehetséges értéke.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1994.évi 1. feladata

30. (**Morley tétele**) Egy tetszőleges háromszög szögeit az AY, AZ, BZ, BX, CX, CY egyenesek $3-3$ egyenlő részre osztják. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög szabályos.



D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom:
Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből

Geometria I, 180. feladat

II. Megoldások

1. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} = \sqrt{3}.$$

KöMaL 2010/október; C. 1048.

Megoldás:

$$\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} = \frac{2\cos(60° - 20°) - \cos 20°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{2\,(\cos 60° \cdot \cos 20° + \sin 60° \cdot \sin 20\,°) - \cos 20°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2} \cdot \cos 20° + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 20°\right) - \cos 20\,°}{\sin 20°} =$$

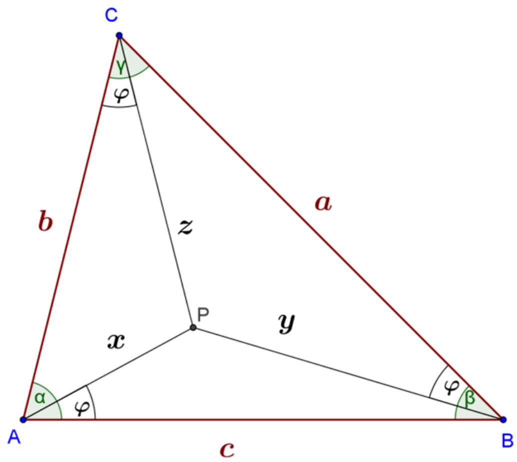
$$= \frac{\cos 20° + \sqrt{3} \cdot \sin 20° - \cos 20\,°}{\sin 20°} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 20°}{\sin 20°} = \sqrt{3}.$$

2. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra $PAB\measuredangle = PBC\measuredangle = PCA\measuredangle = \varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α, β és γ, akkor

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}.$$

KöMaL 1999/április; F. 3284.

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva kifejezzük a háromszög területét a részháromszögek területének összegeként:

$$T = \frac{xc \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{ya \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{zb \cdot \sin\varphi}{2}.$$

Átrendezés után:

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{xc}{2T} + \frac{ya}{2T} + \frac{zb}{2T}.$$

Felhasználjuk, hogy $2T = bc \cdot \sin\alpha = ac \cdot \sin\beta = ab \cdot \sin\gamma$:

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{xc}{bc \cdot \sin\alpha} + \frac{ya}{ac \cdot \sin\beta} + \frac{zb}{ab \cdot \sin\gamma} = \frac{x}{b \cdot \sin\alpha} + \frac{y}{c \cdot \sin\beta} + \frac{z}{a \cdot \sin\gamma}. \qquad (1)$$

Az APC háromszögben $PAC\measuredangle = \alpha - \varphi; ACP\measuredangle = \varphi$, tehát $APC\measuredangle = 180° - \alpha$. Hasonlóan számolva $APB\measuredangle = 180° - \beta, BPC\measuredangle = 180° - \gamma$. Az $APC; BPC; APC$ háromszögben felírva a szinusztételt azt kapjuk, hogy

$$\frac{x}{b} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} \;;\; \frac{y}{c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta} \;;\; \frac{z}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}.$$

Az (1) összefüggésben felhasználva:

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{x}{b \cdot \sin\alpha} + \frac{y}{a \cdot \sin\beta} + \frac{z}{c \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\varphi}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\beta} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\gamma},$$

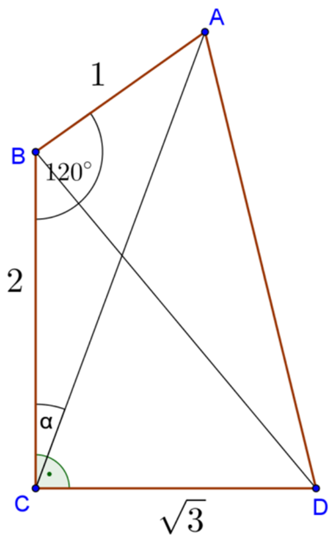
ahonnan $\sin\varphi$-vel osztva megkapjuk a feladat állítását:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

3. Az $ABCD$ négyszögben $AB = 1, BC = 2, CD = \sqrt{3}, ABC\measuredangle = 120°, BCD\measuredangle = 90°$. Mekkora az AD oldal pontos értéke?

KöMaL 2002/december; C. 697.

Megoldás:



Az ABC háromszögből koszinusztétellel kiszámítjuk az AC szakasz hosszát és az α-val jelölt szöget:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{7}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{7}\right)^2 + 2^2 - 1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{10}{4 \cdot \sqrt{7}} = \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{14}.$$

Az AD szakaszt az ADC háromszögből szintén koszinusztétellel tudjuk meghatározni.

$$AD^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(90° - \alpha) \qquad (1)$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{196}} = \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{14}$$

Ezt az (1) egyenletbe behelyettesítve:

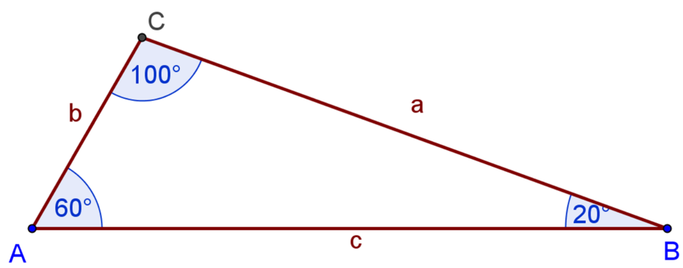
$$AD^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{14} = 7 + 3 - 3 = 7\,.$$

Tehát az AD oldal hossza $\sqrt{7}$.

4. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 60°$, $\beta = 20°$ és $AB = 1$. Mennyi az $\frac{1}{AC} - \mathrm{BC}$ kifejezés pontos értéke?

KöMaL 1996/szeptember; F. 3134.

Megoldás:



Az ABC háromszögben a szinusztétel alapján:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{AC} = \frac{\sin\ 100°}{\sin 20°} \qquad \text{és} \qquad \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1} = BC = \frac{\sin 60\,°}{\sin 100°}.$$

Trigonometrikus azonosságok alapján:

$$\sin 100° = \sin 80° = \cos 10° \qquad \sin 20° = 2\sin 10° \cos 10°$$

Így

$$\frac{1}{AC} - BC = \frac{\sin\ 100°}{\sin 20°} - \frac{\sin 60\,°}{\sin 100°} = \frac{\cos 10°}{2\sin 10° \cos 10°} - \frac{\sin 60\,°}{\cos 10°} =$$

$$= \frac{\cos 10° - 2\sin 60\,° \sin 10°}{2\,sin\,10°\,cos\,10°} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \sin 60\,° \sin 10°\right)}{sin\,20°} =$$

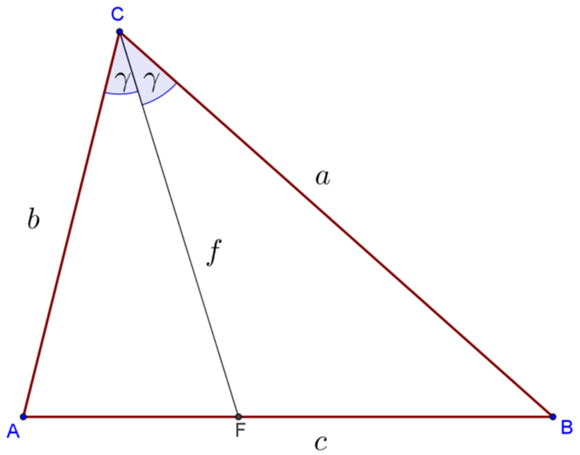
$$= \frac{2(\cos 60° \cos 10° - \sin 60\,° \sin 10°)}{\sin 20°} = \frac{2\cos(60° + 10°)}{\cos 70°} = \frac{2\cos 70°}{\cos 70°} = 2.$$

Tehát a kifejezés pontos értéke 2.

5. Határozzuk meg a háromszög területét két oldal és a közbezárt szög szögfelezőjének ismeretében.

KöMaL 1985/október; Gy. 2292.

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva a háromszög területét a, b, f segítségével kell kifejeznünk. A háromszög kétszeres területét két oldallal és a közbezárt területtel kifejezve:

$$2T_{ABC} = 2T_{ACF} + 2T_{FCB}$$

$$a \cdot b \cdot \sin 2\gamma = b \cdot f \cdot \sin\gamma + a \cdot f \cdot \sin\gamma$$

Felhasználjuk a kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosságot:

$$a \cdot b \cdot 2 \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma = b \cdot f \cdot \sin\gamma + a \cdot f \cdot \sin\gamma = (a + b) \cdot f \cdot \sin\gamma$$

$\sin\gamma \neq 0$, ezért oszthatunk vele:

$$2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma = (a + b) \cdot f \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{(a + b) \cdot f}{2ab}$$

$sin\,\gamma > 0$ a feladatbeli jelentése miatt, ezért

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{(a + b)^2 \cdot f^2}{4a^2b^2}},$$

így a háromszög területe

$$T_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot sin\,2\gamma}{2} = a \cdot b \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma = a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{(a + b)^2 \cdot f^2}{4a^2b^2}} \cdot \frac{(a + b) \cdot f}{2ab}$$

$$T_{ABC} = \frac{(a + b) \cdot f}{4ab} \cdot \sqrt{4a^2b^2 - (a + b)^2 \cdot f^2}.$$

Ez a képlet a kívánt adatokkal fejezi mi a háromszög területét.

6. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

KöMaL 2005/december; C.834.

Megoldás:

Először az egyenlet értelmezési tartományát vizsgáljuk meg:

$$\sin x \neq 0, \sin 2x \neq 0, \sin 4x \neq 0, \text{ezért } x \neq k \cdot \tfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Az ismert azonosságok felhasználásával:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 4 \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

A $sin\, 4x$ megfelel közös nevezőnek, ezzel szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$4 \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2.$$

Ha a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezzük, akkor csak egy szögfüggvényt tartalmaz az egyenletünk:

$$4 \cdot \cos x \cdot (2\cos^2 x - 1) - 2(2\cos^2 x - 1) = 2.$$

Zárójelfelbontás és rendezés után:

$$2\cos^3 x - \cos^2 x - \cos x = 0.$$

Az értelmezési tartomány miatt $\cos x \neq 0$, ezért oszthatunk vele:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a $\cos x = 1$ és a $\cos x = -\frac{1}{2}$ a megoldása. Az első lehetőség az értelmezési tartomány miatt nem lehet, ezért:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z}.$$

7. Mekkora $\operatorname{ctg} x$ értéke, ha $\operatorname{ctg} x = \sin x$?

KöMaL 2006/március; C.849.

Megoldás:

A $\operatorname{ctg} x$ függvény értelmezése miatt $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ összefüggés alapján a feladat feltétele így írható:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \cos x \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos^2 x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Innen:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ha $\cos x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, akkor -1-nél kisebb értéket kapunk, ami nem lehetséges.

Ha $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, akkor

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{4 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Így

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \pm\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sin x\,.$$

Ekkor az értelmezési tartomány feltétele is teljesül.

8. Oldjuk meg a

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2$$

egyenletet.

KöMaL 2014/január; B.4599.

Megoldás:

Láthatóan a $\sin x = 1$ és $\cos x = 0$ megoldása az egyenletnek. A szinusz- és a koszinusz-függvény is korlátos. Próbáljunk meg olyan becslést adni, ami elvezet a megoldáshoz. Az alábbiakban felhasználjuk, hogy $\sin x \leq 1$, $\cos x \leq 1, \sin^2 x \geq 0$, $\cos^2 x \geq 0$ és $\sin^2 x$+$\cos^2 x = 1$:

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = \sin^3 x \cdot \sin^2 x + \cos^3 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x \leq$$

$$\leq 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + 1 = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 = 2.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\sin x = 1$, tehát az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z}.$$

9. Az $x^3 - 10x + 11 = 0$ egyenlet gyökei u, v és w.
Határozzuk meg az $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v + \operatorname{arctg} w$ értékét.

KöMaL 2002/november; B.3590.

Megoldás:

Használjuk az $\alpha = \operatorname{arctg} u$; $\beta = \operatorname{arctg} v$; $\gamma = \operatorname{arctg} w$ jelöléseket. $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Az addíciós tételek felhasználásával:

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta+\gamma)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma)} = \frac{u + v + w - uvw}{1 - (uv + uw + vw)}. \qquad (1)$$

Ha a harmadfokú egyenlet három gyöke u, v és w, akkor az egyenlet ilyen alakban írható fel (gyökök és együtthatók közötti összefüggés):

$$x^3 - (u + v + w)x^2 + (\mathrm{uv} + \mathrm{uw} + \mathrm{vw})x - \mathrm{uvw} = 0$$

Az eredeti egyenlet alapján:

$$u + v + w = 0, \ \ (\mathrm{uv} + \mathrm{uw} + \mathrm{vw}) = -10, \quad uvw = -11.$$

Ezt az (1) összefüggésben felhasználva:

$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta + \gamma) = \tfrac{11}{1+10} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = \tfrac{\pi}{4} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

A gyökök összege 0, a szorzata negatív, ezért egy negatív és két pozitív van köztük. Így α, β, γ közül egy a $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, kettő a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumba esik, ezért a (2) összefüggésben $k = 0$, azaz

$$\mathrm{arctg}\, u + \mathrm{arctg}\, v + \mathrm{arctg}\, w = \frac{\pi}{4}.$$

10. Határozzuk meg a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban az

$$f(x) = \frac{4 - 3\sin^6 x - 3\cos^6 x}{\sin x \cos x}$$

függvény értékkészletét.

KöMaL 1992/december; F.2932.

Megoldás:

Az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, az $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságok alapján:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

Ezek alapján az f függvényt így írhatjuk fel:

$$f(x) = \frac{4 - 3(1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x)}{\sin x \cos x} = \frac{1 + 9(\sin x \cos x)^2}{\sin x \cos x}.$$

A $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ összefüggést felhasználva:

$$f(x) = \frac{1 + 9(\sin x \cos x)^2}{\sin x \cos x} = \frac{4 + 9sin^2 2x}{2 \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x} + \frac{9}{2}\sin 2x.$$

Vezessük be a $\sin 2x$ jelölésére az y-t. A $2x$ a $(0; \pi)$ intervallum tetszőleges pontja lehet, ezért $\sin 2x$ a $(0; 1]$intervallum minden értékét felveszi. A feladat szempontjából így elég a

$$g(y) = \frac{2}{y} + \frac{9}{2}y$$

függvény értékkészletét vizsgálni a $(0; 1]$intervallumon.

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$g(y) = \frac{\frac{4}{y} + 9y}{2} \geq \sqrt{\frac{4}{y} \cdot 9y} = \sqrt{36} = 6.$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha $\frac{4}{y} = 9y$, azaz $y = \frac{2}{3}$.

Megvizsgáljuk, hogy minden 6-nál nagyobb valós szám hozzátartozik-e az értékkészlethez. Legyen $c > 6$ és

$$\frac{2}{y} + \frac{9}{2}y = c$$

Ekkor átalakítva

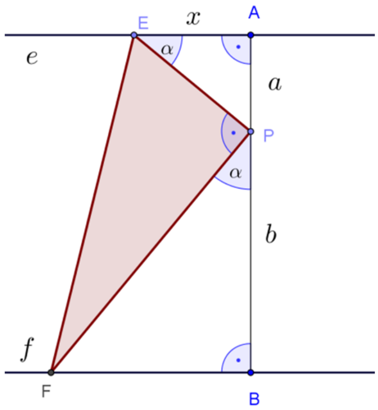
$$9y^2 - 2cy + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa $4c^2 - 144$, ami $c > 6$ esetén pozitív, tehát két megoldás van. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján a gyökök szorzata $\frac{4}{9}$, tehát a két gyök azonos előjelű és az egyik abszolút értéke legfeljebb $\frac{2}{3}$. A két gyök összege pedig $\frac{2c}{9}$, ami pozitív, tehát mindkét gyök pozitív, a kisebbik legfeljebb $\frac{2}{3}$. Így a g függvény a c értéket felveszi a $\left(0;\frac{2}{3}\right]$ intervallumban. Tehát az f függvény értékkészlete a $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban a $[6;\infty)$ intervallum.

11. Az e és f párhuzamos egyenesek közé eső P pont távolsága az e-től a, ftől b. Határozzuk meg a legkisebb területű EPF háromszög oldalait, ha a háromszög P-nél lévő szöge derékszög, E csúcsa az e egyenesre, F pedig f-re esik!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1978; haladók, általános tantervű osztályok, 2. forduló

I. Megoldás:



Az $AEP\measuredangle$ és a $BPF\measuredangle$ merőleges szárú szögek, ezért egyenlők. Ezt a szöget α-val jelöljük. Az ábra jelöléseivel $PE = \frac{a}{\sin\alpha}$, $PF = \frac{b}{\cos\alpha}$. A háromszög területe $T = \frac{ab}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{ab}{\sin 2\alpha}$.

Ez a kifejezés akkor a legkisebb, ha a nevező a legnagyobb, tehát $\sin 2\alpha = 1$. α hegyesszög, ezért $2\alpha = 90°, \alpha = 45°$. Így $PE = a\sqrt{2}; PF = b\sqrt{2}$, a Pitagorasz-tétel alapján $EF = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$.

II. Megoldás:

10. évfolyamon még a $\sin 2\alpha$-ra vonatkozó összefüggést a tanulók nem ismerik. Adunk egy olyan megoldást is, amelyben ennek ismeretére nincs szükség.

$AEP\Delta \sim BPF\Delta$, mert derékszögűek és az α-val jelölt szögek merőleges szárúak, így egyenlőek. Hasonló háromszögekben a megfelelő szakaszok aránya egyenlő, ezért

$$\frac{FB}{a} = \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad FB = \frac{ab}{x}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$PE = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad PF = \sqrt{b^2 + \left(\frac{ab}{x}\right)^2} = \frac{b}{x}\sqrt{a^2 + x^2}.$$

A PEF háromszög területe:

$$T = \frac{PE \cdot PF}{2} = \frac{b(a^2 + x^2)}{2x} = b\frac{\frac{a^2}{x} + x}{2}.$$

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$b\frac{\frac{a^2}{x} + x}{2} \geq b\sqrt{\frac{a^2}{x} \cdot x} = ba.$$

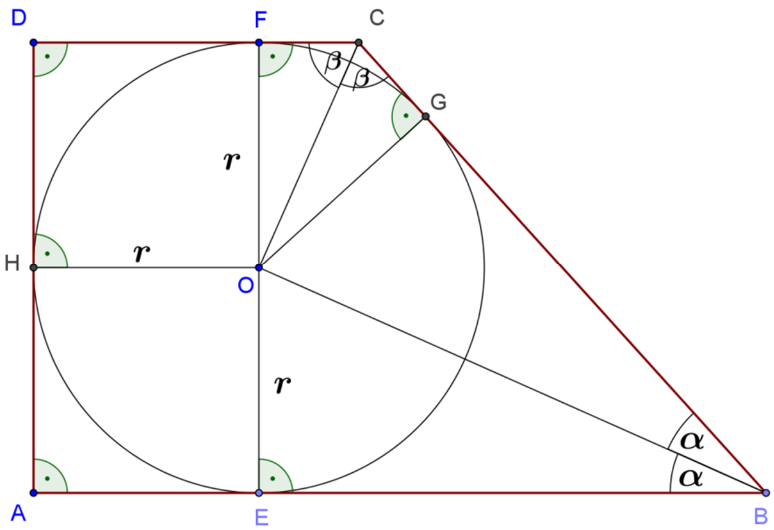
Egyenlőség akkor teljesül, ha $\frac{a^2}{x} = x$, tehát $a = x$, azaz $\alpha = 45°$. Így a PEF háromszög területének minimuma ab. Ezt a minimumot akkor kapjuk meg, ha $PE = a\sqrt{2}; PF = b\sqrt{2}$, Pitagorasz-tétel alapján $EF = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

Láthatóan nagy segítség a feladat megoldásában, ha ismerjük a szögfüggvényeket (I.megoldás).

12. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t = \frac{25}{4}r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013;haladók, II. kategória, 1.forduló

Megoldás:



A beírható kör középpontja a trapéz szögfelezőire illeszkedik. Az ábra jelöléseit használva:

$$BE = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha; \qquad FC = r \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

Az érintési pontokba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért $AEOH$ és $HOFD$ négyszög négyzet, tehát $AE = AH = HD = DF = r$. A trapéz területe:

$$t = \frac{2r \cdot (r + r \cdot \operatorname{ctg} \alpha + r + \operatorname{ctg} \beta)}{2} = \frac{25}{4}r^2.$$

Átrendezve, r^2-tel osztva:

$$2 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{25}{4}. \qquad (1)$$

A trapéz egy száron fekvő szögeinek összege $180°$, ezért $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$. Ebből következik, hogy $\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

Az (1) egyenletet így írhatjuk:

$$2 + \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{25}{4}$$

$$4\operatorname{ctg}^2 \alpha - 17\operatorname{ctg} \alpha + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 4 \quad \text{vagy} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{4}.$$

Az ezekhez tartozó β értékekre:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{4} \quad \text{vagy} \quad \operatorname{ctg} \beta = 4.$$

Láthatóan a két megoldás ugyanazt a trapézt határozza meg. Az első eredménypárt használva (AB a hosszabb alap):

$$AB = r + 4r = 5r\,; \qquad CD = r + \frac{1}{4}r = \frac{5r}{4},$$

Tehát a két alap aránya:

$$\frac{AB}{CD} = 4.$$

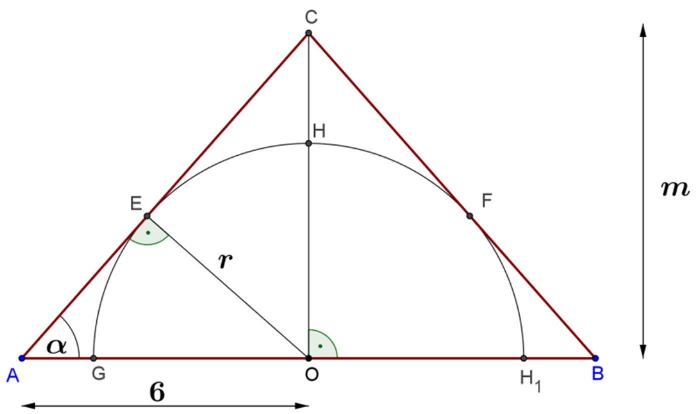
Ha az AB a rövidebb alap, akkor

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{4}.$$

13. Egy tizenkét egység alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög szárait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a csúcshoz közelebbi harmadoló pontban metszi?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2004/2005; haladók II. kategória, 1 .forduló

Megoldás:



Az AOE derékszögű háromszögből $r = 6 \cdot \sin\alpha$, az AOC derékszögű háromszögből $m = 6 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

A feladat szerint $OH = r = \frac{2}{3}m = \frac{4 \cdot \mathrm{tg}\alpha}{3}$. Így azt az α szöget keressük, amelyre

$$6 \cdot \sin\alpha = \frac{4 \cdot \mathrm{tg}\alpha}{3}$$

$$6 \cdot \sin\alpha = \frac{4 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{3}.$$

Az α szög hegyesszög, ezért $\sin\alpha \neq 0$, tehát oszthatunk vele, majd $\cos\alpha$-t kifejezzük:

$$\cos\alpha = \frac{2}{9}.$$

A $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ összefüggés alapján, felhasználva, hogy α hegyesszög:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

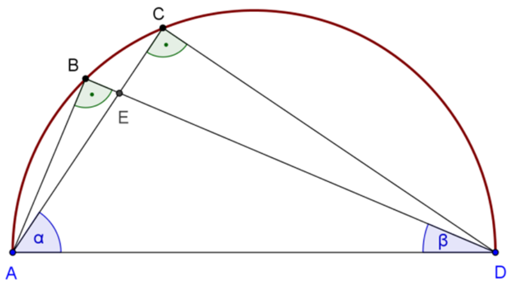
A félkör sugarát ennek segítségével ki tudjuk számolni:

$$r = 6 \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{5}.$$

14. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját.
Határozza meg az $AE \cdot AC + DB \cdot DE$ kifejezés pontos értékét!

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2013/2014; kezdők I-II. kategória, 2 .forduló

I. Megoldás:



A Thalesz-tétel miatt $ABD\measuredangle$ és $ACD\measuredangle$ derékszög. Szögfüggvények alkalmazásával:

$$AC = AD \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \;; \qquad DB = AD \cdot \cos\beta = \cos\beta.$$

Az $AED\measuredangle = 180° - \alpha - \beta$. Az AED háromszögre alkalmazva szinusztételt:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$\frac{DE}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \Rightarrow \quad DE = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Ezek alapján:

$$AE \cdot AC + DB \cdot DE = \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 1$$

II. Megoldás:

A kezdők kategóriájában még nem tananyag a szögfüggvények témája, ezért ebben a megoldásban szögfüggvények nélkül számolunk. A Thalesz-tétel miatt az ABD háromszög derékszögű, ezért felírhatjuk rá a Pitagorasz-tételt:

$$AD^2 = AB^2 + (BE+DE)^2 = AB^2 + BE^2 + DE^2 + 2 \cdot BE \cdot DE.$$

Az AEB háromszög derékszögű, ezért $AB^2 + BE^2 = AE^2$, és $BE = DB - DE$, így:

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 + 2 \cdot (DB - DE) \cdot DE = AE^2 - DE^2 + 2 \cdot DB \cdot DE$$

Az ACD és ECD háromszögekből hasonlóan:

$$AD^2 = DE^2 - AE^2 + 2 \cdot AE \cdot AC.$$

A két egyenletet összeadva és 2-vel osztva:

$$AD^2 = AE \cdot AC + DB \cdot DE\ .$$

Ebből következik, hogy

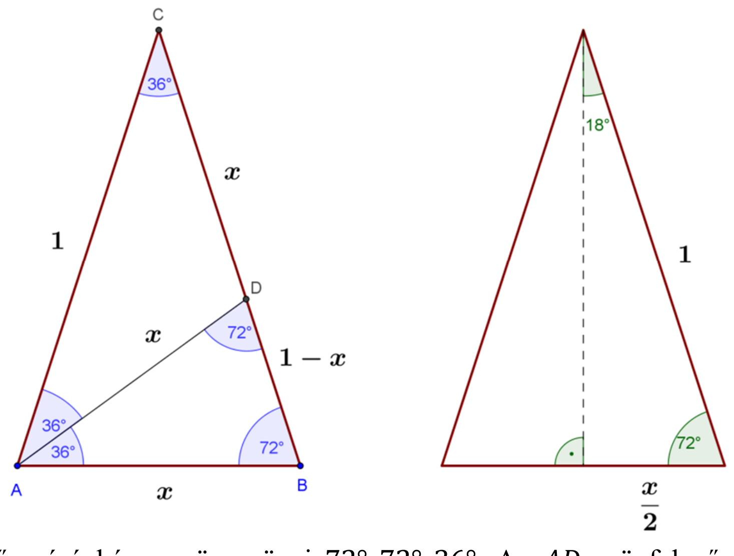
$$AE \cdot AC + DB \cdot DE = 1.$$

Megjegyzés:

A szögfüggvények alkalmazásával ebben az esetben is egyszerűbb a megoldás.

15. Határozzuk meg a $18°, 36°, 54°, 72°$ szögfüggvényeinek pontos értékét!

Megoldás:



Az ABC egyenlő szárú háromszög szögei $72°, 72°, 36°$. Az AD szögfelezővel két egyenlőszárú háromszögre bontjuk: $ADB\Delta$ és $ADC\Delta$. A nagy háromszög szára egységnyi, alapja x, az ADC háromszög szárai x, alapja 1, az ABD háromszög alapja $1 - x$, szára x. A szögek egyenlősége miatt $ABC\Delta \sim ABD\Delta$. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

x egy szakasz hosszát jelöli, ezért pozitív, tehát

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$\cos 72° = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Az ABC háromszögből koszinusztétel alapján:

$$\cos 36° = \frac{1+1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} = \frac{2-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

A $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ összefüggés alapján:

$$\sin 72° = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin 36° = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

A $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ összefüggések alapján:

$$\operatorname{tg} 72° = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{80+32\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{ctg} 72° = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg} 36° = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{80-32\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.$$

$$\operatorname{ctg} 36° = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

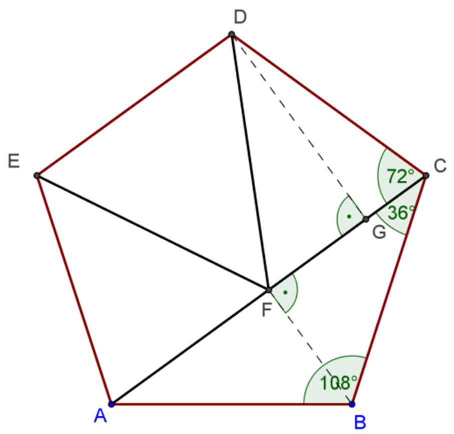
A pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggések alapján:

$\sin 18° = \cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sin 54° = \cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\cos 18° = \sin 72° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\cos 54° = \sin 36° = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\operatorname{tg} 18° = \operatorname{ctg} 72° = \dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$	$\operatorname{tg} 54° = \operatorname{ctg} 36° = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
$\operatorname{ctg} 18° = \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\operatorname{ctg} 54° = \operatorname{tg} 36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

16. Legyen az $ABCDE$ szabályos ötszög átlójának felezőpontja F. Hogyan aránylik egymáshoz az ABC, a CDF és a DEF háromszög területe?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1973; haladók, 1 .forduló

Megoldás:



Válasszuk a szabályos ötszög oldalát egységnek. A szabályos ötszög minden szöge 108°. Az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők, $(180° - 108°): 2 = 36°$. $FCD\measuredangle = 108° - 36° = 72°$. Szimmetria miatt $ED \parallel AC$, a két párhuzamos távolsága a DG szakasz. Ezekkel az adatokkal:

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 108°}{2} = \frac{\sin 72°}{2} \quad , \qquad CF = BC \cdot \cos 36° = \cos 36°,$$

$$T_{CDF} = \frac{CF \cdot CD \cdot \sin 72°}{2} = \frac{\cos 36° \cdot 1 \cdot \sin 72°}{2} = \frac{\cos 36° \cdot \sin 72°}{2},$$

$$CG = DC \cdot \sin 72° = \sin 72° \,,$$

$$T_{DEF} = \frac{ED \cdot CG}{2} = \frac{1 \cdot \sin 72°}{2} = \frac{\sin 72°}{2}.$$

Ezért a háromszögek területek aránya: $1 : \cos 36° : 1$.

A 15. feladatban kiszámoltuk $\cos 36°$ értékét, így

$$T_{ABC} : T_{CDF} : T_{DEF} = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{4} : 1.$$

17. Az ABC háromszögben a C csúcsnál kétszer akkora szög van, mint az A-nál. Milyen értékeket vehet fel az $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ hányados?

OKTV 1979; általános tantervű osztályok, 2. forduló

Megoldás:

Legyen az A csúcsnál lévő szög α, a C csúcsnál lévő szög 2α, ekkor a B csúcsnál lévő szög $180° - 3\alpha$. Így az α szögre teljesül a $0 < \alpha < 60°$ feltétel. A szinusztétel alapján:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{sin(180° - 3\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot (2\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{4\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$= 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Bevezetjük az $a = 2\cos\alpha$ jelölést, így az $a - \frac{1}{a}$ kifejezést vizsgáljuk. A $0 < \alpha < 60°$ feltétel miatt $2\cos 60° < a < 2\cos 0°$, így $1 < a < 2$ és $-1 < -\frac{1}{a} < -\frac{1}{2}$. Ekkor $0 < a - \frac{1}{a} < \frac{3}{2}$.

Még megvizsgáljuk, hogy a 0 és $3/2$ közötti számok mindegyikét megkaphatjuk-e. A $2\cos x$ függvény folytonos, ezért a $[0°; 60°]$intervallumban minden értéket felvesz az $[1; 2]$ intervallumból. Az $x - \frac{1}{x}$ függvény is folytonos az $[1; 2]$ intervallumon, ezért minden értéket felvesz a 0 és $3/2$ között. Tehát $0 < \frac{AC}{AB} < \frac{3}{2}$ és a hányados minden közbülső értéket felvesz.

18. Milyen „a" valós érték mellett van megoldása a

$$\cos 3x \cdot cos^3 x - \sin 3x \cdot sin^3 x = a$$

egyenletnek?

OKTV 1975; 1. forduló

I. Megoldás:

Az addíciós tételek alapján

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x =$$

$$= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\sin 3x = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x =$$

$$= 3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x\,.$$

Ezeket az összefüggéseket behelyettesítjük a megoldandó egyenletbe:

$$\cos^6 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x - 3\sin^4 x \cdot \cos^2 x + \sin^6 x = a \qquad (1)$$

A 10. feladat megoldásában levezettük, hogy

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x\,.$$

Az (1) egyenletet tovább alakítva:

$$1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x - 3\sin^4 x \cdot \cos^2 x = a$$

$$1-3(1+\cos^2 x+\sin^2 x)=a$$

$$1-6\sin^2 x\cdot\cos^2 x=a$$

$$1-a=6\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{3}{2}\cdot 4\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{3}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin^2 2x=\frac{2-2a}{3}.$$

A szinuszfüggvény értékkészlete alapján ennek az egyenletnek akkor van megoldása, ha

$$0\le\frac{2-2a}{3}\le 1\qquad\Rightarrow\qquad -\frac{1}{2}\le a\le 1.$$

Ekkor valóban van megoldás, mert az átalakításaink megfordíthatóak voltak.

II. Megoldás:

Az első megoldásban szereplő képleteket tovább alakítva:

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cdot\cos x=\cos^3 x-3(1-\cos^2 x)\cdot\cos x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

$$\sin 3x=3\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x=3(1-\sin^2 x)\cdot\sin x-\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x$$

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

A megoldandó egyenletbe ezt felhasználva:

$$cos\ 3x\cdot\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}-\sin 3x\cdot\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}=a$$

$$cos^2\ 3x+3cos\ 3x\cdot\cos x-3\sin 3x\cdot\sin x+\sin^2 3x=4a$$

$$1+3(cos\ 3x\cdot\cos x-\sin 3x\cdot\sin x)=4a$$

$$\cos 4x=\frac{4a-1}{3}$$

A koszinuszfüggvény értékkészlete miatt ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha

$$-1\le\frac{4a-1}{3}\le +1\qquad\Rightarrow\qquad -\frac{1}{2}\le a\le 1\,.$$

19. Közelítő értékek használata nélkül adjuk meg a

$$K=\text{tg}\,47°+\text{tg}\,43°-\text{tg}\,2°(\text{tg}\,47°-\text{tg}\,43°)$$

kifejezés pontos értékét!

OKTV 2000/2001; általános tantervű osztályok, 1. forduló

Megoldás:

$47°=45°+2°$; $43°=45°-2°$ és felhasználjukaz alábbi összefüggést:

$$\text{tg}(x\pm y)=\frac{\text{tg}x\pm\text{tg}y}{1\mp tgx\cdot tgy},$$

$$K=\frac{\text{tg}45°+\text{tg}2°}{1-\text{tg}45\cdot\text{tg}2°}+\frac{\text{tg}45°-\text{tg}2°}{1+\text{tg}45\cdot\text{tg}2°}-\text{tg}\,2°\left(\frac{\text{tg}45°+\text{tg}2°}{1-\text{tg}45\cdot\text{tg}2°}-\frac{\text{tg}45°-\text{tg}2°}{1+\text{tg}45\cdot\text{tg}2°}\right).$$

Használjuk az $a=tg2°$ jelölést:

$$K=\frac{1+a}{1-a}+\frac{1-a}{1+a}-a\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right)=\frac{(1+a)^2+(1-a)^2}{1-a^2}-a\frac{(1+a)^2-(1-a)^2}{1-a^2}=$$

$$=\frac{2+2a^2-4a^2}{1-a^2}=\frac{2-2a^2}{1-a^2}=2.$$

20. Az alábbi kifejezés egyes tagjainak nincs értelme, ha α értéke $45°$ vagy $225°$. Van-e a kifejezésnek határértéke, ha α az egyik vagy a másik szöghöz tartó olyan sorozaton fut végig, amelynek elemeire van értelme az egyes tagoknak?

$$(1+\text{tg}\,2\alpha)\cos\alpha+\text{tg}\,2\alpha\,\sin\alpha+\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}.$$

OKTV 1974; 1. forduló

Megoldás:

A kifejezést átalakítjuk:

$$\cos\alpha+\text{tg}2\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha)+\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}=$$

$$=\cos\alpha+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha)+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}=$$

$$=\cos\alpha+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{2\cos^2 x+2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}=$$

$$=\cos\alpha+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\cos\alpha+\frac{-\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\cos\alpha-\cos\alpha=0.$$

Tehát a kifejezés minden olyan esetben 0, amikor értelmezve van. Ekkor a határérték is 0, ha α a $45°$-hoz vagy a $225°$-hoz tart.

21. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $0\le x\le 2\pi$, és $0\le y\le 2\pi$:

$$\cos x+\cos y=1, \qquad (1)$$

$$\sin x\cdot\sin y=-\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

OKTV 2006/2007; II. kategória, 2. forduló

Megoldás:

Vezessük be az $u=\cos x$ és $v=\cos y$ jelölést. A (2) egyenletet négyzetre emeljük, felhasználjuk, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ezután az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$u+v=1 \qquad (3)$$

$$(1-u^2)(1-v^2)=\frac{9}{16}. \tag{4}$$

A (3) egyenletből:

$$u^2+v^2=1-2uv.$$

Ezt a (4) egyenletben felhasználva:

$$1-u^2-v^2+u^2v^2=u^2v^2+2uv=\frac{9}{16}$$

$$16u^2v^2+32uv-9=0.$$

Az uv –ben másodfokú egyenletet megoldva:

$$uv=\frac{1}{4} \text{ vagy } -\frac{9}{4}.$$

A koszinuszfüggvény 1-nél nagyobb értéket nem vesz fel, ezért az (1) egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $\cos x$ és $\cos y$ értéke sem negatív, így szorzatuk nem lehet $-\frac{9}{4}$.

Most az

$$u+v=1$$

$$uv=\frac{1}{4}$$

egyenletrendszert oldjuk meg:

$$u(1-u)=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad u^2-u+\frac{1}{4}=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Tehát:

$$u=v=\frac{1}{2}.$$

Ha $\cos x=\cos y=\frac{1}{2}$, akkor $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, a (2) egyenlet alapján $\sin y=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ez alapján a lehetséges értékek:

$$x_1=\frac{\pi}{3} \quad és \quad y_1=\frac{5\pi}{3};$$

$$x_2=\frac{5\pi}{3} \quad és \quad y_2=\frac{\pi}{3}.$$

22. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\mathrm{tg}^2 x-3}>1+2\cdot \mathrm{tg}\, x$$

OKTV 2013/2014; II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

A tangens-függvény értelmezése miatt $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. A négyzetgyök miatt $\mathrm{tg}^2 x\geq 3$, tehát $\mathrm{tg} x\geq\sqrt{3}$ vagy $\mathrm{tg} x\leq-\sqrt{3}$.

Az első esetben az eredeti egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk:

$$\mathrm{tg}^2x - 3 > 1 + 4 \cdot \mathrm{tg}x + 4 \cdot \mathrm{tg}^2x$$

$$0 > 3 \cdot \mathrm{tg}^2x + 4 \cdot \mathrm{tg}x + 4.$$

Az adott feltételek mellett az egyenlőtlenség jobb oldala pozitív, így ez sohasem teljesül.

Az második esetben a négyzetgyök értékkészlete miatt az egyenlőtlenség bal oldala nemnegatív, a jobb oldal viszont legfeljebb $1 - 2 \cdot \sqrt{3}$, ezért ekkor megoldást kapunk:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ezzel megadtuk az egyenlőtlenség összes megoldását.

23. Mennyi a $\sqrt{1 + \cos 30°} - \sqrt{1 - \sin 60°}$ különbség értéke?

$(A)\ \frac{1}{2}$ $\quad(B)\ \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad(C)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad(D)\ 1$ $\quad(E)\ \sqrt{3}$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, megyei forduló

I. Megoldás:

$$\sqrt{1 + \cos 30°} - \sqrt{1 - \sin 60°} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2}{4}} - \sqrt{\frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}{4}} = \frac{\left|1 + \sqrt{3}\right|}{2} - \frac{\left|1 - \sqrt{3}\right|}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 1.$$

A helyes válasz a ***D***.

II. Megoldás:

A következő összefüggéseket használjuk fel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)\,; \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$a^2 + b^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2\ ; \qquad \sqrt{a^2} = |a|.$$

$$\sqrt{1 + \cos 30°} - \sqrt{1 - \sin 60°} = \sqrt{1 + \sin 60°} - \sqrt{1 - \sin 60°} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 30° + \cos^2 30° + 2 \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°} - \sqrt{\sin^2 30° + \cos^2 30° - 2 \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°} =$$

$$= \sqrt{(\sin 30° + \cos 30°)^2} - \sqrt{(\sin 30° - \cos 30°)^2} = |\sin 30° + \cos 30°| - |\sin 30° - \cos 30°| =$$

$$= \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

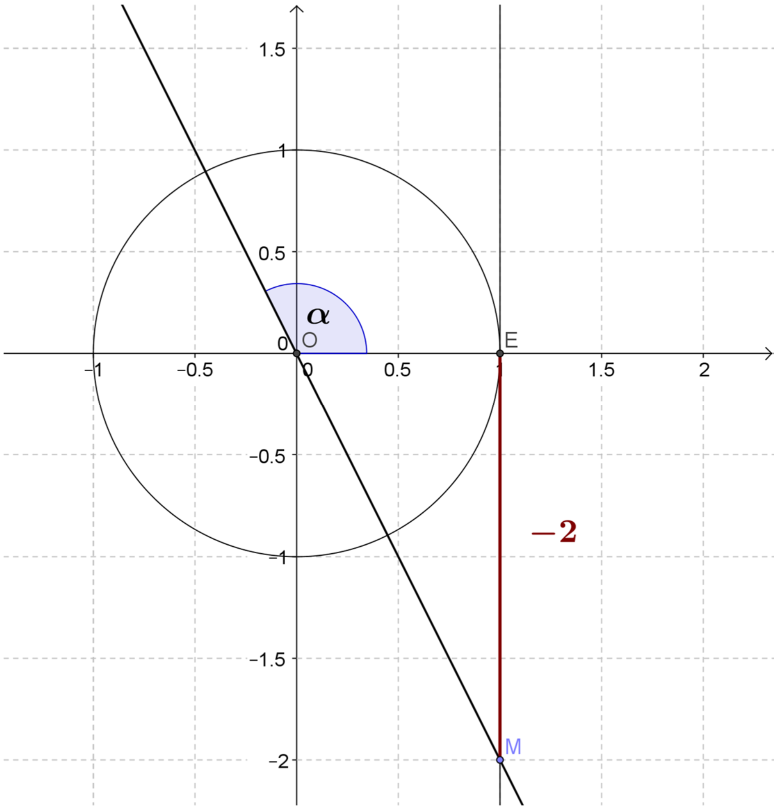
A helyes válasz a ***D***.

24. Egy tompaszög tangense -2. Mennyi a szög felének a tangense?

$(A)\ \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$ $\quad(B) -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad(C)\ \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad(D)\ \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad(E)\ \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2010; 11. osztály, megyei forduló

Megoldás:



A tangens függvény szemléletes jelentése látható az ábrán: az egységkörből az $(1;0)$ pontban húzott érintőből a szög szára negatív irányban 2 egységet vág ki. Az OM szakasz hossza a Pitagorasz-tétel alapján $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, tehát $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ha α tompaszög, akkor a fele hegyesszög, tehát a tangense pozitív. A

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)^2}}=\sqrt{\frac{4}{(\sqrt{5}-1)^2}}=\left|\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

A helyes válasz az ***E***.

25. Mennyivel egyenlő a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-5\cos x$ függvény legnagyobb és legkisebb értékének szorzata?

$(A)-169$ $(B)-49$ $(C)-40$ $(D)-26$ $(E)\ -13$

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2008; 12. osztály, országos forduló

Megoldás:

$$f(x)=8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-5\cos x=8\cdot\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+8\cdot\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}-5\cos x=$$

$$= 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x + 8 \cdot \frac{1}{2} \cos x - 5 \cos x = 7\left(\frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \sin x - \frac{1}{7} \cdot \cos x\right).$$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 1,$$

ezért van olyan α szög,amelyre:

$$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \text{és} \quad \sin\alpha = \frac{1}{7}.$$

A $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$ azonosságot használva:

$$f(x) = 7 \cdot \sin(x - \alpha).$$

Ennek a függvénynek a legnagyobb értéke 7, legkisebb értéke -7, ezeknek a szorzata -49.

A helyes válasz a ***B***.

26. Azon háromszögek közül, amelyeknek a területe egyenlő és egyik szögük közös, melyikben lesz az ismert szöggel szemközti oldal a legkisebb?

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1964; országos selejtező feladata

Megoldás:

A háromszög oldalait a szokásos módon betűzzük, az ismert szög γ, a háromszög területe T.

A háromszög területét kifejezzük két oldal és a közbezárt szög segítségével és használjuk a szinusztételt:

$$T = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2} \quad ; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad T = c^2 \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

A szögfüggvények szorzatát felírhatjuk különbség alakban is:

$$2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Felhasználjuk, hogy $\cos(\alpha + \beta) = \cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$, kifejezzük c^2-t:

$$c^2 = \frac{4T \cdot \sin\gamma}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{4T \cdot \sin\gamma}{\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma}.$$

Ebben a kifejezésben T, γ állandó, ezért c akkor lesz a legkisebb, ha $\cos(\alpha - \beta)$ a legnagyobb. Ez $\alpha = \beta$ esetén teljesül, amikor a háromszög egyenlő szárú.

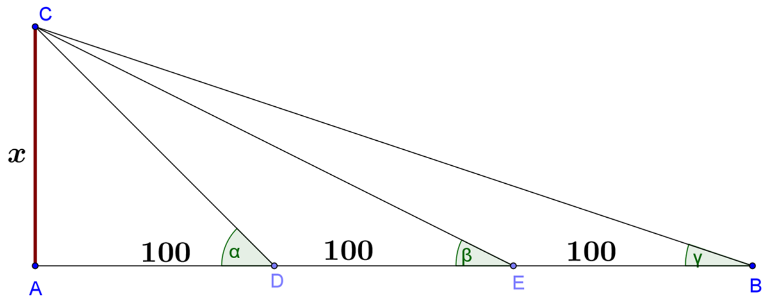
27. Megmértük egy vízszintes terepen álló antennatorony emelkedési szögét a talpponttól $100\ m, 200\ m$ és $300\ m$ távolságból. A három szög összege 90°. Milyen magas a torony?

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1959.évi 2. feladata

Megoldás:

A torony magasságát jelöljük x-el. A látószögeket az ábra szerint α, β, γ-val jelöljük, ekkor

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{100}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{200}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{300}.$$



$\alpha+\beta+\gamma=90°$, ezért

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{x}{300}=\operatorname{tg}\big(90°-(\alpha+\beta)\big)=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{1-\frac{x}{100}\cdot\frac{x}{200}}{\frac{x}{100}+\frac{x}{200}}=\frac{100\cdot 200-x^2}{300x}.$$

Innen:

$$x^2=20000-x^2$$

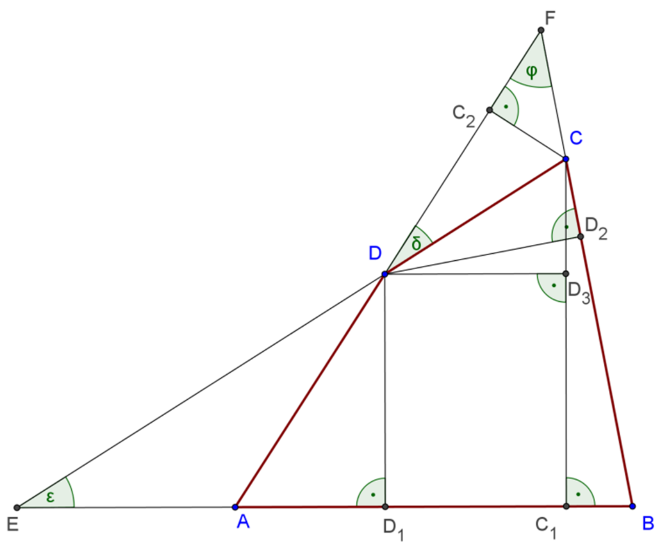
$$x=100.\quad (x>0)$$

A torony magassága 100 m.

28. Bizonyítsuk be, hogy a konvex négyszögek közül csak a paralelogrammáknak van meg az a tulajdonságuk, hogy mind a négy csúcs esetében ugyanakkora összeget kapunk, ha a rajta át nem haladó oldalegyenesektől való távolságait összeadjuk.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1967.évi 3. feladata

Megoldás:



A betűzést úgy választjuk, hogy az AB és CD egyenesek illetve az AD és BC egyenesek az ábra szerint az E illetve F pontban metszik egymást vagy párhuzamosak. ε és φ ezen oldalpárok hajlásszöge, ha párhuzamosak, akkor $\varepsilon=0$ illetve $\varphi=0$. Az $EDC\measuredangle$-et δ-val jelöljük, ekkor $DCB\measuredangle=\varphi+\delta$. A C csúcs merőleges vetülete az AB illetve AD oldalegyeneseken: C_1 és C_2, a D

pont vetülete az AB, BC oldalegyeneseken illetve a CC_1 egyenesen D_1, D_2, D_3. Ha a feladatban szereplő összeg a C és D csúcsokra azonos, akkor:

$$CC_1 + CC_2 = DD_1 + DD_2. \qquad (1)$$

Felhasználjuk, hogy a betűzés választása miatt $CC_1 \geq DD_1$, így $CC_1 = DD_1 + CD_3$, tehát (1) alapján:

$$CD_3 + CC_2 = DD_2. \qquad (2)$$

$CDD_3\measuredangle$ és ε egyállású szögek, ezért egyenlőek. A (2) egyenlőséget szögfüggvényekkel kifejezzük a megfelelő derékszögű háromszögekből:

$$DC \cdot \sin\varepsilon + DC \cdot \sin\delta = DC \cdot \sin(\varphi + \delta),$$

majd DC-vel osztunk:

$$\sin\varepsilon + \sin\delta = \sin(\varphi + \delta) = \sin\varphi \cdot \cos\delta + \cos\varphi \cdot \sin\delta\,.$$

Ugyanezt az A és D csúcsokra végiggondolva:

$$\sin\varphi + \sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \cos\delta + \cos\varepsilon \cdot \sin\delta$$

Adjuk össze az utolsó két egyenletet:

$$(\sin\varepsilon + \sin\varphi) \cdot (1 - \cos\delta) + (2 - \cos\varepsilon - \cos\varphi) \cdot \sin\delta = 0.$$

$0 < \delta < \pi$, ezért az előbbi kifejezésben mindkét tag második tényezője pozitív, az első tényezők pedig nemnegatívak. Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

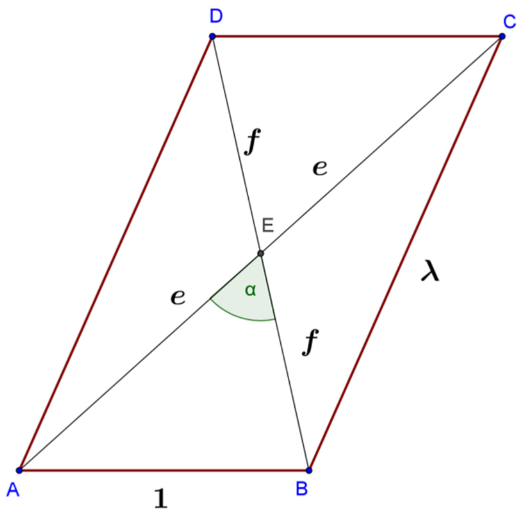
$$\sin\varepsilon + \sin\varphi = 0\,, \qquad \cos\varepsilon + \cos\varphi = 2.$$

Ez csak $\varepsilon = 0$ és $\varphi = 0$ esetén teljesülhet, ami azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

29. Jelölje egy paralelogramma két szomszédos oldalának arányát λ (ahol $\lambda > 1$). Határozzuk meg, hogy hogyan függ λ-tól az átlók közti hegyesszög legnagyobb lehetséges értéke.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1994.évi 1. feladata

Megoldás:



Legyen egység az AB oldal, ekkor a BC oldal λ. A paralelogramma átlói felezik egymást, az átlók felét e-vel és f-fel jelöljük, az átlók szöge φ. Az AEB és BEC háromszögekre felírjuk a koszinusztételt:

$$1 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\varphi,$$

$$\lambda^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos(180° - \varphi) = e^2 + f^2 + 2ef\cos\varphi.$$

A két egyenletet összeadva és kivonva:

$$\lambda^2 + 1 = 2(e^2 + f^2), \qquad \lambda^2 - 1 = 4ef\cos\varphi\,.$$

$\lambda^2 > 1$, ezért $\cos\varphi > 0$. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(\lambda^2 + 1)\cos\varphi = 4\left(\frac{e^2 + f^2}{2}\right)\cos\varphi \geq 4\sqrt{e^2 f^2}\cos\varphi = 4ef\cos\varphi = \lambda^2 - 1,$$

ahonnan:

$$\cos\varphi \geq \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)}.$$

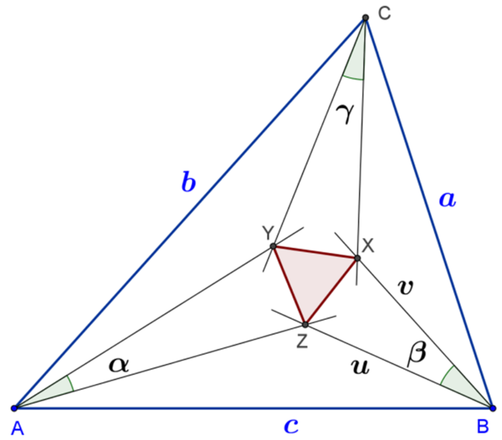
Egyenlőség akkor teljesül, ha $e = f$, ilyenkor a paralelogramma téglalap.

Legyen φ_0 olyan szög, amelyre

$$\cos\varphi_0 = \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)}, \qquad \varphi_0 = \arccos\frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)}.$$

Ilyen szög van, mert $0 < \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)} < 1$. A koszinuszfüggvény a $(0; 90°)$ intervallumban csökkenő függvény, ezért a keresett legnagyobb szög a φ_0.

30. (**Morley tétele**) Egy tetszőleges háromszög szögeit az AY, AZ, BZ, BX, CX, CY egyenesek $3-3$ egyenlő részre osztják. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög szabályos.



D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom:
Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből

Geometria I, 180. feladat

Megoldás:

A háromszög szögei $3\alpha; 3\beta; 3\gamma$, a háromszög oldalai $AB = c; AC = b; BC = a, BZ = u, BX = v$. Ha a háromszög köré írt körének sugara R, akkor $a = 2R\sin 3\alpha; b = 2R\sin 3\beta; c = 2R\sin 3\gamma$.
A háromszög szögeinek összege: $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$, tehát $\alpha + \beta + \gamma = 60°$.

A BXC háromszögben a szinusztétel alapján:

$$\frac{v}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \gamma)} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin\gamma}{\sin(60° - \alpha)}$$

$$v = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{2R \cdot \sin 3\alpha}{\sin(60° - \alpha)}.$$

Az addíciós tételek alapján levezethető:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - sin^2\alpha\right] = 4\sin\alpha\,(sin^2 60° - sin^2\alpha) =$$

$$= 4\sin\alpha(\sin 60° + \sin\alpha)\,(\sin 60° - \sin\alpha) =$$

$$= 4\sin\alpha \cdot 2\sin\frac{60° + \alpha}{2}\cos\frac{60° - \alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{60° + \alpha}{2}\sin\frac{60° - \alpha}{2} =$$

$$= 4\sin\alpha\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha).$$

Ezt felhasználva:

$$v = 8 \cdot R \cdot \sin\alpha\sin\gamma\sin(60° + \alpha).$$

Hasonlóan:

$$v = 8 \cdot R \cdot \sin\alpha\sin\gamma\sin(60° + \gamma).$$

A BXZ háromszögből koszinusztétel alapján:

$$XZ^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\beta =$$

$$= 64\,R^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma[\sin^2(60° + \alpha) + \sin^2(60° + \gamma) - 2\sin(60° + \alpha) \cdot \sin(60° + \gamma) \cdot \cos\beta]$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés egy koszinusztételre emlékeztet. Van-e olyan háromszög, amelynek két oldala $\sin(60° + \alpha)$ és $\sin(60° + \gamma)$ és a közbezárt szög β?

Az $\alpha + \beta + \gamma = 60°$ összefüggés miatt $(60° + \alpha) + (60° + \gamma) + \beta = 180°$, ezért van olyan háromszög, amelynek ezek a szögei. Ha a háromszög köré írható körének az átmérője 1, akkor a háromszög oldalai $\sin(60° + \alpha)$, $\sin(60° + \gamma)$ és $\sin\beta$. Így a fenti szögletes zárójelben lévő kifejezés értéke a koszinusztétel alapján $sin^2\beta$. Ezért

$$XZ^2 = 64\,R^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma\sin^2\beta,$$

$$XZ = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Ebben a kifejezésben α, β, γ szerepe felcserélhető, ezért ugyanezt a kifejezést kapjuk ZY és YV szakaszokra, ami azt jelenti, hogy az XYZ háromszög oldalai egyenlőek, azaz a háromszög szabályos.