2. Egyenletek

I. Feladatok

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket, egyenletrendszereket a valós számok halmazán.

a) $x^2 + y^2 + 2 = 2x + 2y$

b) $8\left(x^4 + y^4\right) - 4\left(x^2 + y^2\right) + 1 = 0$

Kalmár László Matematika Verseny döntője, 1992., 8. osztály

c) $\left(2x^2 - x - 3\right)^4 + \left(2x^2 - x - 3\right)^2 \cdot \left(2x^2 + x - 6\right)^2 + \left(2x^2 + x - 6\right)^4 = 0$

OKTV II. kategória, 1. forduló, 2011/2012

d) $\left.\begin{array}{r} x^2 + 10y + 41 = 0 \\ y^2 - 2z - 23 = 0 \\ z^2 - 6x + 17 = 0 \end{array}\right\}$

Tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikai versenye, 1992

e) $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$

OKTV I. kategória, 2. forduló, 2012/2013

f) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 4\sqrt{3x-2} + 6 = y \\ y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 6 = x \end{array}\right\}$

KöMaL, 2006. december, B.3954.

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $(3x+5)^2 + (x+6)^3 = 4x^2 + 1$

b) $\left(x^2 - x - 1\right)^2 - x^3 = 5$

c) $x^2(x-1)^2 + (x-2)^3 = 76$

d) $(x-5)^2 + (x-4)^3 + (x-3)^4 = 2$

e) $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$

OKTV I. kategória, 1. forduló, 2011/2012

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9$

b) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$

c) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

d) $x^6 - 2x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 2x - 1 = 0$

e) $x^8 - 7x^7 + 4x^6 - 21x^5 + 6x^4 - 21x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0$

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve egyenletrendszert a valós számok halmazán.

a) $\frac{x+6}{2010}+\frac{x+5}{2011}+\frac{x+4}{2012}=\frac{x+3}{2013}+\frac{x+2}{2014}+\frac{x+1}{2015}$

b) $\frac{x-1999}{2}+\frac{x-1998}{3}+\frac{x-1997}{4}=\frac{x-2}{1999}+\frac{x-3}{1998}+\frac{x-4}{1997}$

Kalmár László Matematika Verseny megyei fordulója, 2001., 8. osztály

c) $\frac{x-49}{2}+\frac{x-46}{5}+\frac{x-31}{20}=\frac{x-48}{3}+\frac{x-47}{4}+\frac{x-45}{6}$

KöMaL, 1990. május, Gy.2630.

d) $\sqrt{\frac{x-1991}{10}}+\sqrt{\frac{x-1990}{11}}=\sqrt{\frac{x-10}{1991}}+\sqrt{\frac{x-11}{1990}}$

KöMaL, 1990. március, Gy.2614.

e) $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$

KöMaL, 1986. január, Gy.2310.

5. Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

a) $\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(y^2-6y+11\right)=6$

b) $5^x-3^x=16$

c) $\left.\begin{aligned} x+\sqrt[6]{x} &= y+\sqrt[6]{y} \\ x^2+xy+y^2 &= 27 \end{aligned}\right\}$

6. Bizonyítsa be, hogy az $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ egyenletnek bármely valós *a, b, c* értékek esetén van valós gyöke.

KöMaL, 1987. március, C.98.

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán.

a) $\left.\begin{aligned} x+y+xy &= 7 \\ x^2+xy+y^2 &= 13 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ xy+yz+zx &= 1 \\ xyz &= -6 \end{aligned}\right\}$

8. **a)** Mutassa meg, ha $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor az a,b,c számok mindegyike pozitív.

b) Mutassa meg, ha $ab+bc+ca>0$ és $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0$, akkor az a,b,c számok azonos előjelűek.

c) Az x^3+px^2+qx+r polinom mindhárom zérushelye 0 és 2 között van. Bizonyítsa be, hogy $-2<p+q+r<0$.

9. Oldja meg az egyenleteket a valós számok körében.

a) $|x-1|\cdot|x+2|=|x+1|\cdot|x-2|$

b) $|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|=|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|$

10. Egy tízes számrendszerben felírt négyjegyű számból kivonjuk azt a háromjegyű, majd kétjegyű, végül egyjegyű számot, amelyet az eredeti szám utolsó, utolsó kettő, végül utolsó három számjegyének elhagyásával kapunk. Az eredmény: 2014. Mi volt az eredeti négyjegyű szám?

11. Négy különböző számjegy alkalmas sorrendjével elkészítettük a lehetséges legnagyobb és legkisebb négyjegyű számot. A két szám összege **a)** 10560; **b)** 10477.
Mik lehetnek ezek a számok?

12. Anna meglátogatja a hegy túloldalán lakó barátnőjét, Hannát. Az út felfele emelkedő szakaszán 2 km/h sebességgel, a vízszintes szakaszon 3 km/h, a lejtős szakaszon 6 km/h sebességgel halad. Oda-vissza az út 6 óráig tartott. Annától hány km távolságra lakik Hanna?

13. Oldja meg az $\left(x^2+2x-1\right)^2+2x^2+3x=3$ egyenletet a valós számok halmazán.

14. Mekkora b értéke, ha az $x^4-8x^3-8x^2+96x+b=0$ egyenletnek három valós gyöke van?

II. Megoldások

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket, egyenletrendszereket a valós számok halmazán.

a) $x^2+y^2+2=2x+2y$

b) $8\left(x^4+y^4\right)-4\left(x^2+y^2\right)+1=0$

Kalmár László Matematika Verseny döntője, 1992., 8. osztály

c) $\left(2x^2-x-3\right)^4+\left(2x^2-x-3\right)^2\cdot\left(2x^2+x-6\right)^2+\left(2x^2+x-6\right)^4=0$

OKTV II. kategória, 1. forduló, 2011/2012

d) $\left.\begin{array}{l} x^2+10y+41=0 \\ y^2-2z-23=0 \\ z^2-6x+17=0 \end{array}\right\}$

Tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikai versenye, 1992

e) $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$

OKTV I. kategória, 2. forduló, 2012/2013

f) $\left.\begin{array}{l} x^2-4\sqrt{3x-2}+6=y \\ y^2-4\sqrt{3y-2}+6=x \end{array}\right\}$

KöMaL, 2006. december, B.3954.

Megoldás: Azt használjuk, ha egy négyzetösszeg értéke (illetve páros kitevőjű hatványok összege) nulla, akkor mindegyik összeadandó értéke nulla.

a) $x^2+y^2+2=2x+2y$,

$\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=0$,

$(x-1)^2+(y-1)^2=0$.

A négyzetösszeg csak úgy lehet nulla, ha $x=1$, $y=1$.

b) $8\left(x^4+y^4\right)-4\left(x^2+y^2\right)+1=0$,

$16\left(x^4+y^4\right)-8\left(x^2+y^2\right)+2=0$,

$\left(16x^4-8x^2+1\right)+\left(16y^4-8y^2+1\right)=0$,

$\left(4x^2-1\right)^2+\left(4y^2-1\right)^2=0$.

Ez az összeg pontosan akkor nulla, ha $4x^2-1=0$ és $4y^2-1=0$, azaz $x=\pm\dfrac{1}{2}$, $y=\pm\dfrac{1}{2}$.

c) $\left(2x^2-x-3\right)^4+\left(2x^2-x-3\right)^2\cdot\left(2x^2+x-6\right)^2+\left(2x^2+x-6\right)^4=0$ egyenlet bal oldalán álló összeg minden tagja páros hatványon van, tehát nem negatív. Így a bal oldal értéke pontosan akkor 0, ha minden tagja 0.

$2x^2-x-3=0$, azaz $(2x-3)(x+1)=0$, ha $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=-1$.

$2x^2+x-6=0$, azaz $(2x-3)(x+2)=0$, ha $x_3=\dfrac{3}{2}$, $x_4=-2$.

A tagok mindegyike csak $x=\dfrac{3}{2}$ esetén lesz nulla, ez az egyenlet egyetlen megoldása.

d) Adjuk össze a három egyenletet, ekkor ezt kapjuk: $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=0$. Ez nyilván csak $x=3$, $y=-5$, $z=1$ esetén teljesül.

A kapott gyökök megoldásai az egyenletrendszernek is, és ezeken kívül más megoldása nem lehet az egyenletrendszernek.

e) $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$ egyenletet írjuk könnyebben kezelhető alakba, az $a=\sqrt{x-2}$, $b=\sqrt{y-1}$ helyettesítésekkel: $\dfrac{36}{a}+\dfrac{4}{b}=28-4a-b$.

$$\frac{36}{a}+4a+\frac{4}{b}+b=28,$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(2\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2=28,$$

$$\left[\left(\frac{6}{\sqrt{a}}\right)^2-24+\left(2\sqrt{a}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2-4+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]=0,$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{a}}-2\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)^2=0.$$

Így $\left(\dfrac{6}{\sqrt[4]{x-2}}-2\sqrt[4]{x-2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt[4]{y-1}}-\sqrt[4]{y-1}\right)^2=0$, azaz $\dfrac{6}{\sqrt[4]{x-2}}=2\sqrt[4]{x-2}$ és $\dfrac{2}{\sqrt[4]{y-1}}=\sqrt[4]{y-1}$; $\sqrt{x-2}=3$, $x=11$ és $\sqrt{y-1}=2$, $y=5$.

f) Adjuk össze a két egyenletet és rendezzük nullára:
$x^2+y^2-4\sqrt{3x-2}-4\sqrt{3y-2}+12-x-y=0$.
Alakítsuk a bal oldalt teljes négyzetek összegévé:
$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-4y+4\right)+\left((3x-2)-4\sqrt{3x-2}+4\right)+\left((3y-2)-4\sqrt{3y-2}+4\right)=0,$$
$$(x-2)^2+(y-2)^2+\left(2-\sqrt{3x-2}\right)^2+\left(2-\sqrt{3y-2}\right)^2=0.$$
Ez csak akkor teljesülhet, ha minden tag nulla, amiből egyetlen megoldás adódik: az $x=2$ és $y=2$.

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $(3x+5)^2+(x+6)^3=4x^2+1$

b) $\left(x^2-x-1\right)^2-x^3=5$

c) $x^2(x-1)^2+(x-2)^3=76$

d) $(x-5)^2+(x-4)^3+(x-3)^4=2$

e) $(x-3)^4+(x-5)^4=82$

OKTV I. kategória, 1. forduló, 2011/2012

Megoldás: Az alábbi megoldásokban azt használjuk, hogy egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Az egyenleteket úgy rendezzük, hogy az egyik oldalon nulla álljon, és a másik oldalt azonosságok segítségével szorzattá alakítjuk, az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonossággal, illetve az $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosságokkal. (Egy alkalommal az a^4-b^4 kifejezést alakítjuk szorzattá.)

a) $(3x+5)^2+(x+6)^3=4x^2+1$,

$\left((3x+5)^2-4x^2\right)+\left((x+6)^3-1\right)=0$,

$\left((3x+5)^2-(2x)^2\right)+\left((x+6)^3-1^3\right)=0$,

$(x+5)(5x+5)+(x+5)(x^2+13x+43)=0$,

$(x+5)(x^2+18x+48)=0$.

A szorzat valamelyik tényezője akkor nulla, ha $x_1=-5$, $x_2=-9-\sqrt{33}$, $x_3=-9+\sqrt{33}$.

b) $(x^2-x-1)^2-x^3=5$,

$\left((x^2-x-1)^2-4\right)-(x^3+1)=0$,

$\left((x^2-x-1)^2-2^2\right)-(x^3+1^3)=0$,

$(x^2-x+1)(x^2-x-3)-(x+1)(x^2-x+1)=0$,

$(x^2-x+1)(x^2-2x-4)=0$.

Az első tényező sohasem lehet nulla, a második tényező akkor nulla, ha $x_1=1-\sqrt{5}$, $x_2=1+\sqrt{5}$, ezek az egyenlet megoldásai.

c) $x^2(x-1)^2+(x-2)^3=76$,

$\left(x^2(x-1)^2-49\right)+\left((x-2)^3-27\right)=0$,

$\left([x(x-1)]^2-7^2\right)+\left((x-2)^3-3^3\right)=0$,

$(x(x-1)-7)(x(x-1)+7)+((x-2)-3)\left((x-2)^2+3(x-2)+9\right)=0$,

$(x^2-x-7)(x^2-x+7)+(x-5)(x^2-x+7)=0$,

$(x^2-x+7)(x^2-12)=0$.

Az első tényező sohasem lehet nulla, a második tényező akkor nulla, ha $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=-2\sqrt{3}$, ezek az egyenlet megoldásai.

d) $(x-5)^2+(x-4)^3+(x-3)^4=2$,

$\left[(x-5)^2-1\right]+(x-4)^3+\left[(x-3)^4-1\right]=0$,

$\left[(x-5)^2-1^2\right]+(x-4)^3+\left[(x-3)^4-1^4\right]=0$,

$$(x-4)(x-6)+(x-4)(x^2-8x+16)+((x-3)^2-1)((x-3)^2+1)=0,$$
$$(x-4)(x-6)+(x-4)(x^2-8x+16)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0,$$
$$(x-4)(x^2-7x+10)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0,$$
$$(x-4)(x-2)(x-5)+(x-4)(x-2)(x^2-6x+10)=0,$$
$$(x-4)(x-2)(x^2-5x+5)=0.$$

A szorzat valamelyik tényezője akkor nulla, ha $x_1=4$, $x_2=2$, $x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

e) $(x-3)^4+(x-5)^4=82$,
$$((x-3)^4-81)+((x-5)^4-1)=0,$$
$$((x-3)^4-9^2)+((x-5)^4-1^2)=0,$$
$$((x-3)^2-9)((x-3)^2+9)+((x-5)^2-1)((x-5)^2+1)=0,$$
$$(x^2-6x)(x^2-6x+18)+(x^2-10x+24)(x^2-10x+26)=0,$$
$$x(x-6)(x^2-6x+18)+(x-4)(x-6)(x^2-10x+26)=0,$$
$$(x-6)[x(x^2-6x+18)+(x-4)(x^2-10x+26)]=0,$$
$$(x-6)[2x^3-20x^2+84x-104]=0.$$

$x=6$ megoldás. A további megoldásokat a $2(x^3-10x^2+42x-52)=0$ egyenlet megoldása adja. Ha az egyenletnek van egész megoldása, akkor az a konstans tagnak, az 52-nek osztója. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $x=2$ megoldás (a próbálkozást a kis abszolutértékű számokkal: 1, -1, 2, -2, … érdemes kezdeni). Mivel $x=2$ megoldás, így az $(x-2)$ gyöktényező kiemelhető. Ezt végezzük el ügyes csoportosításokkal. A legnagyobb kitevőjű tag mellé olyan kifejezést választunk, amiből az $(x-2)$ tényező kiemelhető, és hozzáadunk/elveszünk annyit, hogy maga a polinom ne változzon:
$$x^3-2x^2-8x^2+16x+26x-52=0,$$
$$x^2(x-2)-8x(x-2)+26(x-2)=0,$$
$$(x-2)(x^2-8x+26).$$

Az $x^2-8x+26=0$ másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, így az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=2$ és $x_2=6$.

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$

b) $x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0$

c) $x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$

d) $x^6-2x^5-6x^4+4x^3+6x^2-2x-1=0$

e) $x^8-7x^7+4x^6-21x^5+6x^4-21x^3+4x^2-7x+1=0$

Megoldás: a) Legyen $x+\frac{1}{x}=y$. Ekkor $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, azaz $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Az egyenlet ezzel a helyettesítéssel a $2\left(y^2-2\right)-7y+9=0$, azaz a $2y^2-7y+5=0$ alakot ölti. Ennek gyökei $y_1=\frac{5}{2}$ és $y_2=1$. Az $x+\frac{1}{x}=1$ egyenletnek nincs valós gyöke, az $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ egyenlet gyökei $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Megjegyzés: Ha az $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ egyenletet x^2-tel szorozzuk, akkor egy az együtthatóiban szimmetrikus egyenlethez, a $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$ egyenlethez jutunk. A következő egyenleteknél megfigyelhetjük az együtthatók szimmetriáját. Ilyen esetekben segíthet az $y=x+\frac{1}{x}$, vagy $y=x-\frac{1}{x}$ helyettesítés.

b) Az $x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0$ egyenletnek $x=0$ nem megoldása, így nem veszítünk gyököt, ha osztunk x^2-nel: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$.

Legyen $x+\frac{1}{x}=y$. Ekkor $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

Ezzel a helyettesítéssel az $\left(y^2-2\right)-8y+17=0$, azaz az $y^2-8y+15=0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $y_1=3$ és $y_2=5$. Az $x+\frac{1}{x}=3$ és az $x+\frac{1}{x}=5$ egyenletek gyökei $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

c) Az $x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ egyenletnek $x=0$ nem megoldása, így nem veszítünk gyököt, ha osztunk x^3-nel: $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$.

Legyen $x+\frac{1}{x}=y$. Ekkor $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y$. Ezzel a helyettesítéssel az $\left(y^3-3y\right)-3\left(y^2-2\right)+2y-3=0$, $y^3-3y^2-y+3=0$ egyenlethez jutunk. $y^3-3y^2-y+3=y^3-y-3y^2+3=y\left(y^2-1\right)-3\left(y^2-1\right)=\left(y^2-1\right)\left(y-3\right)=0$. Az egyenlet gyökei $y_{1,2}=\pm1$ és $y_3=3$.

Az $x+\frac{1}{x}=1$, $x+\frac{1}{x}=-1$ egyenleteknek nincs valós gyöke, az $x+\frac{1}{x}=3$ egyenlet gyökei $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ezek az eredeti egyenlet megoldásai.

d) Az $x^6-2x^5-6x^4+4x^3+6x^2-2x-1=0$ egyenletnek $x=0$ nem megoldása, így nem veszítünk gyököt, ha osztunk x^3-nel: $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=0$. Itt az előbbi egyenletekhez képest érdekesebb kifejezéseket látunk a zárójelekben.

Legyen $x-\frac{1}{x}=y$. Ekkor $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)$. Így $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$, $x^3-\frac{1}{x^3}=y^3+3y$, és az egyenlet az $\left(y^3+3y\right)-2\left(y^2+2\right)-6y+4=0$, azaz az $y^3-2y^2-3y=0$ alakot ölti. Ennek gyökei $y_1=0$, $y_2=3$ és $y_3=-1$.

Tekintettel az $y=x-\frac{1}{x}$ összefüggésre, az eredeti egyenlet megoldásai: $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, $x_{5,6}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

e) Az $x^8-7x^7+4x^6-21x^5+6x^4-21x^3+4x^2-7x+1=0$ egyenletnek $x=0$ nem megoldása, így nem veszítünk gyököt, ha osztunk x^4-nel:

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-7\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0.$$

Legyen $x+\frac{1}{x}=y$. Ekkor $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^4+\frac{1}{x^4}+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6.$$

Így $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$, $x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4\left(y^2-2\right)-6=y^4-4y^2+2$.

Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet az $\left(y^4-4y^2+2\right)-7\left(y^3-3y\right)+4\left(y^2-2\right)-21y+6=0$, azaz az $y^4-7y^3=0$ alakot ölti. Ennek megoldásai $y_1=0$ és $y_2=7$. Az $y=x+\frac{1}{x}$ összefüggés alapján $y_1=0$ esetén nincs valós gyök, $y_2=7$ estén $x_1=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve egyenletrendszert a valós számok halmazán.

a) $\frac{x+6}{2010}+\frac{x+5}{2011}+\frac{x+4}{2012}=\frac{x+3}{2013}+\frac{x+2}{2014}+\frac{x+1}{2015}$

b) $\frac{x-1999}{2}+\frac{x-1998}{3}+\frac{x-1997}{4}=\frac{x-2}{1999}+\frac{x-3}{1998}+\frac{x-4}{1997}$

Kalmár László Matematika Verseny megyei fordulója, 2001., 8. osztály

c) $\dfrac{x-49}{2}+\dfrac{x-46}{5}+\dfrac{x-31}{20}=\dfrac{x-48}{3}+\dfrac{x-47}{4}+\dfrac{x-45}{6}$

KöMaL, 1990. május, Gy.2630.

d) $\sqrt{\dfrac{x-1991}{10}}+\sqrt{\dfrac{x-1990}{11}}=\sqrt{\dfrac{x-10}{1991}}+\sqrt{\dfrac{x-11}{1990}}$

KöMaL, 1990. március, Gy.2614.

e) $\dfrac{x-49}{50}+\dfrac{x-50}{49}=\dfrac{49}{x-50}+\dfrac{50}{x-49}$

KöMaL, 1986. január, Gy.2310.

Megoldás: a) $\dfrac{x+6}{2010}+\dfrac{x+5}{2011}+\dfrac{x+4}{2012}=\dfrac{x+3}{2013}+\dfrac{x+2}{2014}+\dfrac{x+1}{2015}$. Adjunk az egyenletben szereplő mindegyik törthöz 1-et!

$$\left(\frac{x+6}{2010}+1\right)+\left(\frac{x+5}{2011}+1\right)+\left(\frac{x+4}{2012}+1\right)=\left(\frac{x+3}{2013}+1\right)+\left(\frac{x+2}{2014}+1\right)+\left(\frac{x+1}{2015}+1\right)$$

$\dfrac{x+6}{2010}+1=\dfrac{x+2016}{2010}$, és ehhez hasonlóan alakítsuk át a többi zárójelben is az összeget, így a következő alakot ölti az egyenlet:

$$\frac{x+2016}{2010}+\frac{x+2016}{2011}+\frac{x+2016}{2012}=\frac{x+2016}{2013}+\frac{x+2016}{2014}+\frac{x+2016}{2015}.$$

Innen:

$$(x+2016)\left(\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}\right)=(x+2016)\left(\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}\right),$$

$$(x+2016)\left(\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)=0.$$

A második tényező pozitív, ezért $x+2016=0$, $x=-2016$.

Másképp. Az egyenlet elsőfokú egyismeretlenes egyenlet, így három eset lehetséges: nincs megoldása; egy megoldás van; az egyenlőség azonosság. Az utóbbi nem lehetséges, például $x=-3$ esetén a bal oldal pozitív, a jobb oldal negatív, tehát az egyenlőség nem lehet azonosság. Az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Ha mind a hat tört értéke 1, akkor teljesül az egyenlőség. A törtek mindegyike $x=-2016$ esetén veszi fel az 1 értéket. Az egyenlet egyetlen megoldása $x=-2016$.

b) $\frac{x-1999}{2}+\frac{x-1998}{3}+\frac{x-1997}{4}=\frac{x-2}{1999}+\frac{x-3}{1998}+\frac{x-4}{1997}$. Az egyenletben szereplő törtek mindegyikéből vegyünk el 1-et!

$$\left(\frac{x-1999}{2}-1\right)+\left(\frac{x-1998}{3}-1\right)+\left(\frac{x-1997}{4}-1\right)=\left(\frac{x-2}{1999}-1\right)+\left(\frac{x-3}{1998}-1\right)+\left(\frac{x-4}{1997}-1\right),$$

$$\frac{x-2001}{2}+\frac{x-2001}{3}+\frac{x-2001}{4}=\frac{x-2001}{1999}+\frac{x-2001}{1998}+\frac{x-2001}{1997},$$

$$(x-2001)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=(x-2001)\left(\frac{1}{1999}+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}\right),$$

$$(x-2001)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997}\right)=0.$$

A második tényező pozitív, ezért $x-2001=0$, $x=2001$.

Másképp. Az egyenlet elsőfokú, egyismeretlenes egyenlet, így három eset lehetséges: nincs megoldása; egy megoldás van; az egyenlőség azonosság. Az utóbbi nem lehetséges, például $x=1000$ esetén a bal oldal negatív, a jobb oldal pozitív, tehát az egyenlőség nem lehet azonosság. Az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Ha mind a hat tört értéke 1, akkor teljesül az egyenlőség. A törtek mindegyike $x=2001$ esetén veszi fel az 1 értéket. Az egyenlet egyetlen megoldása $x=2001$.

c) $\frac{x-49}{2}+\frac{x-46}{5}+\frac{x-31}{20}=\frac{x-48}{3}+\frac{x-47}{4}+\frac{x-45}{6}$. Észrevehetjük, hogy mindegyik törtnél a számlálóban és nevezőben álló számok összege ugyanannyi, 51, és $x=51$ megoldás. Ám az most elhamarkodott válasz lenne, hogy ennek az elsőfokú egyenletnek $x=51$ megoldása, s ezzel megoldottuk az egyenletet.

Vegyünk el a törték mindegyikéből 1-et:

$$\frac{x-51}{2}+\frac{x-51}{5}+\frac{x-51}{20}=\frac{x-51}{3}+\frac{x-51}{4}+\frac{x-51}{6},$$

$$(x-51)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=0,$$

$$(x-51)\left(\frac{15}{20}-\frac{18}{24}\right)=0,$$

$$(x-51)\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)=0.$$

Az utolsó egyenlőségen látszik, hogy azonosság, mivel a szorzat második tényezője 0. Tehát az egyenlet azonosság. Minden valós szám megoldás.

d) $\sqrt{\frac{x-1991}{10}}+\sqrt{\frac{x-1990}{11}}=\sqrt{\frac{x-10}{1991}}+\sqrt{\frac{x-11}{1990}}$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a 2001 megoldása az egyenletnek, ugyanis ekkor a gyökjelek alatt minden esetben 1 van, és így az egyenlet mindkét oldalán $1+1=2$ áll. Megmutatjuk, hogy az egyenletnek nincs más megoldása. Nyilván $x \geq 1991$.

Ha $x>2001$, akkor $\frac{x-1991}{10}=\frac{x-2001}{10}+1>\frac{x-2001}{1991}+1=\frac{x-10}{1991}$,

azaz $\sqrt{\frac{x-1991}{10}}>\sqrt{\frac{x-10}{1991}}$.

Hasonlóan $\frac{x-1990}{11}=\frac{x-2001}{11}+1>\frac{x-2001}{1990}+1=\frac{x-11}{1990}$, így $\sqrt{\frac{x-1990}{11}}>\sqrt{\frac{x-11}{1990}}$.

Emiatt $\sqrt{\frac{x-1991}{10}}+\sqrt{\frac{x-1990}{11}}>\sqrt{\frac{x-10}{1991}}+\sqrt{\frac{x-11}{1990}}$.

Ha $1991 \leq x<2001$, akkor $\frac{x-1991}{10}=\frac{x-2001}{10}+1<\frac{x-2001}{1991}+1=\frac{x-10}{1991}$, és $\sqrt{\frac{x-1991}{10}}<\sqrt{\frac{x-10}{1991}}$. Továbbá $\frac{x-1990}{11}=\frac{x-2001}{11}+1<\frac{x-2001}{1990}+1=\frac{x-11}{1990}$, így $\sqrt{\frac{x-1990}{11}}<\sqrt{\frac{x-11}{1990}}$.

Tehát ezen a tartományon $\sqrt{\frac{x-1991}{10}}+\sqrt{\frac{x-1990}{11}}<\sqrt{\frac{x-10}{1991}}+\sqrt{\frac{x-11}{1990}}$.

Azt látjuk, hogy az egyenlet értelmezési tartományában az $x=2001$ értéket kivéve, nincs megoldás, mert $x>2001$ esetén a bal oldal, $x<2001$ esetén a jobb oldal a nagyobb.

Az egyenlet megoldása $x=2001$.

e) $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$. Induljunk el az előző megoldások útján! Ha mindegyik tört értéke 1, akkor az egyenlet mindkét oldalán $1+1=2$ áll, és ez az $x=99$-re teljesül. Tehát $x=99$ megoldás. Azt most nem tudjuk megmutatni, hogy más megoldás nincs. Azért nem lehet ezt belátni, mert vannak még megoldások. Kezdjük újra!

A törtek nevezője nem lehet nulla, tehát $x \neq 50$, $x \neq 49$. Hozzuk az egyenlet mindkét oldalát közös nevezőre:

$$\frac{(x-49)\cdot 49+(x-50)\cdot 50}{50\cdot 49}=\frac{(x-49)\cdot 49+(x-50)\cdot 50}{(x-50)\cdot(x-49)}. \tag{1}$$

A számlálók egyenlőségéből a nevezők egyenlősége következik: $50\cdot 49=(x-50)\cdot(x-49)$, $x^2-99x=0$, $x(x-99)=0$, azaz $x=0$, vagy $x=99$, és mindkét szám megoldása az eredeti egyenletnek is.

Az előbbi következtetés akkor helyes, ha a számláló nem nulla. Ha a számláló nulla, (1) akkor is teljesül. $(x-49)\cdot 49+(x-50)\cdot 50=0$, azaz $x=\dfrac{4901}{99}$, és ez is megoldása az eredeti egyenletnek.

Az egyenlet megoldásai: 0, 99 és $\dfrac{4901}{99}$.

5. Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

a) $(x^2+2x+4)\cdot(y^2-6y+11)=6$

b) $5^x-3^x=16$

c) $\left.\begin{array}{r} x+\sqrt[6]{x}=y+\sqrt[6]{y} \\ x^2+xy+y^2=27 \end{array}\right\}$

Megoldás: Tekintsünk az egyenletben szereplő kifejezésekre, mint függvényekre, és a függvény jellemzői segíthetik az egyenlet megoldását.
a) $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3$ és $y^2-6y+11=(y-3)^2+2\geq 2$,
tehát $(x^2+2x+4)\cdot(y^2-6y+11)\geq 6$.

Az egyenlőség csak úgy lehet, ha $(x+1)^2+3=3$, azaz $x=-1$; valamint $(y-3)^2+2=2$, azaz $y=3$.

b) Osszunk 3^x-nel (ezt megtehetjük, mert $3^x\neq 0$, hiszen $3^x>0$): $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x-1=\dfrac{16}{3^x}$. A bal oldalon álló függvény szigorúan monoton növekvő, a jobb oldalon pedig szigorúan csökkenő függvény áll, ezért az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Az $x=2$ megoldás, ez az egyetlen megoldás.

c) Az $f(t)=t+\sqrt[6]{t}$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért ha $f(x)=f(y)$, akkor $x=y$. Ezt használjuk fel a második egyenletnél: $x^2+x^2+x^2=27$, tehát $x=3$, vagy $x=-3$, ám $\sqrt[6]{x}$ miatt $x\geq 0$, így az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x=3$, $y=3$.

6. Bizonyítsa be, hogy az $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ egyenletnek bármely valós *a, b, c* értékek esetén van valós gyöke.

KöMaL, 1987. március, C.98.

Megoldás: Rendezés után a $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ egyenlethez jutunk. Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa $D=4\cdot\left([a+b+c]^2-3[ab+bc+ca]\right)$, és ez átalakítások után a $D=4\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca\right)$ alakot ölti.

Belátjuk, hogy $D\geq 0$, és ezzel igazoljuk a feladat állítását.

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0,$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geq 0,$$

$$\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ac+a^2\right)\geq 0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0.$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, és így az első egyenlőtlenség is, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk. Tehát $D=4\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca\right)\geq 0$.

Másképp. Az egyenlet másodfokú egyenlet. Ha a kifejezésre, mint függvényre tekintünk, akkor az egy parabola egyenlete. Feltehetjük, hogy $a\leq b\leq c$.

Legyen $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$.

Ha $x=a$, akkor $f(a)=(a-b)(a-c)\geq 0$.

Ha $x=b$, akkor $f(b)=(b-a)(b-c)\leq 0$.

Ha $x=c$, akkor $f(c)=(c-a)(c-b)\geq 0$.

Ha valamelyik egyenlőtlenségben teljesül az egyenlőség, például $x=a$ esetén, akkor $x=a$ zérushelye a parabolának, azaz megoldása a másodfokú egyenletnek.

Az a lehetőség maradt, hogy mindegyik egyenlőtlenség éles egyenlőtlenség. Ez azt jelenti, hogy a parabola az $x=a$ és $x=c$ helyeken pozitív értéket vesz fel, és a közöttük levő $x=b$ értékre negatív az értéke. Így ez a folytonos függvény előjelet vált a és b között, emiatt a és b között zérushelye van. Ugyanígy zérushelye van b és c között is. Ezek a zérushelyek a másodfokú egyenlet gyökei.

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán.

a) $$\left.\begin{aligned} x+y+xy&=7\\ x^2+xy+y^2&=13\end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=4\\ xy+yz+zx&=1\\ xyz&=-6\end{aligned}\right\}$$

Megoldás: a) Legyen $a=x+y,\ \ b=xy$, ekkor az egyenletrendszer az

$$\left.\begin{aligned} a+b&=7\\ a^2-b&=13\end{aligned}\right\}$$

alakot ölti. Innen kapjuk az $a^2+a-20=0,\ (a-4)(a+5)=0$ egyenletet.

Ha $a=-5,\ b=12$, akkor az $x+y=-5,\quad xy=12$ egyenletrendszerhez nem találunk *x, y* valós megoldásokat. Ha $a=4,\ b=3$, akkor $x=3,\ y=1$ vagy $x=1,\ y=3$.

b) A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján *x, y* és *z* a $t^3-4t^2+t+6=0$ egyenlet gyökeit jelöli.

Ha van egész gyöke az egyenletnek, az osztója a 6-nak. Ezeket vizsgálva találunk három gyököt: $t_1=-1$, $t_2=2$, $t_3=3$.

Az egyenletrendszer $(x;\ y;\ z)$ megoldásait a $-1,\ 2,\ 3$ számok különböző sorrendjei adják.

8. a) Mutassa meg, ha $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor az a,b,c számok mindegyike pozitív.

b) Mutassa meg, ha $ab+bc+ca>0$ és $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0$, akkor az a,b,c számok azonos előjelűek.

c) Az x^3+px^2+qx+r polinom mindhárom zérushelye 0 és 2 között van. Bizonyítsa be, hogy $-2<p+q+r<0$.

Megoldás: a) Legyen $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$, $f(x)=x^3-px^2+qx-r$. Az $f(x)$ függvény $x\le 0$ esetén negatív értékeket vesz fel, tehát a zérushelyei pozitív számok, s ezek a zérushelyek a gyökök és együtthatók közötti összefüggések miatt az a,b,c számok.

b) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0$, azaz $\frac{a+b+c}{abc}>0$.

Két eset lehetséges. $a+b+c>0$, $abc>0$, $ab+bc+ca>0$; vagy $a+b+c<0$, $abc<0$, $ab+bc+ca>0$.

Legyen $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$. Ekkor az $x^3-px^2+qx-r=0$ egyenlet gyökei az a, b és c számok.

Első esetben $p>0$, $q>0$, $r>0$. Ekkor az $x^3-px^2+qx-r=0$ egyenlet gyökei mind pozitívak, hiszen $x\le 0$ esetén $x^3-px^2+qx-r<0$. Tehát $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Második esetben $p<0$, $q>0$, $r<0$. Ekkor az $x^3-px^2+qx-r=0$ egyenlet gyökei mind negatívak, hiszen $x\ge 0$ esetén $x^3-px^2+qx-r>0$. Tehát $a<0,\ b<0,\ c<0$.

c) Legyenek a polinom zérushelyei a,b,c: $x^3+px^2+qx+r=(x-a)(x-b)(x-c)$. Helyettesítsünk $x=1$-et: $1+p+q+r=(1-a)(1-b)(1-c)$. A szorzat a feltételek miatt -1 és 1 között van, így $-2<p+q+r<0$.

9. Oldja meg az egyenleteket a valós számok körében.

a) $|x-1|\cdot|x+2|=|x+1|\cdot|x-2|$

b) $|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|=|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|$

Megoldás: a) Szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezőinek abszolút értékéből képezett szorzattal, és fordítva, tehát az $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ és $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ szorzatok abszolút értéke egyenlő. Ez kétféleképpen teljesülhet: a két szorzat egyenlő, és így a különbségük 0, vagy a szorzatok értéke csak előjelben lülönbözik, ezért az összegük 0. Az első esetben $x_1=0$. A második esetben $x^2+x-2=-(x^2-x-2)$, azaz $x^2=2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. Az egyenletnek ez a három gyöke van.

b) $|a|\cdot|b|\cdot|c|=|a\cdot b\cdot c|$, tehát az $(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6$ és az $(x+1)(x-2)(x+3)=x^3+2x^2-5x-6$ szorzatok abszolút értéke egyenlő. Ez kétféleképpen teljesülhet: a két szorzat egyenlő, így a különbségük 0, vagy egymás ellentettjei, ezért az összegük 0.

Az első esetben: $x^3-2x^2-5x+6=x^3+2x^2-5x-6$, azaz $4x^2-12=0$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$.

A második esetben: $x^3-2x^2-5x+6=-(x^3+2x^2-5x-6)$, azaz $2x^3-10x=0$, $x_3=0$, $x_{4,5}=\pm\sqrt{5}$.

10. Egy tízes számrendszerben felírt négyjegyű számból kivonjuk azt a háromjegyű, majd kétjegyű, végül egyjegyű számot, amelyet az eredeti szám utolsó, utolsó kettő, végül utolsó három számjegyének elhagyásával kapunk. Az eredmény: 2014. Mi volt az eredeti négyjegyű szám?

Megoldás: Ha a keresett szám $\overline{abcd}$ (azaz $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$), akkor $\overline{abcd}-\overline{abc}-\overline{ab}-\overline{a}=2014$, így $889a+89b+9c+d=2014$. Ha $a\ge 3$, akkor $889a>2014$; ha $a=1$, akkor $889a+89b+9c+d\le 899+89\cdot 9+9\cdot 9+9<2014$, tehát $a=2$. Ezt behelyettesítve a $889a+89b+9c+d=2014$ egyenletbe: $89b+9c+d=236$. Ismét a nagysági viszonyokra figyelve kapjuk, hogy $b=2$. Az így adódó $9c+d=58$, ez csak úgy lehet, ha $c=6$, $d=4$. Az eredeti négyjegyű szám a 2264.

11. Négy különböző számjegy alkalmas sorrendjével elkészítettük a lehetséges legnagyobb és legkisebb négyjegyű számot. A két szám összege **a)** 10560; **b)** 10477.

Mik lehetnek ezek a számok?

Megoldás: a) A négy különböző számjegy: $a<b<c<d$. A feltételek szerint: $\overline{dcba}+\overline{abcd}=10560$, azaz $1001\cdot(a+d)+110\cdot(b+c)=10560$. A bal oldal osztható 11-gyel, osszunk 11-gyel: $91\cdot(a+d)+10\cdot(b+c)=960$. A jobb oldal is, $10\cdot(b+c)$ is osztható 10-zel, így $91\cdot(a+d)$ is osztható 10-zel, $a+d=10$. Ezután kapjuk, hogy $b+c=5$. Tekintettel a kiinduló egyenlőtlenségekre: $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=9$.

Valóban: $9321+1239=10\,560$.

b) Az egyenlet jobb oldala változott: $\overline{dcba}+\overline{abcd}=10477$, azaz $1001\cdot(a+d)+110\cdot(b+c)=10477$. A bal oldal osztható 11-gyel, a jobb oldal nem.

Tehát nincs megoldás. (Ez nem meglepő. Nyilván nem mindegy, milyen számot adunk meg a két szám összegeként, csak néhány esetben van megoldás.) A **b)** feladatnak még is van megoldása. Miért? Mit néztünk el, mit hibáztunk?

Két lehetőséget kell vizsgálni a feladat szövege alapján, és mi csak az egyiket néztük meg. A két lehetőség: a négy számjegy között nem szerepel a nulla (ezt néztük), vagy az egyik számjegy a nulla.

A második esetben az összeg: $\overline{dcb0}+\overline{b0cd}=10477$.

$1001d+1010b+110c=10477$, itt az összeg utolsó számjegye miatt $d=7$. Ezt behelyettesítjük: $1010b+110c=3470$, $101b+11c=347$. Mivel *b* és *c* számjegyek, így a nagysági viszonyok miatt $b=3$, és ezután $c=4$ adódik. A megoldás: $7430+3047=10477$.

Az **a)** feladat megoldása is hiányos, hiszen ott is meg kell vizsgálni azt a lehetőséget, ha a négy számjegy egyike a nulla, ám abban az esetben nincs megoldás.

12. Anna meglátogatja a hegy túloldalán lakó barátnőjét, Hannát. Az út felfele emelkedő szakaszán 2 km/h sebességgel, a vízszintes szakaszon 3 km/h, a lejtős szakaszon 6 km/h sebességgel halad. Oda-vissza az út 6 óráig tartott. Annától hány km távolságra lakik Hanna?

Megoldás: Az út odavivő szakaszán az emelkedő szakasz hossza legyen *x*, a vízszintes *y*, a lejtős *z* km. Ekkor az oda-vissza vivő út megtételéhez szükséges idő:

$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)+\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}\right)=6$, azaz $4\cdot(x+y+z)=36$, így $x+y+z=9$.

Anna és Hanna lakása között 9 km a távolság.

13. Oldja meg az $(x^2+2x-1)^2+2x^2+3x=3$ egyenletet a valós számok halmazán.

1. megoldás: $(x^2+2x-1)^2+2x^2+3x=3$. A négyzetes kifejezés mellé keressünk egy másik négyzetet, hogy az a^2-b^2 azonosságot alkalmas módon alkalmazni tudjuk.

$(x^2+2x-1)^2-x^2+3x^2+3x-3=0.$

Az első kettőt alakítsuk szorzattá a nevezetes azonosság segítségével.

$(x^2+x-1)(x^2+3x-1)+3(x^2+x-1)=0,$

$(x^2+x-1)(x^2+3x+2)=0$, azaz $(x+1)(x+2)(x^2+x-1)=0$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2. megoldás: $(x^2+2x-1)^2+2x^2+3x=3.$

$(x^2+2x-1)^2-4+2x^2+3x+1=0.$

Az első kettőt alakítsuk szorzattá, a másodfokút pedig írjuk fel gyöktényezős alakban.

$(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)+(2x+1)(x+1)=0$, azaz: $(x^2+2x-3)(x+1)^2+(2x+1)(x+1)=0$.
$(x+1)\left[(x^2+2x-3)(x+1)+2x+1\right]=0$,
$(x+1)\left[x^3+3x^2+x-2\right]=0$.

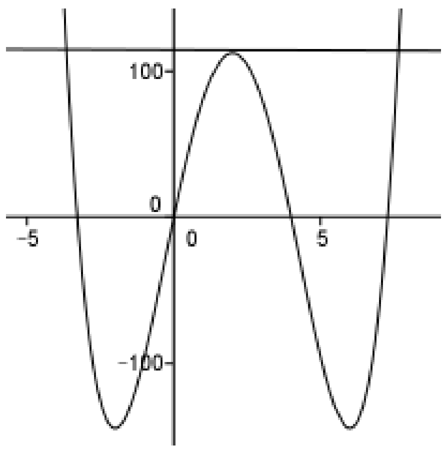
Alakítsuk szorzattá a harmadfokú kifejezést! Ha az $x^3+3x^2+x-2=0$ egyenletnek van egész gyöke, akkor az osztója a konstans tagnak, a 2-nek. Az 1, -1, 2, -2 értékeket behelyettesítjük, és azt találjuk, hogy $x=-2$ gyöke az egyenletnek, így az $(x+2)$ gyöktényező kiemelhető a harmadfokú polinomból.
$x^3+3x^2+x-2=x^3+2x^2+x^2+2x-x-2=x^2(x+2)+x(x+2)-(x+2)$,
$x^3+3x^2+x-2=(x+2)(x^2+x-1)=0$,
tehát $(x+1)(x^3+3x^2+x-2)=(x+1)(x+2)(x^2+x-1)=0$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

3. megoldás: $(x^2+2x-1)^2+2(x^2+2x-1)+1=x+2$,
a bal oldalon teljes négyzet áll: $\left[(x^2+2x-1)+1\right]^2=(x^2+2x)^2=x+2$.
Ez átrendezve, szorzattá alakítva: $(x+1)(x+2)(x^2+x-1)=0$.
Az egyenlet megoldásai: $x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

14. Mekkora b értéke, ha az $x^4-8x^3-8x^2+96x+b=0$ egyenletnek három valós gyöke van?

Megoldás: Vázoljuk fel az $f(x)=x^4-8x^3-8x^2+96x$ függvény grafikonját! (Segít a Geogebra, az Excel, vagy a függvényvizsgálat hagyományos eszköze, a deriválás.)



Azt az $y=-b$ egyenest keressük, amely pontosan 3 pontban metszi ezt a grafikont. Ez a vízszintes egyenes érintője a függvénynek.
$f'(x)=4x^3-24x^2-16x+96=4(x+2)(x-2)(x-6)=0$
A keresett egyenes az $x=2$ pontban érinti a függvényt: $-b=f(2)=112$, tehát $b=-112$.