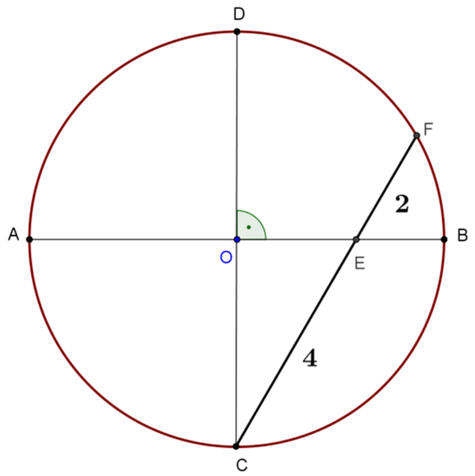
3. Geometria

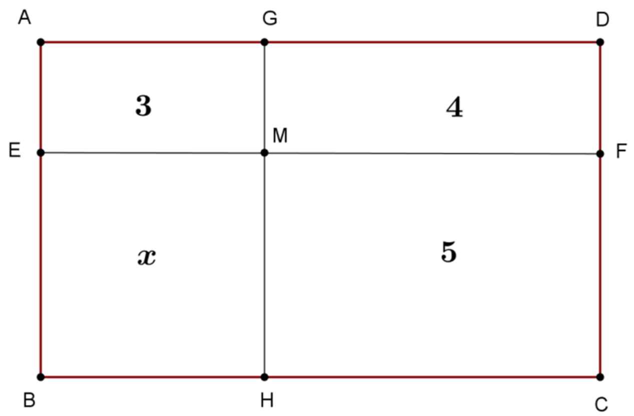
I. Feladatok

1. Egy körben adott két, egymásra merőleges átmérő. Az egyik végpontból húzott húrt a másik átmérő 2 és 4 egység hosszú szakaszokra bontja. Mekkora a kör sugara?



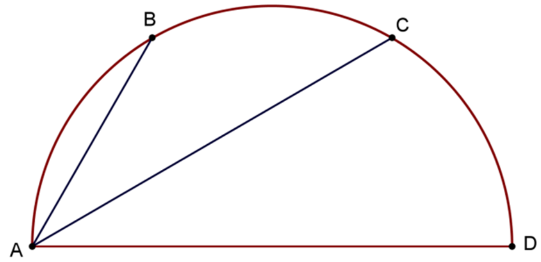
Kalmár László Matematika Verseny 1996; 8. osztály, országos döntő

2. Egy téglalapot négy téglalapra vágtunk szét, ezek területe: $3, 4, 5$ és x. Mennyi az x értéke?



Kalmár László Matematika Verseny 2007; 8. osztály, megyei forduló

3. Az ábrán látható félkör területe t. Az $ABCD$ félkört a B és C pontok három, egyenlő hosszú ívre bontják. Mennyi az ABC síkidom területe?



Kalmár László Matematika Verseny 2007; 8. osztály, országos döntő

4. Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldala AB és CD. Igazoljuk, hogy

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD \,.$$

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 8. osztály, országos döntő

5. Az $ABCD$ paralelogramma AB, illetve BC oldalára kifelé megszerkesztjük az ABP, illetve BCQ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy PQD is szabályos háromszög.

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 8. osztály, megyei forduló

6. Az ABC háromszög C-nél lévő szöge derékszög. A B csúcsból induló szögfelező az AC oldalt a P, a háromszög köré írt kört a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei, ha $BP = 2PQ$?

KöMaL 1997/december; Gy. 3170.

7. Ez derékszögű háromszög befogóihoz tartozó súlyvonalak hossza s_a illetve s_b, az átfogó c. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3}{2}c < s_a + s_b \leq \frac{\sqrt{10}}{2}c \,.$$

KöMaL 1993/november; F. 2983.

8. Rajzoljuk meg az ABC háromszög AB oldalát B-ben érintő és C-n átmenő, a BC oldalt C-ben érintő és A-n átmenő, valamint a CA oldalt A-ban érintő és B-n átmenő kört. Bizonyítsuk be, hogy a három kör egy közös ponton megy át.

KöMaL 1990/október; Gy. 2651.

9. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle és magassága is 40 cm. Az oldallapokon szeretnénk egy vonalat rajzolni az alaplap egyek csúcsából az alaplap átellenes csúcsába. Milyen hosszú a legrövidebb ilyen vonal?

KöMaL 2005/december; C.833.

10. $5 \times 10 \times 20$ cm élhosszúságú téglákból hézagmentesen felépítünk egy téglatestet. Igazoljuk, hogy ugyanezt úgy is felépíthetjük ezekből a téglákból, hogy azonos hosszúságú éleik mind párhuzamosak legyenek.

KöMaL 2009/március; B.4163.

11. Egy $a = 2$ oldalú négyzet két szomszédos oldala mint átmérő fölé befelé félköröket rajzolunk. Határozzuk meg az egyik félkört és a négyzet oldalát belülről érintő, a másik félkört kívülről érintő kör sugarát.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1969; haladók, 1. forduló

12. Egy háromszög egyik súlyvonalát tükrözzük a vele közös csúcsból induló szögfelezőre. Bizonyítsuk be, hogy a tükörkép a csúccsal szemközti oldalt a csúcsot alkotó oldalak négyzeteinek arányában osztja.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1973; haladók, szakosított matematika I.; 1I. forduló

13. Négyzetrácsos füzetlapon a négyzetoldalak hosszát tekintsük egységnek. Rajzoljunk rá egy téglalapot, melynek csúcsai a rácspontokra illeszkednek. Igaz-e, hogy minden esetben egész szám az ilyen téglalap területe?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1987; haladók, 1. forduló

14. A t területű, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezőpontja E, az AD oldalé F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2005/2006; haladók, II: kategória, 2. forduló

15. Az $ABCDEF$ hatszögre igaz, hogy minden szöge $120°$-os, AB oldala 2 cm, BC oldala 7 cm, CD oldala 3 cm és DE oldala 4 cm hosszú. Milyen hosszúak az EF, illetve az FA oldalak?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2010/2011; kezdők, 1. forduló

16. Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalának a kezdőponthoz közelebbi harmadolópontja legyen P, Q, R, S. Bizonyítsuk be, hogy az AC és BD átlók felezőpontját összekötő szakasz háromszor akkora, mint a PR és QS átlók felezőpontját összekötő szakasz.

OKTV 1970; 1. forduló

17. Adott félkörbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet két csúcsa a félkör átmérőjén, a másik két csúcsa a félköríven van. Ugyanebbe a félkörbe a négyzettel egyenlő területű derékszögű háromszöget írtunk úgy, hogy a háromszög átfogója a félkör átmérője, derékszögű csúcsa pedig a félkörívre esik. Igazoljuk, hogy a háromszög beírt körének középpontja a négyzet egyik oldalán van.

OKTV 1979; 1. forduló

18. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti. Az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének a felezőpontja legyen C_2, az A-t nem tartalmazó BC ívének a felezőpontja legyen A_2, a B-t nem tartalmazó AC ívének a felezőpontja legyen B_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy pontban mennek át.

OKTV 1997/98; II. kategória 2. forduló

19. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy belső pontja T, az AF és CT szakaszok metszéspontja M. Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora az ABC háromszög területe?

OKTV 2007/2008; II. kategória 1. forduló

20. Igazoljuk, hogy ha valamely háromszög területe $\frac{1}{2}$ területegység, akkor a kerülete 3 hosszegységnél nagyobb.

OKTV 2010/11; I. kategória 1. forduló

21. Jelöljük az ABC háromszög magasságpontját M-el. Az A-ból húzott magasság hossza 15 cm, és ez a magasság a BC oldalt egy 6 cm és egy 10 cm hosszú részre osztja fel. Mekkora távolságra van M a BC oldaltól?

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1964; középdöntő feladata

22. Legyen A és B egy kör kerületének két különböző pontja. Vegyünk fel a kör kerületén egy P pontot. Mi lesz az ABP háromszög nevezetes pontjainak mértani helye, ha a P pont végigfut a körön?

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1966; országos selejtező feladata

23. Egy kör gördül egy kétszer akkora sugarú körön, ennek belsejében. Milyen pályát ír le a gördülő kör kerületének valamely pontja?

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1926. évi 3. feladata

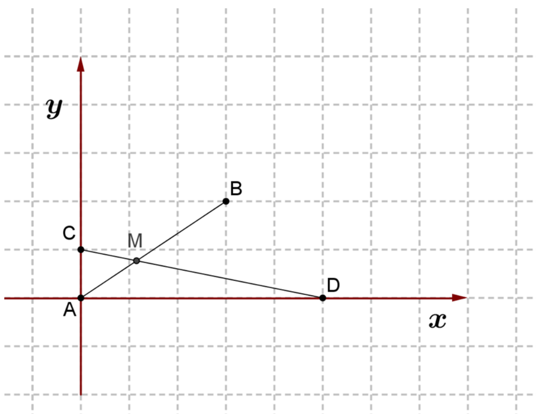
24. Egy körlapot feleakkora átmérőjű körlappal akarunk befedni. Hogyan tehetjük ezt meg a legkevesebb számú körlappal?

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1947. évi 3. feladata

25. Igazoljuk, hogy ha egy trapéz átlói merőlegesek, akkor szárainak szorzata legalább akkora, mint a párhuzamos oldalak szorzata.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1996.évi 1. feladata

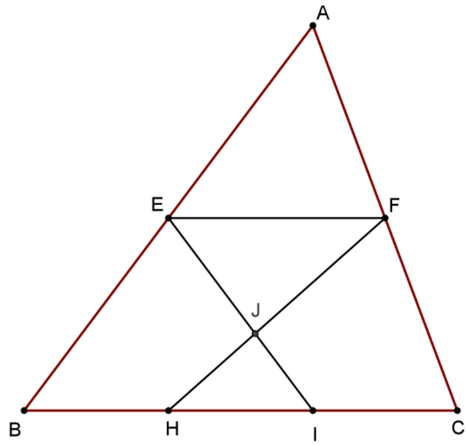
26. Adott a koordináta-rendszerben négy pont: $A(0;0), B(3;2), C(0;1), D(5;0)$. Az AB és CD szakaszok metszéspontja M (lásd ábra). Hány fok a DMA szög nagysága?



(A) 100 (B) 120 (C) 135 (D) 145 (E) 150

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 11. osztály, megyei forduló

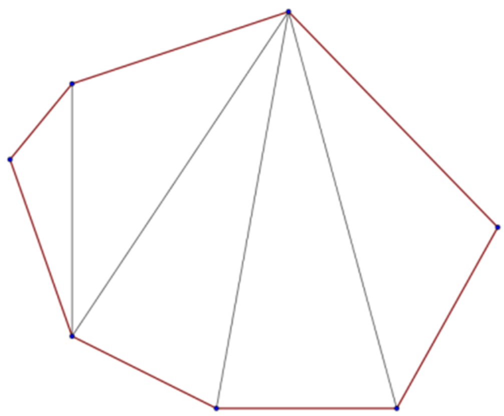
27. Az ABC háromszögben E, illetve F az AB illetve AC oldal felezőpontja, H és I a BC oldal két harmadolópontja. Ha az ABC háromszög területe $120\ \mathrm{cm}^2$, akkor hány cm^2 az EFJ háromszög területe?



(A) 9 (B) 18 (C) 24 (D) 30 (E) 40

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2004; 12. osztály, megyei forduló

28. Egy sokszöget egymást nem metsző átlói háromszögekre bontják (lásd például az alábbi ábrát). Bizonyítsuk be, hogy a sokszögnek van legalább két olyan csúcsa, amelyből nem indul ki átló.

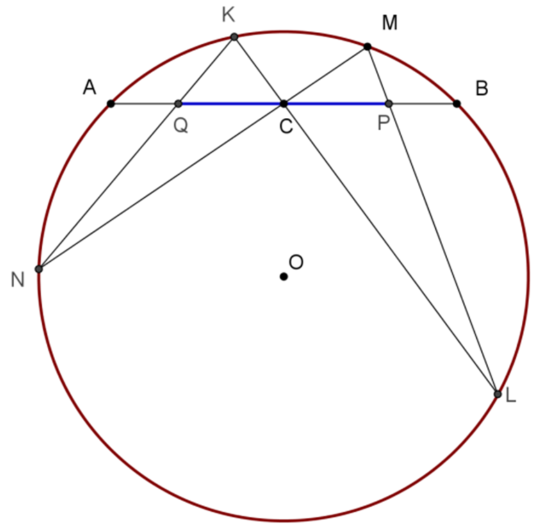


D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: Geometria I. 14.feladat

29. Bizonyítsuk be, hogy az érintőnégyszög beírt körének középpontja rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen. (***Newton tétele***)

D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: Geometria I. 135/a. feladat

30. A kör tetszőleges AB húrjának C felezőpontján át KL és MN húrokat fektetünk (K és M az AB húr azonos partján van); KN és ML az AB húrt a Q illetve P pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CP = CQ$. (***pillangó-tétel***)



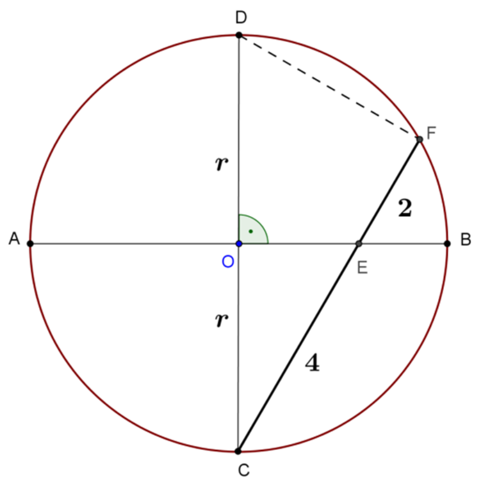
D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: Geometria I. 122.feladat

II. Megoldások

1. Egy körben adott két, egymásra merőleges átmérő. Az egyik végpontból húzott húrt a másik átmérő 2 és 4 egység hosszú szakaszokra bontja. Mekkora a kör sugara?

Kalmár László Matematika Verseny 1996; 8. osztály, országos döntő

Megoldás:

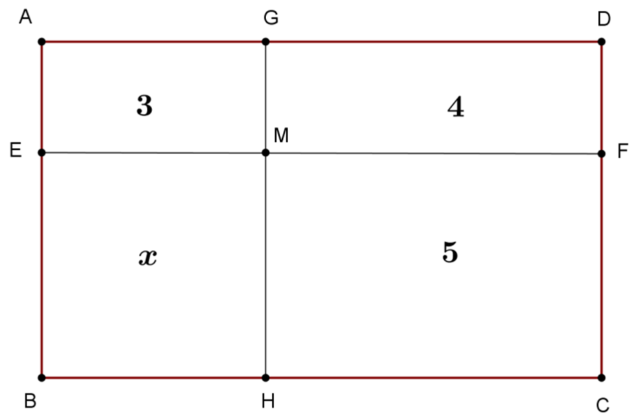


A kör sugarát az ábra szerint r-rel jelöljük. A DFC háromszög derékszögű Thalész tétele miatt. A COE és CFD háromszög derékszögű és egy hegyesszöge megegyezik, ezért a két háromszög hasonló. A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{r}{6} = \frac{4}{2r} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = 12\,.$$

Innen a kör sugara $r = 2\sqrt{3}$.

2. Egy téglalapot négy téglalapra vágtunk szét, ezek területe: $3, 4, 5$ és x. Mennyi az x értéke?

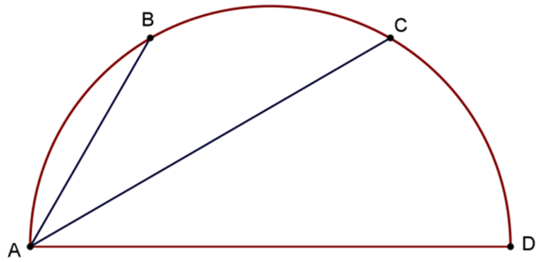


Kalmár László Matematika Verseny 2007; 8. osztály, megyei forduló

Megoldás:

Az $AGME$ és $GDFM$ téglalapok területének aránya megegyezik az $EM{:}\,MF$ aránnyal, mert a téglalapok másik oldala közös. Ugyanez igaz az $EMHB$ és $MFCH$ téglalapok területének arányára is. Ezért $x{:}\,5 = 3{:}\,4$, ahonnan $x = 15/4 = 3{,}75$.

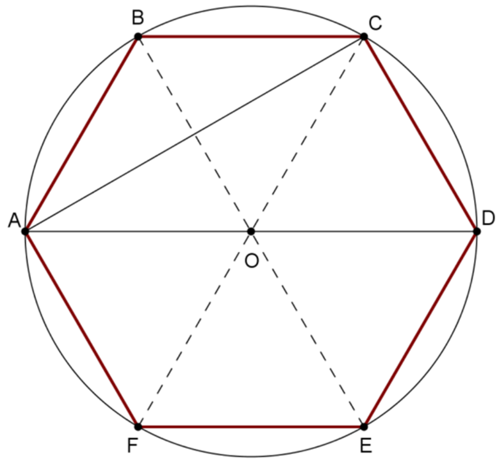
3. Az ábrán látható félkör területe t. Az $ABCD$ félkört a B és C pontok három, egyenlő hosszú ívre bontják. Mennyi az ABC síkidom területe?



Kalmár László Matematika Verseny 2007; 8. osztály, országos döntő

Megoldás:

Az ábrát elhelyezzük egy szabályos hatszögben. Az ABC háromszög átdarabolható az OBC háromszögbe. A feladatban szereplő síkidom egy ilyen háromszögből és egy BC-re illeszkedő körszeletből áll. A félkör 3 db ilyen háromszögből és 3 db az előzővel egybevágó körszeletből áll, ezért a kérdéses síkidom területe $\frac{t}{3}$.

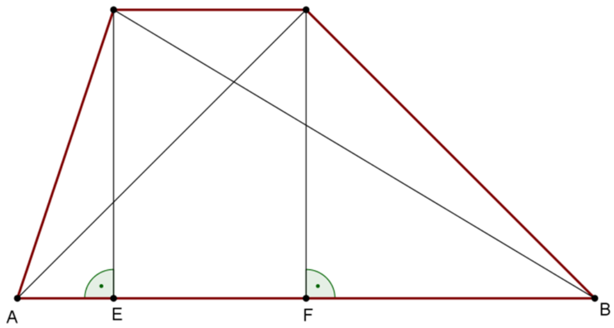


4. Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldala AB és CD. Igazoljuk, hogy

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD \, .$$

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 8. osztály, országos döntő

Megoldás:



A D és C csúcsokból merőlegest állítunk az AB alapra, a merőlegesek talppontjait E és F jelöli.

Pitagorasz tétele alapján:

$$AC^2 = AF^2 + FC^2$$
$$BD^2 = BE^2 + DE^2$$
$$AD^2 = AE^2 + DE^2$$
$$BC^2 = BF^2 + CF^2.$$

Tehát

$AC^2 + BD^2 = AF^2 + FC^2 + BE^2 + DE^2 = AF^2 + BC^2 - BF^2 + BE^2 + AD^2 - AE^2$.

Átrendezve:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + AF^2 - BF^2 + BE^2 - AE^2 .$$

Az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ azonosságot használva:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + (AF + BF)(AF - BF) + (BE + AE)(BE - AE) =$$
$$= AD^2 + BC^2 + AB \cdot (AF - AE + BE - BF) .$$

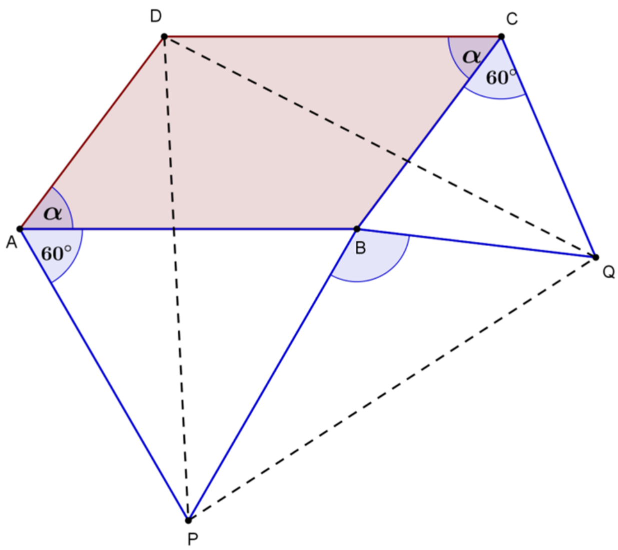
Felhasználva, hogy $AF - AE = BE - BF = EF = CD$:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + AB \cdot 2 \cdot EF = AD^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot CD.$$

5. Az $ABCD$ paralelogramma AB, illetve BC oldalára kifelé megszerkesztjük az ABP, illetve BCQ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy PQD is szabályos háromszög.

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 8. osztály, megyei forduló

Megoldás:



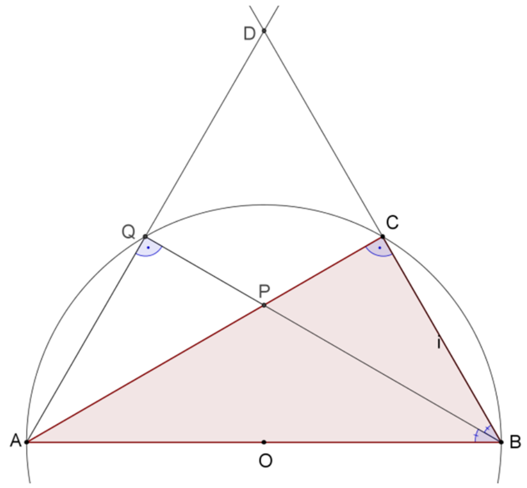
Ha a paralelogramma A csúcsánál lévő szöget α-val jelöljük, akkor a $DAP\measuredangle = DCQ\measuredangle = \alpha + 60°$. $AD = BC = CQ$; $AP = AB = DC$ a paralelogramma és a szabályos háromszög tulajdonsága miatt. $PBQ\measuredangle = 360° - (180° - \alpha) - 60° - 60° = \alpha + 60°$. $PB = AB$; $BQ = BC$.

Ezek alapján $APD\Delta \cong DCQ\Delta \cong BPQ\Delta$, mert két oldaluk és a közbezárt szög egyenlő. Egybevágó háromszögekben a megfelelő oldalak egyenlők, ezért $PD = DQ = PQ$, tehát a PQD háromszög valóban szabályos.

6. Az ABC háromszög C-nél lévő szöge derékszög. A B csúcsból induló szögfelező az AC oldalt a P, a háromszög köré írt kört a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei, ha $BP = 2PQ$?

KöMaL 1997/december; Gy. 3170.

Megoldás:



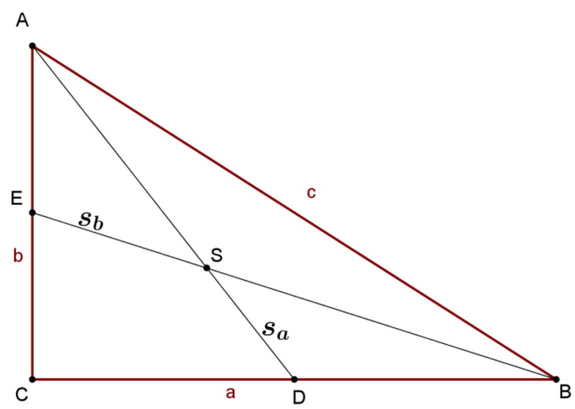
Meghosszabbítjuk az AQ és BC szakaszokat, ezek metszéspontja a D pont. Az ABQ háromszögben Thalész tétele miatt a Q pontnál derékszög van. Az ABD háromszögben a BQ szakasz szögfelező és egyben magasságvonal is, ezért ez a háromszög egyenlő szárú, $AB = BD$. Így a Q pont az AD szakasz felezőpontja, tehát BQ a háromszög súlyvonala. A $BP = 2PQ$ feltétel miatt a P pont az ABD háromszög súlypontja. Ebből következik, hogy AC is súlyvonal és egyben magasságvonal is. Ez csak akkor lehetséges, ha $AB = AD$ teljesül. Ezek szerint az ABD háromszög szabályos, tehát $ABC\angle = 60°$ és $BAC\angle = 30°$.

7. Ez derékszögű háromszög befogóihoz tartozó súlyvonalak hossza s_a illetve s_b, az átfogó c. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3}{2}c < s_a + s_b \leq \frac{\sqrt{10}}{2}c \ .$$

KöMaL 1993/ november; F. 2983.

Megoldás:



A súlypont a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadoló pontja. Az ASB háromszögben a háromszög-egyenlőtlenséget használva: $c < \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b$. Ezt átrendezve $\frac{3}{2}c < s_a + s_b$.

A súlyvonalakra írjuk fel a Pitagorasz tételt:

$$s_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \quad ; \quad s_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Ezeket az összefüggéseket összeadva:

$$s_a^2 + s_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2 .$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján:

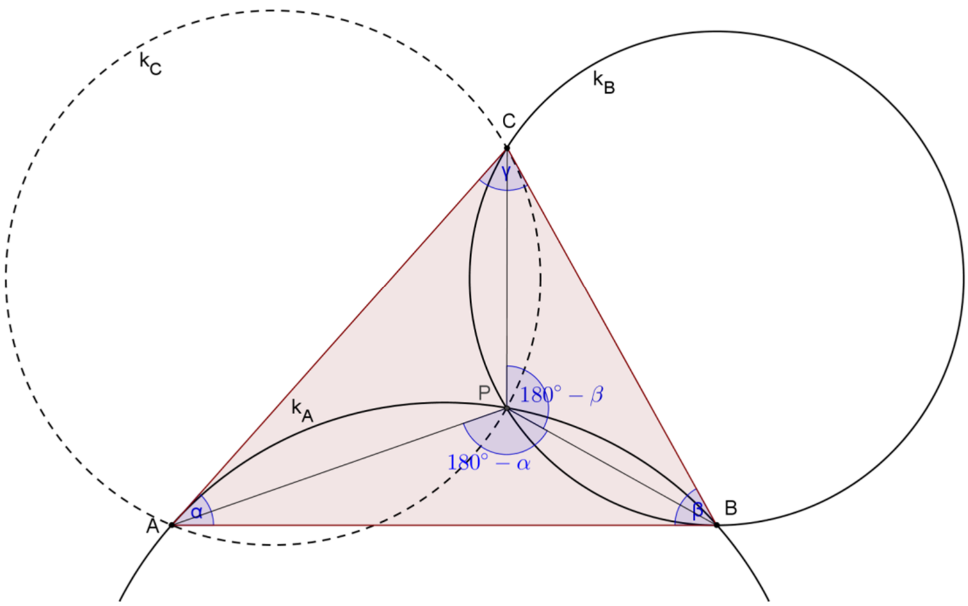
$$\frac{s_a + s_b}{2} \leq \sqrt{\frac{s_a^2 + s_b^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}c^2} = \sqrt{\frac{10}{16}c^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}c,$$

ezzel beláttuk az egyenlőtlenség jobb oldalát.

8. Rajzoljuk meg az ABC háromszög AB oldalát B-ben érintő és C-n átmenő, a BC oldalt C-ben érintő és A-n átmenő, valamint a CA oldalt A-ban érintő és B-n átmenő kört. Bizonyítsuk be, hogy a három kör egy közös ponton megy át.

KöMaL 1990/október; Gy. 2651.

Megoldás:



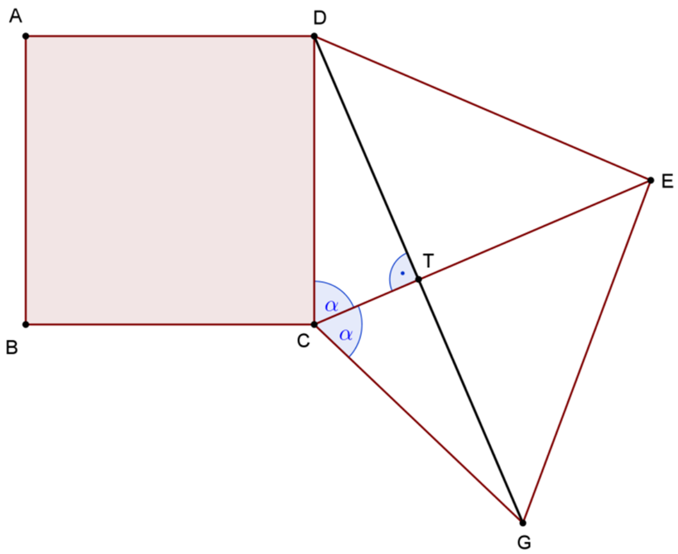
A háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val jelöljük. Az AC oldalt A-ban érintő kör k_A, az AB oldalt B-ben érintő kör k_B, a BC oldalt C-ben érintő kör k_C. A k_A kör az AC egyenes B-t tartalmazó félsíkjában, a k_B kör az AB egyenes C-t tartalmazó félsíkjában van, ezért a két kör B-től különböző P metszéspontja a CAB szögtartományban található. A P pont az ABC háromszög belsejébe esik, mert a megfelelő körívek csak így metszhetik egymást. A $CAB\angle$ a k_A körhöz tartozó érintőszárú kerületi szög, amely az APB ívhez tartozik. A kör másik ívéhez tartozó kerületi szög $APB\angle = 180° - \alpha$. Ugyanígy $BPC\angle = 180° - \beta$. Ekkor $APC\angle$ az alábbi módon kiszámítható: $APC\angle = 360° - (180° - \alpha + 180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$. Ezért a P pont az AC szakasz

$180° - \gamma$ szöghöz tartozó, az ABC háromszög belsejében lévő látókör pontja. Ez pedig éppen a k_C körvonal megfelelő íve. Ezzel beláttuk, hogy a három kör közös ponton megy át.

9. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle és magassága is 40 cm. Az oldallapokon szeretnénk egy vonalat rajzolni az alaplap egyik csúcsából az alaplap átellenes csúcsába. Milyen hosszú a legrövidebb ilyen vonal?

KöMaL 2005/december; C.833.

Megoldás:



Kiterítjük a gúla alaplapját és két szomszédos lapját. A B csúcs új helye a G pont. A B-ből a D- be vezető legrövidebb vonal az egyenes szakasz, azaz a DG szakasz hosszát kell meghatároznunk. A gúla oldaléle $\sqrt{40^2 + \left(20 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{20^2 \cdot (4 + 2)} = 20 \cdot \sqrt{6}$. $\cos \alpha = \frac{20}{20\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ a $CDE\Delta$-ből.

A $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ összefüggés alapján $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$. A $CGED$ négyszög deltoid, ezért átlói merőlegesek egymásra. Tehát $DG = 2 \cdot 40 \cdot \sin \alpha = 80 \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} = 40 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 73{,}03\ (cm)$ a legrövidebb vonal hossza.

10. $5 \times 10 \times 20$ cm élhosszúságú téglákból hézagmentesen felépítünk egy téglatestet. Igazoljuk, hogy ugyanezt úgy is felépíthetjük ezekből a téglákból, hogy azonos hosszúságú éleik mind párhuzamosak legyenek.

KöMaL 2009/március; B.4163.

Megoldás:

Az 5 cm-t tekintsük egységnek. Ekkor azt mondhatjuk, hogy $1 \times 2 \times 4$ –es kis téglákat használunk. A kis téglák oldallapjainak területe páros, ilyenekből rakjuk ki a nagy téglatest oldalait, ezért a nagy téglatest oldallapjainak a területe is páros. Így a téglatestnek nem lehet két páratlan hosszúságú éle. Ha van 4-gyel osztható élhossza is, akkor biztosan el tudjuk helyezni a kis téglákat azonos állásban úgy, hogy a téglatestet kitöltsék.

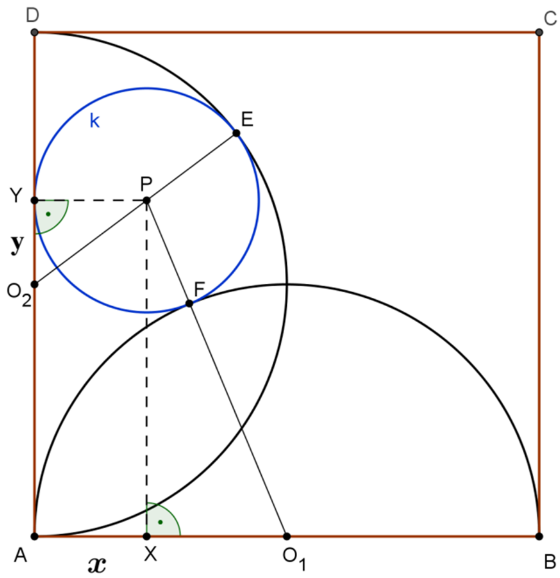
Tegyük fel, hogy nincs 4-gyel osztható él. Minden kis tégla térfogata 8 egység, így a nagy téglatest térfogata osztható 8-cal. Ekkor minden élhossz páros, tehát $2a, 2b, 2c$ alakban írható, ahol a, b, c

páratlan számok. A téglatestet bontsuk fel egységkockákra. Az egyik sarokban lévő kis kockát fessük feketére, a vele lapban, élben vagy csúcsban érintkezőket pedig fehérre. Így egy $2 \times 2 \times 2$ – es részt színeztünk. Az egész téglatestre terjesszük ki ezt a színezést periodikusan, ilyen $2 \times 2 \times 2$ – es színezett részeket használva. Ezzel a módszerrel abc fekete kiskockát kaptunk, ez a szám páratlan. A kis téglák bármelyikében 0 vagy 2 fekete kocka lehet, tehát ezek száma páros. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állítás igaz.

11. Egy $a = 2$ oldalú négyzet két szomszédos oldala mint átmérő fölé befelé félköröket rajzolunk. Határozzuk meg az egyik félkört és a négyzet oldalát belülről érintő, a másik félkört kívülről érintő kör sugarát.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1969; haladók, 1.forduló

Megoldás:



Ha egy kör érint egy egyenest, akkor az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. Ha két kör érinti egymást, akkor a két kör középpontja és az érintési pont egy egyenesen van. Az ábrán ezt jelöltük és a számítás során ezt fogjuk felhasználni. $AB = 2$, ezért a félkörök sugara 1.

A félkörök középpontjai O_1 és O_2, a keresett kör középpontja P, az AD oldalt az Y pontban érinti, az O_2Y távolság y, a kör sugara x. Az O_1XP és O_2YP derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$(1-x)^2 + (1+y)^2 = (1+x)^2 \quad \Rightarrow \quad (1+y)^2 = 4x$$

$$x^2 + y^2 = (1-x)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - y^2 = 2x$$

Ezek alapján :

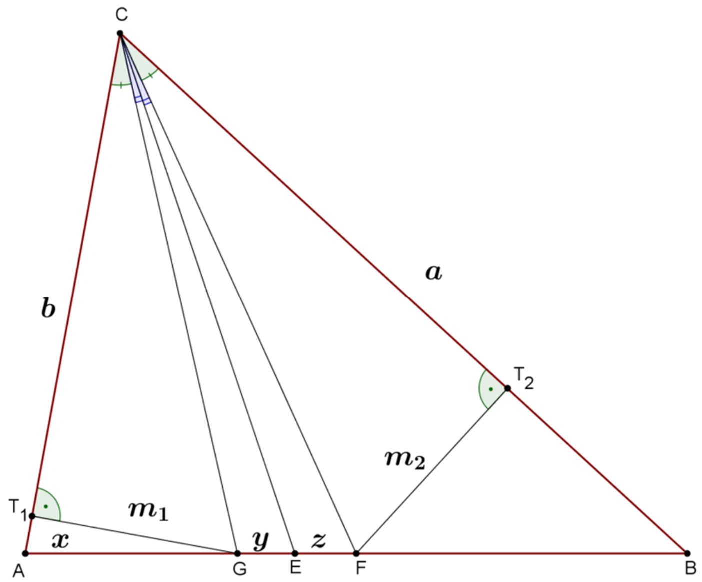
$$(1+y)^2 = 2 \cdot (1 - y^2) \quad .$$

A másodfokú egyenlet két gyöke $y_1 = \frac{1}{3}$, ekkor $x_1 = \frac{4}{9}$; és $y_2 = -1$, amikor $x_2 = 0$. A feladat szempontjából $\frac{4}{9}$ a keresett kör sugara. A 0 sugarú, A középpontú kört nem tekintjük a feladat megoldásának, bár „elfajult” esetként beszélhetünk róla.

12. Egy háromszög egyik súlyvonalát tükrözzük a vele közös csúcsból induló szögfelezőre. Bizonyítsuk be, hogy a tükörkép a csúccsal szemközti oldalt a csúcsot alkotó oldalak négyzeteinek arányában osztja.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1973; haladók, szakosított matematika I.; 1I.forduló

Megoldás:



Ha a háromszögben $AC = BC$, akkor az állítás nyilvánvalóan teljesül. Ezért nem jelent megszorítást, ha feltesszük $\frac{AC}{BC} = \lambda < 1$. A háromszög BC oldalát a-val, AC oldalát b-vel, AB oldalát $2c$-vel jelöljük. A szögfelező az E pontban, a súlyvonal az F pontban, a tükörkép a G pontban metszi az AB oldalt. A szögfelezőtétel és $\lambda < 1$ miatt a pontok sorrendje az ábrának megfelelő. Az x, y, z jelöléseket az ábra szerint vezetjük be. A szögfelező és a tükrözés tulajdonsága miatt az egyformán jelölt szögek egyenlők.

A GFC háromszögben alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

$$\frac{y}{z} = \frac{CG}{CF} \qquad (1)$$

A G és F pontokból merőlegest állítunk az ábra szerint a háromszög oldalaira. A GT_1C és FT_2C háromszögek hasonlóak, mert két szögük egyenlő. Ezért

$$\frac{CG}{CF} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (2)$$

Ha az ABC háromszögnek az AB oldalhoz tartozó magassága m, akkor az AGC és BFC háromszögek kétszeres területét kétféle módon kifejezve azt kapjuk, hogy

$$b \cdot m_1 = x \cdot m$$

$$a \cdot m_2 = c \cdot m$$

tehát

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x \cdot a}{b \cdot c} = \frac{x}{\lambda \cdot c}.$$

Az (1) és (2) összefüggéseket használva:

$$\frac{y}{z}=\frac{x}{\lambda\cdot c} \quad \Longrightarrow \quad y=z\cdot\frac{x}{\lambda\cdot c}\ .$$

Az ABC háromszögben alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

$$\frac{c-z}{c+z}=\lambda \quad \Longrightarrow \quad z=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot c\,.$$

Az előző összefüggést felhasználva:

$$y=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{x}{\lambda}.$$

Tudjuk, hogy

$$x+y+z=c\ .$$

Eredményeinket felhasználva:

$$x+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{x}{\lambda}=c-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot c$$

$$x\left(1+\frac{1-\lambda}{\lambda(1+\lambda)}\right)=\left(1-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\cdot c$$

$$x\frac{\lambda^2+1}{\lambda(1+\lambda)}=\frac{2\lambda}{1+\lambda}\cdot c$$

$$x=\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1}\cdot c\,.$$

Az $\frac{AG}{GB}=\frac{x}{2c-x}$ arányt szeretnénk meghatározni:

$$2c-x=2c-\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1}\cdot c=\frac{2}{\lambda^2+1}\cdot c$$

$$\frac{AG}{GB}=\frac{\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1}\cdot c}{\frac{2}{\lambda^2+1}\cdot c}=\lambda^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

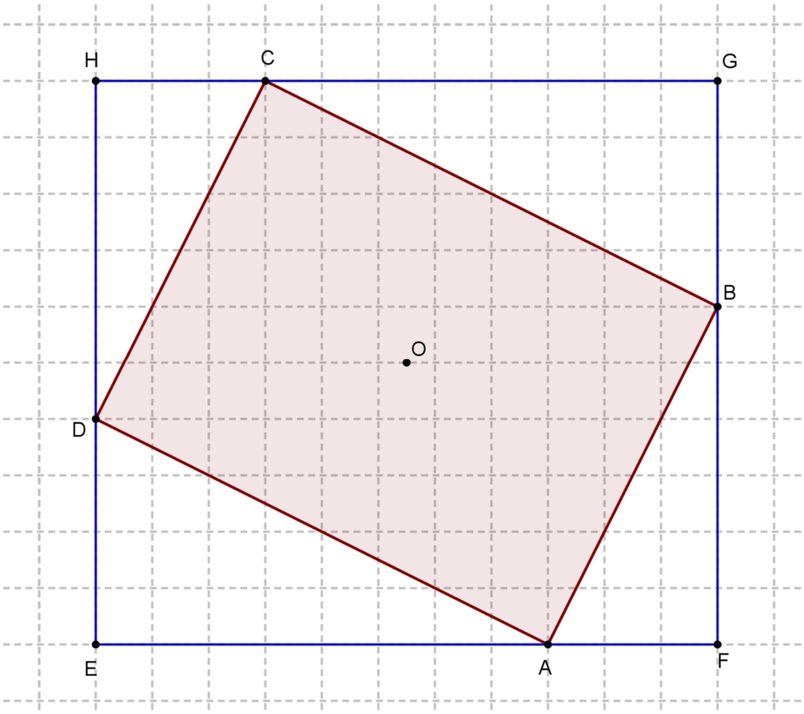
Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

13. Négyzetrácsos füzetlapon a négyzetoldalak hosszát tekintsük egységnek. Rajzoljunk rá egy téglalapot, melynek csúcsai a rácspontokra illeszkednek. Igaz-e, hogy minden esetben egész szám az ilyen téglalap területe?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1987; haladók, 1.forduló

Megoldás:

Legyen $ABCD$ egy ilyen téglalap (lásd az ábrát a következő oldalon). A csúcsain keresztül húzott rácsvonalakkal az ábra szerint befoglaljuk az $EFGH$ téglalapba. Az $EFGH$ téglalap területe egész szám. Legyen O az $ABCD$ téglalap középpontja. Ha az A ponton átmenő EF egyenest O-ra tükrözzük, akkor a C-n átmenő, vele párhuzamos egyenest, tehát a HG egyenest kapjuk. Ugyanígy az FG egyenes tükörképe az EH egyenes. Ezért az O pont az $EFGH$ téglalapnak is a középpontja. Az AFB háromszög tükörképe a CHD háromszög, az EAD háromszög tükörképe a GCB háromszög. Ezekben a derékszögű háromszögekben a befogók hossza egész szám, ezért két-két egybevágó háromszög területének összege is egész szám. Ha az $EFGH$ területéből ezeket a részeket elhagyjuk, akkor a maradék területe egész szám lesz.



Megjegyzés:

A rácsgeometria egy tétele, a Pick-tétel szerint ha egy rácssokszög belsejében b darab, a határán h darab rácspont van, akkor a területe:

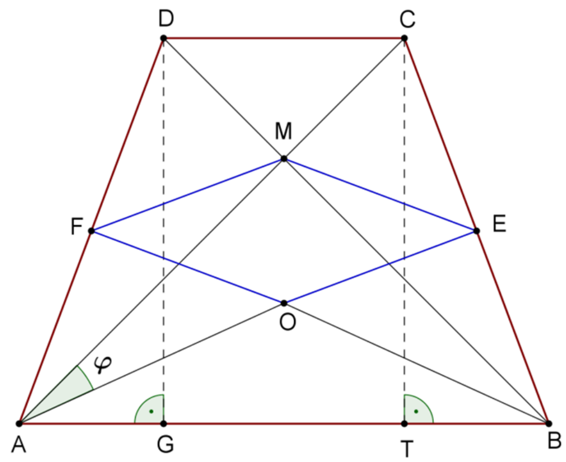
$$t = b - 1 + \frac{h}{2} .$$

Az $ABCD$ téglalap szimmetria középpontja a rácsnak is szimmetria középpontja, így a határon lévő rácspontok száma a szimmetria miatt páros, így a terület egész szám lesz.

14. A t területű, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezőpontja E, az AD oldalé F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2005/2006; haladók, II: kategória, 2.forduló

Megoldás:



A trapéz párhuzamos oldalai $AB = a$, $CD = c$, ekkor $BT = \frac{a-c}{2}$, $AT = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}$.

A trapéz területe $t = m \cdot \frac{a+c}{2} = m^2$ alapján $m = \frac{a+c}{2} =$ AT. Az ATC derékszögű háromszög két befogója egyenlő, tehát $BAC\sphericalangle = 45°$. A szimmetria miatt $DBA\sphericalangle = 45°$ is teljesül. Az ABM egyenlőszárú háromszög harmadik szöge $AMB\sphericalangle = 90°$, így $BMC\sphericalangle = 90°$ is teljesül.

Ha az $OAC\sphericalangle = \varphi$ jelölést használjuk, akkor $AOC\sphericalangle = 180° - 2\varphi$ az AOC egyenlőszárú háromszögből. Az $AOB\sphericalangle = 180° - 2(45° - \varphi) = 90° + 2\varphi$. Ekkor

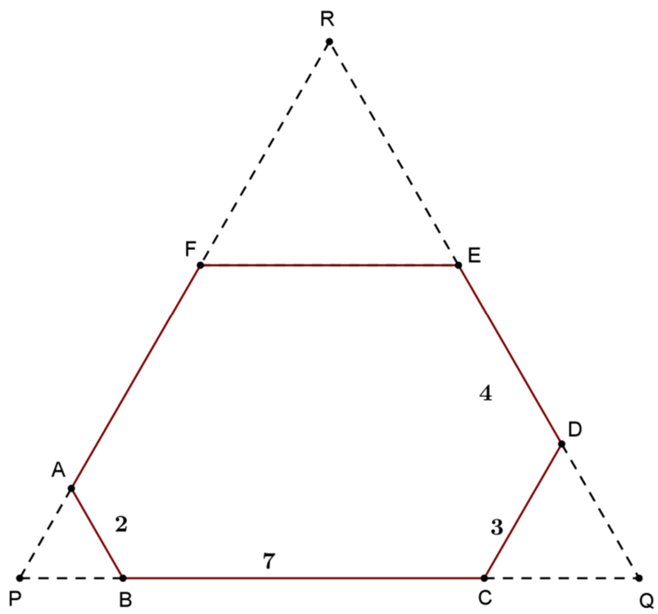
$$BOC\sphericalangle = 360° - AOC\sphericalangle - AOB\sphericalangle = 360° - (180° - 2\varphi) - (90° + 2\varphi) = 90°.$$

Ez azt jelenti, hogy az O és M pontok a BC szakasz Thalész-körén vannak. Ennek a körnek a sugarai $OE = ME$. Szimmetria miatt $OE = OF$ és $ME = MF$ is teljesül. Így az $OEMF$ négyszög valóban rombusz.

15. Az $ABCDEF$ hatszögre igaz, hogy minden szöge 120°-os, AB oldala 2 cm, BC oldala 7 cm, CD oldala 3 cm és DE oldala 4 cm hosszú. Milyen hosszúak az EF, illetve az FA oldalak?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2010/2011; kezdők, 1.forduló

Megoldás:



Ha a BC, DE, FA oldalakat az ábra szerint meghosszabbítjuk, akkor a PQR háromszöget kapjuk. Az $ABCDEF$ hatszög minden külső szöge 60°-os, ezért a P, Q, R pontoknál 60°-os szögek vannak. Így az ABP, CDQ, EFR háromszögek szabályosak. Tehát $PB = PA = 2\ cm$; $CQ = QD = 3\ cm$ és így $PQ = 2\ cm + 7\ cm + 3\ cm = 12\ cm$. A hiányzó szakaszok ez alapján meghatározhatóak:

$$RE = EF = RQ - ED - DQ = PQ - ED - DQ = 12\ cm - 3\ cm - 4\ cm = 5\ cm$$

$$AF = PR - AP - FR = PQ - AP - FE = 12\ cm - 2\ cm - 5\ cm = 5\ cm.$$

16. Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalának a kezdőponthoz közelebbi harmadolópontja legyen P, Q, R, S. Bizonyítsuk be, hogy az AC és BD átlók felezőpontját összekötő szakasz háromszor akkora, mint a PR és QS átlók felezőpontját összekötő szakasz.

OKTV 1970; 1. forduló

Megoldás:

Valamely rögzített O pontból a pontokhoz vektorokat irányítunk, a vektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük. Ha az AC átló felezőpontja F , a BD átló felezőpontja E, akkor:

$$\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}}{2} \quad ; \quad \overrightarrow{FE}=\boldsymbol{e}-\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{2} \quad .$$

A harmadolópontokba mutató vektorok:

$$\boldsymbol{p}=\frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}} \quad ; \quad \boldsymbol{q}=\frac{2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\mathbf{3}} \quad ; \quad \boldsymbol{r}=\frac{2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{\mathbf{3}} \quad ; \quad \boldsymbol{s}=\frac{2\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}}{\mathbf{3}} \quad .$$

Ha a PR szakasz felezőpontja U, a QS szakasz felezőpontja V, akkor

$$\boldsymbol{u}=\frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{6} \quad ; \quad \boldsymbol{v}=\frac{2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}}{6} \quad ; \quad \overrightarrow{UV}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{\mathbf{6}} \quad .$$

Tehát

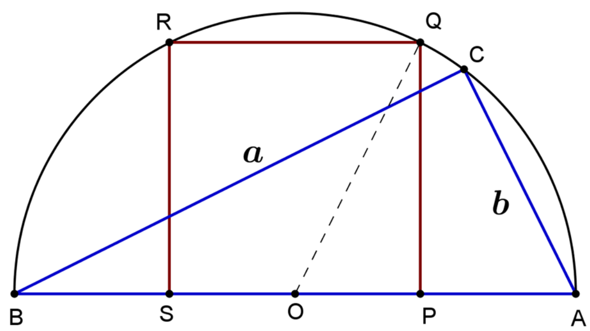
$$\overrightarrow{FE}=3\cdot\overrightarrow{UV} \quad ,$$

ebből következik a feladat állítása.

17. Adott félkörbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet két csúcsa a félkör átmérőjén, a másik két csúcsa a félköríven van. Ugyanebbe a félkörbe a négyzettel egyenlő területű derékszögű háromszöget írtunk úgy, hogy a háromszög átfogója a félkör átmérője, derékszögű csúcsa pedig a félkörívre esik. Igazoljuk, hogy a háromszög beírt körének középpontja a négyzet egyik oldalán van.

OKTV; 1979. 1.forduló

Megoldás:



A félkör sugara legyen egységnyi, a beírt négyzet $PQRS$, a vele egyenlő területű háromszög ABC, a derékszögű háromszög befogói a és b $(a>b)$. Az OQR háromszögben $QR=2OQ$. Erre a háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$OQ^2+(2\cdot OQ)^2=1 \quad \Longrightarrow \quad OQ=\frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad QR=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad .$$

A négyzet területe ennek megfelelően $\frac{4}{5}$. A derékszögű háromszög területét felírva és a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$\frac{ab}{2}=\frac{4}{5}$$

$$a^2+b^2=4 \quad .$$

Innen

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + \frac{16}{5} \quad \Longrightarrow \quad a + b = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 4 - \frac{16}{5} \quad \Longrightarrow \quad a - b = \frac{2}{\sqrt{5}} .$$

Tehát a befogók:

$$a = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad ; \quad b = \frac{2}{\sqrt{5}} .$$

Jelölje s a háromszög fél kerületét. A háromszög beírt köre az AB oldalt abban a pontban érinti, amelynek az A-tól való távolsága $s-a$. Ebben az esetben

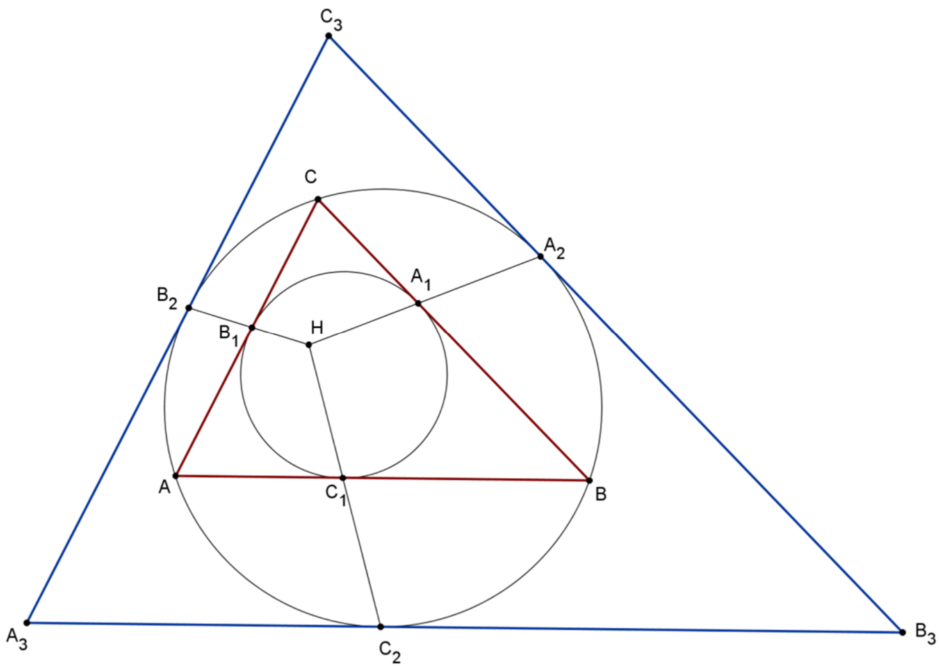
$$s - a = \frac{2 + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} - \frac{4}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = AP .$$

Ez azt jelenti, hogy a beírt kör a P pontban érinti az AB átmérőt, tehát a kör középpontja a QR szakaszon, azaz a négyzet oldalán van.

18. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre a C_1, A_1, B_1 pontokban érinti. Az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének a felezőpontja legyen C_2, az A-t nem tartalmazó BC ívének a felezőpontja legyen A_2, a B-t nem tartalmazó AC ívének a felezőpontja legyen B_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy pontban mennek át.

OKTV 1997/98; II. kategória, 2. forduló

Megoldás:



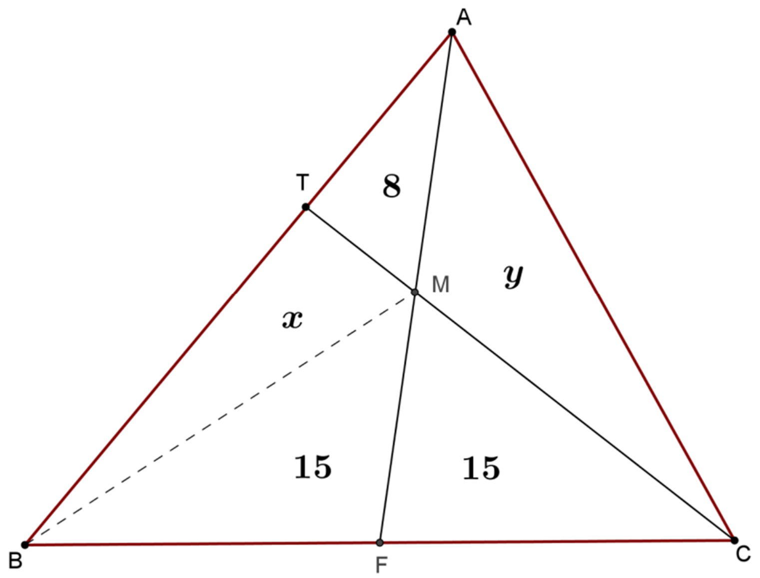
A BC szakasz felezőmerőlegese átmegy a körülírt kör középpontján és az A_2 ponton is. Így ha az A_2 ponton keresztül érintőt húzunk a körülírt körhöz, akkor a BC egyenessel párhuzamost fogunk kapni. Ugyanezt megtesszük az ábra szerint a B_2 és C_2 pontokon keresztül is. Ezek az egyenesek az

$A_3B_3C_3$ háromszöget alkotják. Az oldalak párhuzamossága miatt az ABC és $A_3B_3C_3$ háromszög középpontosan hasonló. A középpontos hasonlóság esetében az érintési pontok egymásnak felelnek meg, ezért az A_1A_2 ; B_1B_2 ; C_1C_2 egyenesek egy ponton, a hasonlóság középpontján mennek át.

19. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldal egy belső pontja T, az AF és CT szakaszok metszéspontja M. Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora az ABC háromszög területe?

OKTV 2007/2008; II.kategória, 1.forduló

Megoldás:



A BMT háromszög területét x-el, a CMA háromszög területét y-nal jelöljük. A BCM háromszögben MF súlyvonal, ezért a háromszöget két egyenlő területű részre bontja, azaz $T_{BFM} = 15$. Az ABC háromszögben AF súlyvonal, így $8 + x + 15 = 15 + y$, azaz $y = x + 8$.

Ha két háromszög magassága azonos, akkor a területek aránya megegyezik az alapok arányával. Így

$$\frac{AT}{BT} = \frac{T_{ATM}}{T_{BTM}} = \frac{T_{ATC}}{T_{BTC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{8} = \frac{x+30}{y+8} \ .$$

Behelyettesítve az y-ra kapott kifejezést és átrendezve:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+30}{x+8+8}$$

$$x^2 + 8x - 240 = 0 \ .$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a két gyöke 12 és -20. Csak a pozitív érték lesz a feladat megoldása. Ekkor $y = 20$ és a háromszög területe $T = 15 + 15 + 20 + 8 + 12 = 70$ területegység.

20. Igazoljuk, hogy ha valamely háromszög területe $\frac{1}{2}$ területegység, akkor a kerülete 3 hosszegységnél nagyobb.

OKTV 2010/11; I. kategória, 1.forduló

Megoldás:

A háromszög oldalainak hossza a, b, c , ekkor a félkerület $s = \frac{a+b+c}{2}$. A Héron-képlet alapján a háromszög területe:

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \ .$$

A terület értékét behelyettesítve és átrendezve

$$4s = \frac{1}{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \qquad (1)$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk az $s-a; s-b; s-c$ pozitív számokra:

$$\sqrt[3]{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} = \frac{s}{3} \ .$$

Az egyenlőtlenséget köbre emelve:

$$(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \leq \frac{s^3}{27} \ .$$

(1)-et felhasználva:

$$4s \geq \frac{1}{\frac{s^3}{27}} \quad \Rightarrow \quad s \geq \sqrt[4]{\frac{27}{4}} \ .$$

Ebből a kerületre becslést tudunk adni:

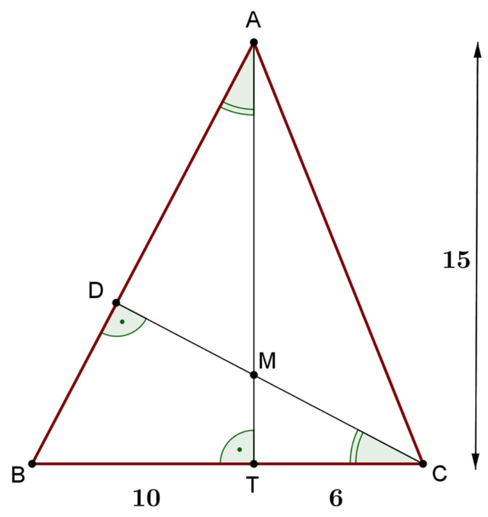
$$K = 2s \geq 2\sqrt[4]{\frac{27}{4}} = \sqrt[4]{108} > \sqrt[4]{81} = 3 \, .$$

Ezzel beláttuk a bizonyítandó állítást.

21. Jelöljük az ABC háromszög magasságpontját M-el. Az A-ból húzott magasság hossza 15 cm, és ez a magasság a BC oldalt egy 10 cm és egy 6 cm hosszú részre osztja fel. Mekkora távolságra van M a BC oldaltól?

„Ki miben tudós?" vetélkedő 1964; középdöntő feladata

Megoldás:



$BAT\measuredangle = DCB\measuredangle$, mert merőleges szárú szögek. $ATB\Delta \sim MTC\Delta$, mert derékszögű háromszögek és egy hegyesszögük egyenlő. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{MT}{BT} = \frac{CT}{AT} .$$

Az adatokat behelyettesítve:

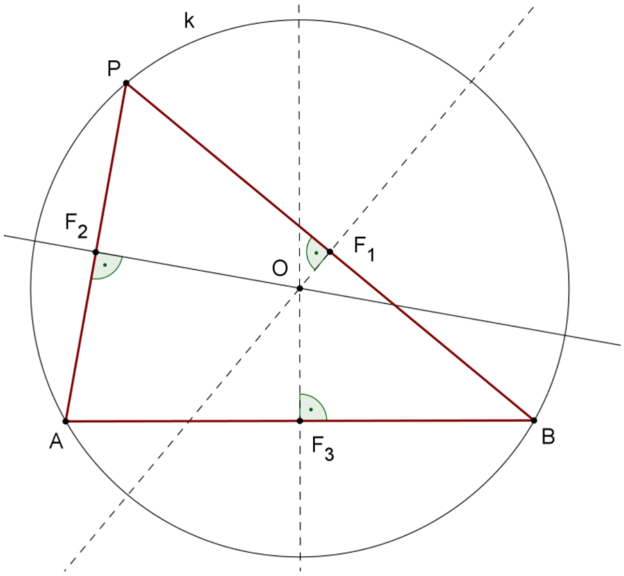
$\frac{MT}{10} = \frac{6}{15} \quad \Longrightarrow \quad MT = 4\,cm$ távolságra van a magasságpont a BC oldaltól.

22. Legyen A és B egy kör kerületének két különböző pontja. Vegyünk fel a kör kerületén egy P pontot. Mi lesz az ABP háromszög nevezetes pontjainak mértani helye, ha a P pont végigfut a körön?

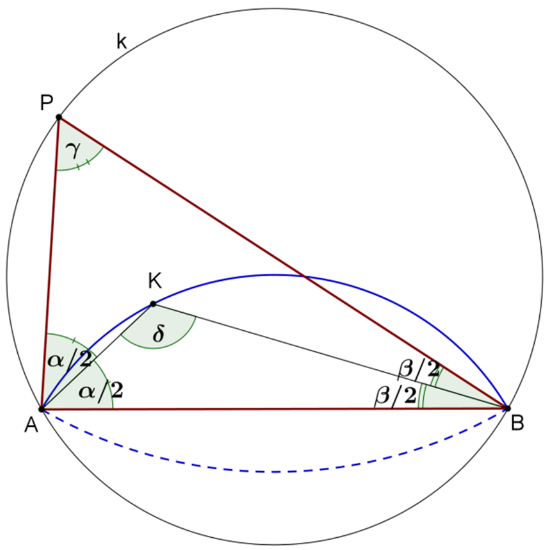
„Ki miben tudós?" vetélkedő 1966; országos selejtező feladata

Megoldás:

a) A körülírható kör középpontja, az oldalfelező merőlegesek metszéspontja tetszőleges P pont esetén az adott k kör középpontja.



b) A beírható kör K középpontját a szögfelezők metszéspontja adja meg.



Ha a háromszög szögeit α, β, γ-val jelöljük, akkor az ábra szerint

$$AKB\sphericalangle = 180° - \alpha/2 - \beta/2 = 180° - \frac{180° - \gamma}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Az adott köríven a γ szög állandó, ezért a K pont az AB szakasz $90° + \frac{\gamma}{2}$ szöghöz tartozó látókörén van. Megmutatható, hogy ennek az ívnek minden A-tól és B-től különböző pontja előáll valamely megfelelő háromszög beírható körének középpontjaként.

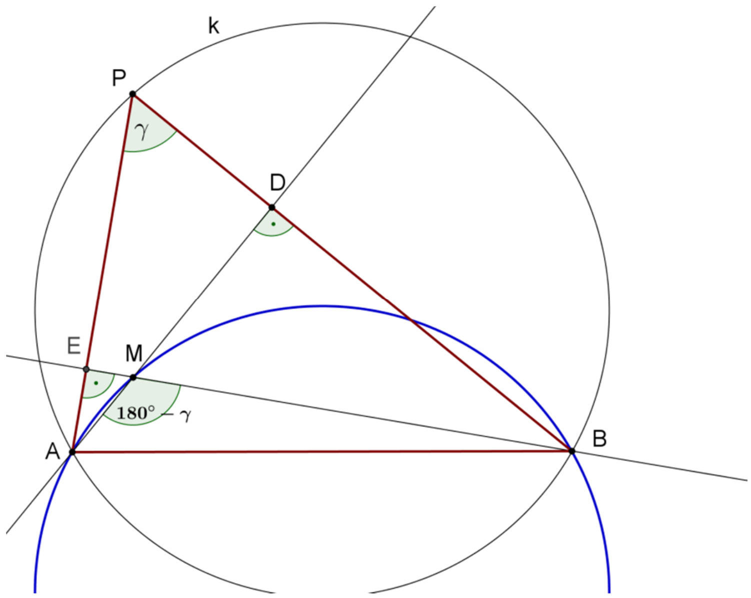
Ha a P pontot a másik köríven választjuk, akkor egy hasonlóan meghatározható látókörön lesz a beírható kör középpontja ($90° + \frac{180°-\gamma}{2} = 180° - \frac{\gamma}{2}$ szöghöz tartozó látókör).

A keresett ponthalmaz ezért ebből a két látókörívből áll.

c) A magasságvonalak metszéspontja M. A $PEMD$ négyszögben $EMD\sphericalangle = 180° - \gamma$.

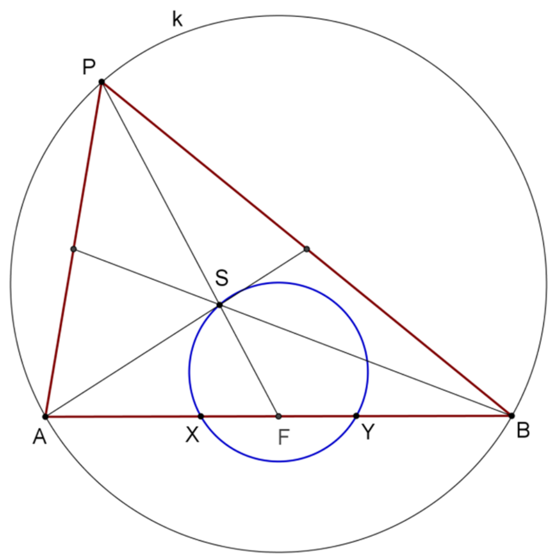
Ezzel csúcsszöget alkot az $AMB\sphericalangle$, így ez is $180° - \gamma$.

Az adott köríven a γ szög állandó, ezért az M pont az AB szakasz $180° - \gamma$ szöghöz tartozó látókörívén van. Megmutatható, hogy ha a P pont a k kör másik körívén mozog, akkor a magasságpont az előző körívet teljes körré kiegészítő, $180° - (180° - \gamma) = \gamma$ szöghöz tartozó látóköríven lesz. Ez a ponthalmaz az eredeti körnek az AB egyenesre vonatkozó tükörképe. A körvonal minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Az A és B pontokat derékszögű háromszögek esetében kapjuk.



d) Az F pont az AB oldal felezőpontja. A súlypont a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadoló pontja. Így a P pontból az S súlypontot F középpontú, $1/3$ arányú középpontos hasonlósággal kaphatjuk meg. A P pont befutja a k kört, ezért a súlypont mértani helye a k kör kicsinyített képe. A ponthalmazhoz az AB oldalon lévő X és Y pontok nem tartoznak hozzá, mert valódi háromszög esetében az A és B pontokba nem kerülhet a P pont.

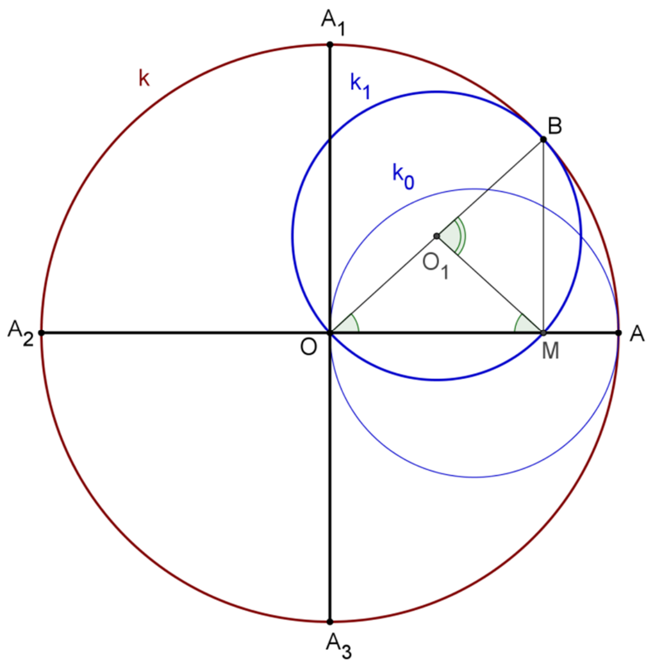
(ábra a következő oldalon)



23. Egy kör gördül egy kétszer akkora sugarú körön, ennek belsejében. Milyen pályát ír le a gördülő kör kerületének valamely pontja?

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1926. évi 3. feladata

Megoldás:



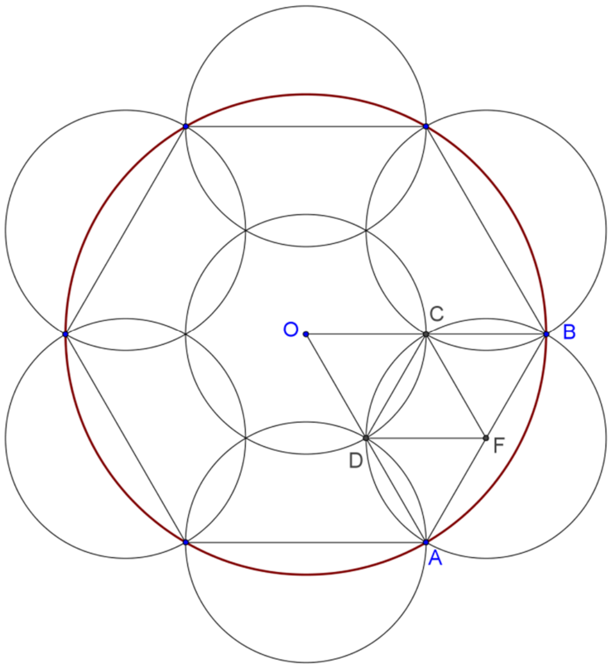
Legyen a kis kör kiinduló helyzete a k_0. Figyeljük az A pont mozgását. Legyen a kis kör egy következő helyzete k_1. A kis kör az AB íven gurult végig. Ehhez a k körben az AOB középponti szög tartozik. A kis kör sugara fele akkora, ezért ekkora ívhez kétszer akkora középponti szög tartozik a k_1 körben. Az OA szakasz a k_1 kört az M pontban metszi. Az O_1OM háromszög két oldala a k_1 kör sugara, ezért egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei egyenlőek. A háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével, így $BO_1M\measuredangle = 2 \cdot BOA\measuredangle$. Ez azt jelenti, hogy a BM ív egyenlő az AB ívvel. Tehát az A pont a forgatás közben az M pontba került.

Thalész tétele miatt $BMO\measuredangle = 90°$, azaz a B pont OA-ra bocsátott merőleges vetülete lesz a kiválasztott kerületi pont helye az elforgatás után. Amíg a kis kör az AA_1 ívet futja be, a kerületi pont az OA sugarat rajzolja ki. Ha a kör tovább gördül, akkor az OA_1, OA_2, OA_3 szakaszokat írja le. Megmutatható, hogy ezeknek a szakaszoknak minden pontjába eljut a gördülés során az A pont.

24. Egy körlapot feleakkora átmérőjű körlappal akarunk befedni. Hogyan tehetjük ezt meg a legkevesebb számú körlappal?

A később Kürschák Józsefről elnevezett verseny 1947. évi 3.feladata

Megoldás:



Az ábra szerint a körbe szerkesszünk egy szabályos hatszöget. A kör középpontja körül és a hatszög oldalfelező pontjai körül feleakkora sugarú köröket rajzolunk. Az OAB szabályos háromszöget a középvonalaival négy kisebb háromszögre felbontva látható, hogy valamelyik kis kör fedi ezeket a háromszögeket, az OAB körcikkből maradó körszelet is benne van egy-egy körlapban. Így 7 feleakkora sugarú körlappal lefedhető a körlap.

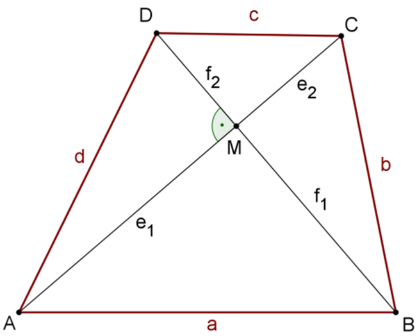
Bebizonyítjuk, hogy 7-nél kevesebb kör nem elég. Egy feleakkora sugarú kör a nagy kör kerületének legfeljebb az egy hatodát tudja lefedni, ezért a körvonal lefedéséhez kell 6 körlap. Ez is csak akkor elég, ha a fenti módon helyezzük el a köröket. Ekkor a nagy kör középpontja még kimarad, aminek a lefedéséhez kell még egy hetedik körlap

25. Igazoljuk, hogy ha egy trapéz átlói merőlegesek, akkor szárainak szorzata legalább akkora, mint a párhuzamos oldalak szorzata.

A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 1996.évi 1. feladata

Megoldás:

Az ábra jelöléseit használva azt kell bizonyítanunk, hogy $bd \geq ac$. Az átlók derékszöget zárnak be, ezért a Pitagorasz-tétel alkalmazásával a szakaszok négyzetét ki tudjuk fejezni. A feladat állításához elég lenne a $b^2d^2 \geq a^2c^2$ összefüggést bizonyítani.



Pitagorasz-tétel alapján:

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2$$

$$b^2 = e_2^2 + f_1^2$$

$$c^2 = e_2^2 + f_2^2$$

$$d^2 = e_1^2 + f_2^2\,.$$

A bizonyítandó állítást ebből kifejezve:

$$(e_2^2 + f_1^2) \cdot (e_1^2 + f_2^2) \geq (e_1^2 + f_1^2) \cdot (e_2^2 + f_2^2),$$

átrendezve:

$$e_1^2 f_1^2 - e_2^2 f_1^2 - e_1^2 f_2^2 + e_2^2 f_2^2 = (e_1^2 - e_2^2) \cdot (f_1^2 - f_2^2) \geq 0. \qquad (*)$$

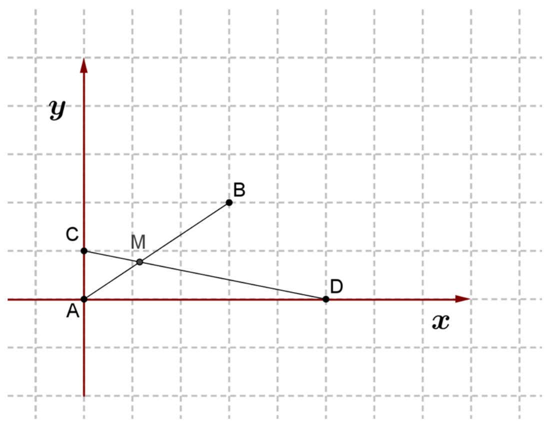
Az AMB és CMD háromszögek hasonlóak, mert két szögük egyenlő (váltószögek), ezért a megfelelő oldalak aránya megegyezik. Így

$$e_1 \geq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \geq f_2 \qquad \text{vagy} \qquad e_1 \leq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \leq f_2\,.$$

Tehát a $(*)$ egyenlőtlenség teljesül. A lépéseink megfordíthatóak voltak, tehát a bizonyítandó állításunk igaz.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha az átlók felezik egymást. A feladat feltétele szerint az átlók merőlegesek is egymásra, így rombusz esetében áll fenn az egyenlőség.

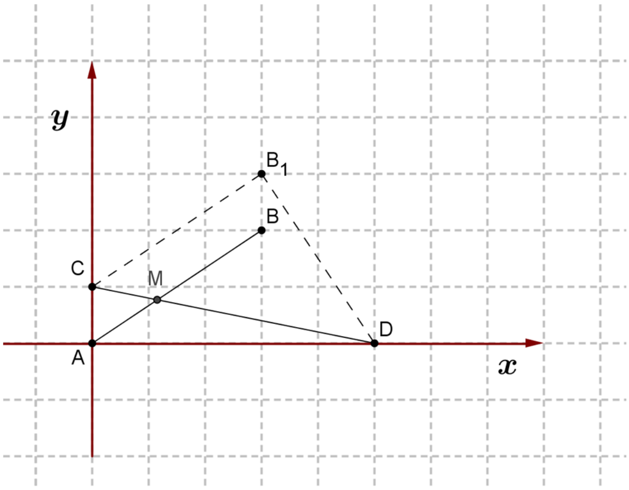
26. Adott a koordináta-rendszerben négy pont: $A(0;0), B(3;2), C(0;1), D(5;0)$. Az AB és CD szakaszok metszéspontja M (lásd ábra). Hány fok a DMA szög nagysága?



(A) 100 (B) 120 (C) 135 (D) 145 (E) 150

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2009; 11. osztály, megyei forduló

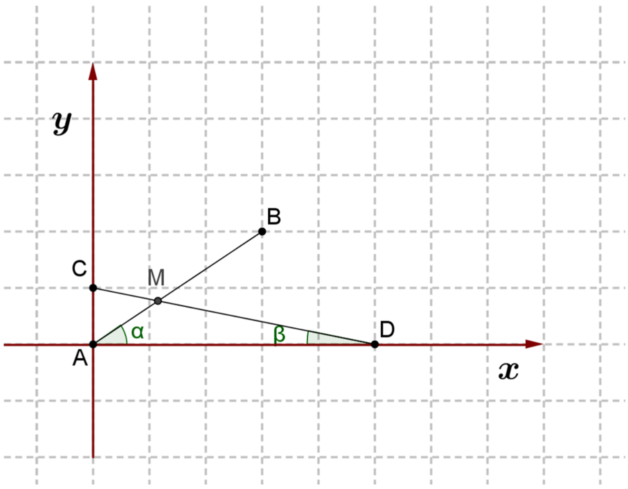
I. Megoldás:



Az AB szakaszt eltoljuk az $\overrightarrow{AC}$ vektorral, ekkor a CB_1 szakaszt kapjuk.

$\overrightarrow{\mathrm{CB_1}} = (3;2)$, $\overrightarrow{\mathrm{B_1D}} = (2;-3)$, ezért a $\overrightarrow{\mathrm{CB_1}}$ vektor $-90°$-os elforgatottja a $\overrightarrow{\mathrm{B_1D}}$ vektor, tehát $\mathrm{CB_1} = \mathrm{B_1D}$ és a két szakasz $90°$-ot zár be. Ebből következik, hogy a CB_1D háromszög egyenlő szárú, derékszögű. Így $B_1CD\sphericalangle = BMD\sphericalangle = 45°$, tehát $DMA\sphericalangle = 135°$. A jó válasz a (C).

II. Megoldás:



Az ábra jelölései szerint:

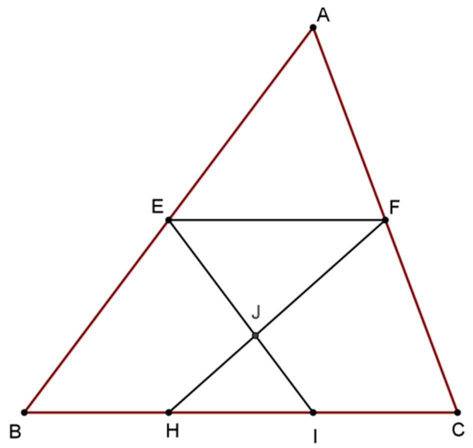
$$tg(\alpha) = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad tg(\beta) = \frac{1}{5}.$$

Ekkor

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha+\beta = 45°.$$

Az AMD háromszögben a harmadik szög $DMA\sphericalangle = 135°$. A jó válasz (C).

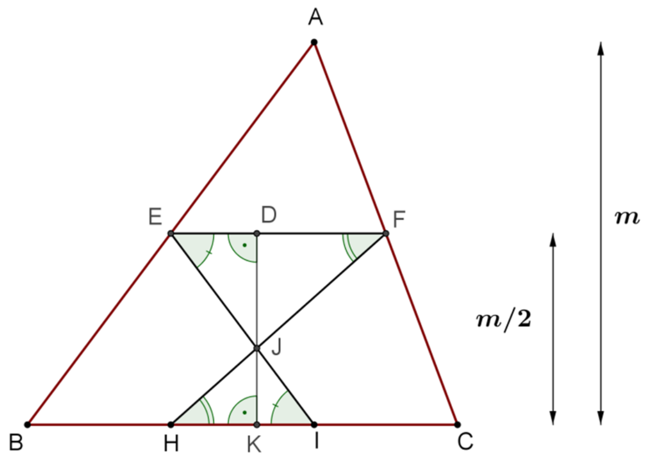
27. Az ABC háromszögben E, illetve F az AB illetve AC oldal felezőpontja, H és I a BC oldal két harmadolópontja. Ha az ABC háromszög területe $120\ \text{cm}^2$, akkor hány cm^2 az EFJ háromszög területe?



(A) 9 (B) 18 (C) 24 (D) 30 (E) 40

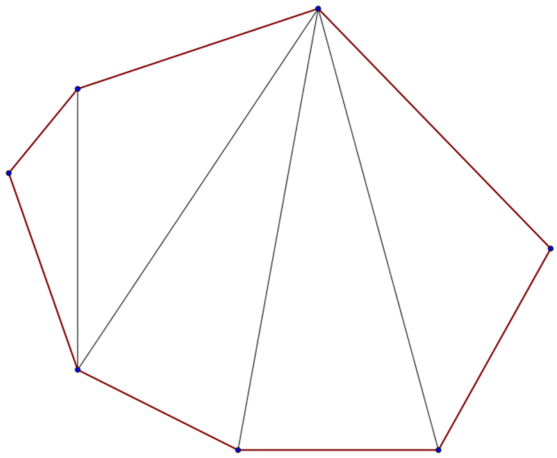
Gordiusz Matematika Tesztverseny 2004; 12. osztály, megyei forduló

Megoldás:



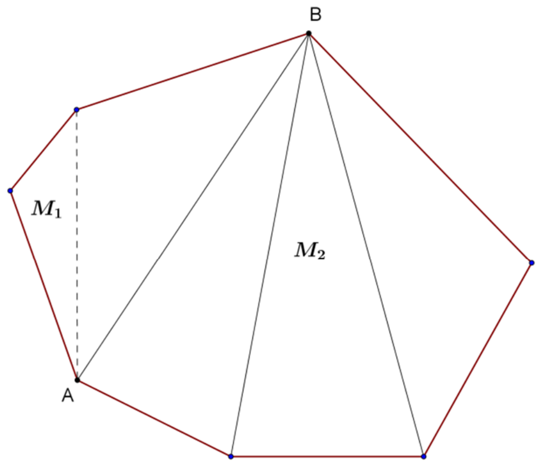
EF a háromszög középvonala, ezért EF párhuzamos BC-vel és $EF = \frac{1}{2}\,BC$. H és I a feladat szerint harmadolópontok, ezért $HI = \frac{1}{3}\,BC$. A párhuzamosság miatt az ábrán azonosan jelölt szögek váltószögek, ezért egyenlőek. $EFJ\Delta \cong IHJ\Delta$, mert két szögük egyenlő. A hasonlóság aránya $\frac{EF}{HI} = \frac{3}{2}$. Ha a háromszög BC oldalához tartozó magassága m, akkor $DK = \frac{m}{2}$, amit a J pont $3:2$ arányban oszt, tehát $DJ = \frac{3}{10}m$. Az $EFJ\Delta$ EF oldala a BC oldal fele, a hozzá tartozó magasság az m-nek a $\frac{3}{10}$-e, ezért $T_{EFJ} = \frac{3}{20}T_{ABC} = 18\ cm^2$. A jó válasz (B).

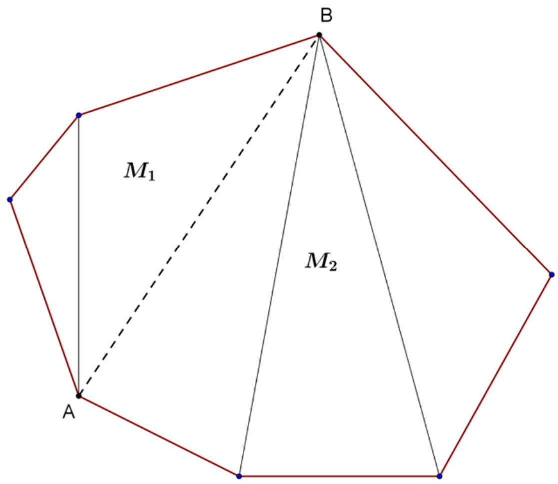
28. Egy sokszöget egymást nem metsző átlói háromszögekre bontják (lásd például az alábbi ábrát). Bizonyítsuk be, hogy a sokszögnek van legalább két olyan csúcsa, amelyből nem indul ki átló.



D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: Geometria I. 14.feladat

Megoldás:





Teljes indukcióval azt fogjuk bizonyítani, hogy ha egy sokszöget egymást nem metsző átlóival háromszögekre bontjuk, akkor a sokszögben van két olyan **nem szomszédos** (ezzel többet mondunk a feladat állításánál) csúcs, amelyekből nem indul ki átló.

Négyszögre nyilvánvalóan igaz az állítás.

Feltételezzük, hogy már minden $k < n$ oldalú sokszögre ($n \geq 5$) bizonyítottuk az állítást.

Legyen AB az egyik a felosztásban szereplő átló. Ez az eredeti sokszöget két n-nél kisebb oldalszámú M_1 és M_2 sokszögre bontja.

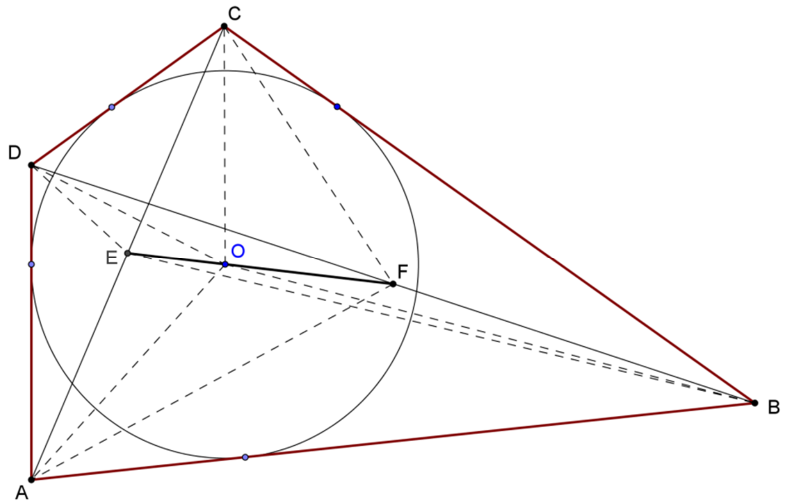
Lehetséges, hogy az egyik sokszög egy háromszög (M_1), a másik pedig egy legalább négyoldalú sokszög (M_2). Ekkor M_2-ben az indukciós feltétel miatt van két megfelelő csúcs, amelyek nem lehetnek az A és B csúcsok, mert akkor M_2-ben ezek szomszédosak lennének. Az említett két csúcs az n oldalú sokszögben teljesíti a feladat feltételeit.

Ha a felosztás után mindkét rész (M_1 és M_2) is legalább négyoldalú, akkor mindkét részre alkalmazhatjuk az indukciós feltételt. Az A és B csúcsok nem lehetnek a keresett csúcsok, mert halad át rajtuk átló. Az M_1 és M_2 sokszögben nem lehet a két említett tulajdonságú csúcs A és B, mert ezek szomszédosak lennének. Így mindkét sokszögben van A-tól és B-től különböző megfelelő csúcs, amelyek nem szomszédosak. Ezzel teljes indukciót alkalmazva beláttuk a feladat állítását.

29. Bizonyítsuk be, hogy az érintőnégyszög beírt körének középpontja rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen. (***Newton tétele***)

D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: Geometria I. 135/a.feladat

Megoldás:



Ha a négyszög szemben lévő oldalai párhuzamosak, azaz a négyszög rombusz, akkor a 3 pont azonos, így a feladat állítása igaz.

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor a négyszögnek legalább az egyik szemben lévő oldalpárja nem párhuzamos. Legyenek ezek az oldalak AB és CD. A háromszög súlyvonala felezi a háromszög területét, ezért:

$$T_{AED} + T_{BEC} = \frac{1}{2}T_{ACD} + \frac{1}{2}T_{ABC} = \frac{1}{2}T_{ABCD}\,, \qquad (1)$$

és hasonlóan

$$T_{AFD} + T_{BFC} = \frac{1}{2}T_{ABCD}\,. \qquad (2)$$

Az érintőnégyszög területét felírjuk a beírt kör r sugarával és az oldalakkal, majd felhasználjuk, hogy a szemben lévő oldalak összege egyenlő:

$$T_{ABCD} = \frac{1}{2}r \cdot (AB + BC + CD + AD) = \frac{1}{2}r \cdot 2 \cdot (AD + BC) = r \cdot (AD + BC)\,.$$

Felírjuk az alábbi összefüggést is:

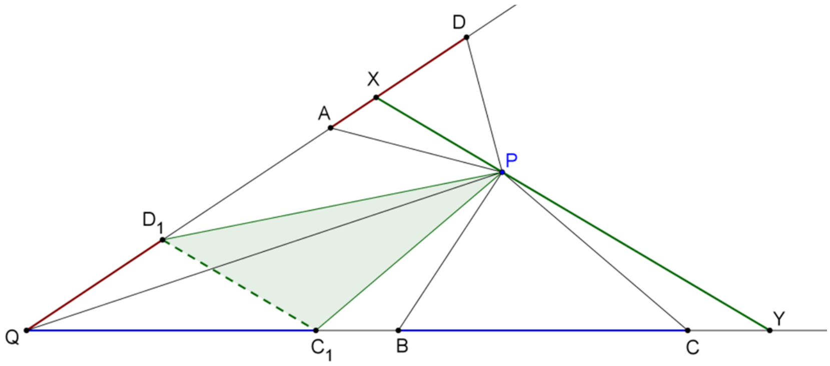
$$T_{AOD} + T_{BOC} = \frac{1}{2}r \cdot AD + \frac{1}{2}r \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2}T_{ABCD}\,. \qquad (3)$$

Tehát

$$T_{AED} + T_{BEC} = T_{AFD} + T_{BFC} = T_{AOD} + T_{BOC}.$$

Az a sejtésünk, hogy azok a P pontok, amelyekre $T_{APD} + T_{BPC}=$ állandó, egy egyenesen helyezkednek el.

Az AD és BC egyenesek nem párhuzamosak, metszéspontjukat Q-val jelöljük. Az AD és BC



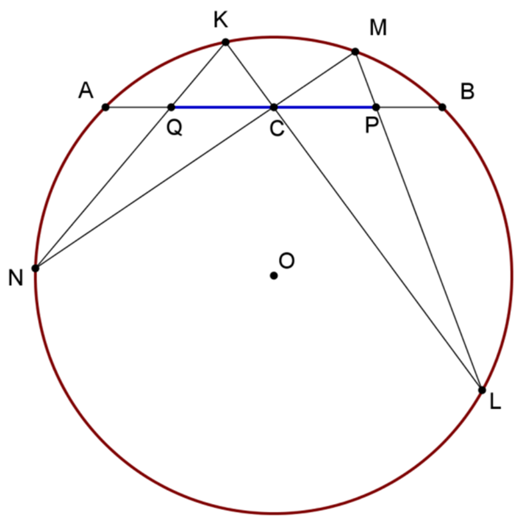
szakaszokat eltoljuk az ábra szerint a szög csúcsába. Ha két háromszög egyik oldala és a hozzátartozó magassága azonos, akkor a területük is egyenlő. Ezért

$$T_{APD} + T_{BPC} = T_{QC_1PD_1}\ .$$

Ha változtatjuk a megfelelő P pont helyét, akkor a QC_1D_1 háromszög változatlan. Ehhez hozzá kell vennünk (az állandó értékétől függően esetleg le kell vonnunk) egy háromszög területét, amelynek egy oldala, a C_1D_1 oldal változatlan. Így a P pont mindig ugyanolyan távolságra van a C_1D_1 szakasztól, tehát a C_1D_1-gyel párhuzamos XY szakaszon lesz a P pont.

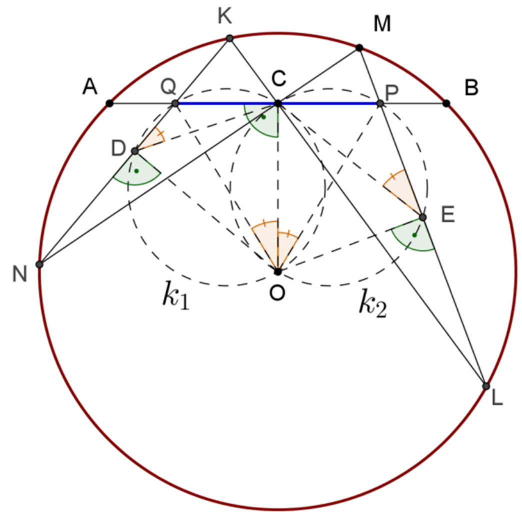
Ezzel beláttuk a sejtésünket, amiből következik, hogy a feladatban szereplő E, F, O pontok egy egyenesen vannak.

30. A kör tetszőleges AB húrjának C felezőpontján át KL és MN húrokat fektetünk (K és M az AB húr azonos partján van); KN és ML az AB húrt a Q illetve P pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CP = CQ$. (***pillangó-tétel***)



D.O.Skljarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom: Geometria I. 122.feladat

Megoldás:



O-val jelöljük a kör középpontját. C az AB húr felezőpontja, ezért $QCP\measuredangle = 90°$. Bocsássunk merőlegest a kör középpontjából a KN és az ML húrra, a merőlegesek talppontja D illetve E. Ezek a pontok egyben a megfelelő húrok felezőpontjai is.

$$NKL\measuredangle = NML\measuredangle \quad \text{és} \quad KNM\measuredangle = KLM\measuredangle,$$

mert azonos íven nyugvó kerületi szögek. Az NKC és LMC háromszögeknek két szöge egyenlő, ezért hasonlóak. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{KN}{ML} = \frac{KC}{MC} \ .$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{KD}{ME} = \frac{KC}{MC} \ .$$

Így a KDC és MEC háromszögek is hasonlók, hiszen két-két oldaluk aránya és a közbezárt szög egyenlő. Hasonló háromszögekben a megfelelő szögek egyenlőek, tehát

$$KDC\measuredangle = MEC\measuredangle \quad \Longrightarrow \quad QDC\measuredangle = PEC\measuredangle\,. \qquad (1)$$

A $QDOC$ és $COEP$ négyszögekben két szemben lévő szög derékszög, így a Thalész-tétel miatt kört írhatunk köréjük. Az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlőek:

$$QDC\measuredangle = QOC\measuredangle \quad \text{és} \quad PEC\measuredangle = POC\measuredangle.$$

(1) miatt

$$QOC\measuredangle = POC\measuredangle.$$

Ebből következik, hogy $QC = CP$. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.