1. Algebra

I. Feladatok

1. Bontsa fel két 10-nél nagyobb szám szorzatára a következő számokat:

a) 1111	**b)** 1122	**c)** 1212	**d)** 123123
e) 121212	**f)** 1221	**g)** 12221	**h)** 12321
i) 112211	**j)** 1112111	**k)** 111111111	

2. Alakítsa alacsonyabb fokszámú polinomok szorzatává az alábbi polinomokat:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

c) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

e) $x^4 + x^2 + 1$

f) $x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$

g) $x^4 + 4$

h) $4x^4 + 1$

i) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

j) $x^4 - 7x^2 + 1$

k) $x^4 - 3x^2 + 1$

l) $x^4 - 10x^2 + 169$

m) $x^5 + x^4 + 1$

n) $x^5 + x + 1$

o) $8x^3 + x - 66$

p) $x\left(y^2 - z^2\right) + y\left(z^2 - x^2\right) + z\left(x^2 - y^2\right)$

3. a) Ha $a + \frac{1}{a} = 3$, akkor mennyi $a^2 + \frac{1}{a^2}$ értéke?

b) Tudjuk, hogy $x + \frac{1}{x} = 5$. Mennyi $x^3 + \frac{1}{x^3}$ értéke?

Általános megjegyzés. A 3. a) feladatban (hasonló helyzet több más feladatban is fennáll) azt állítjuk, hogy az a számra egy feltétel teljesül, és rákérdezünk egy másik kifejezés értékére. A válasz megadása mellett a feladat teljes megoldásához hozzátartozik az is, hogy megvizsgáljuk, létezik-e olyan a szám, amely teljesíti a feltételt. Ezt a vizsgálatot most nem végezzük el (és a többi feladatban sem).

4. Az x számról tudjuk, hogy $x + \frac{1}{x} = 4$. Számítsa ki $\frac{x^2}{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2} + x^2$ értékét. (Olyan formában megadott érték számít teljes értékű megoldásnak, amiből kiderül, hogy a szám racionális-e vagy nem, és az is, hogy melyik a hozzá legközelebbi egész.)

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2007/2008; haladók, I. kategória, 1. forduló

5. $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ és $ab + bc + ca = 3$. Mennyi $(a + b + c)^2$ értéke?

6. **a)** Ha $\dfrac{a+2b}{a-2b}=3,$ akkor mennyi $\dfrac{a+3b}{a-3b}$ értéke?

b) Ha $\dfrac{a-2b}{b}=3$, akkor mennyi $\dfrac{a^2-ab}{4b^2}$ értéke?

7. **a)** Az *a, b* valós számokra $a+b=13$ és $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=7$ teljesül. Mennyi $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ értéke?

b) Az *a, b, c* valós számokra $a+b+c=26$ és $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=28$.

Mennyi $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}$ értéke?

8. Mennyi $a+b+c$ értéke, ha $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{6}$ és $abc=576$?

9. Ha $ac+ad+bc+bd=68$ és $c+d=4,$ akkor mennyi lesz $a+b+c+d$ értéke?

10. Az a, b, c, d pozitív egész számokra $ab+cd=38,$ $ac+bd=34,$ $ad+bc=43.$ Mennyi $a+b+c+d$ értéke?

11. Az *a, b, c* valós számokra $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ és $a+b+c=9$. Mennyi az *abc* szorzat értéke?

12. Mennyi $4(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)^2$ lehetséges legkisebb értéke, ha *a, b, c* és *d* négy különböző egész szám?

13. Igazoljuk zsebszámológép használata nélkül, hogy $2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16$ négyzetszám.

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 8. osztály, megyei forduló

14. Igazoljuk, hogy $x^2+y^2+2x-4y+7\geq 2$, ha *x, y* tetszőleges valós számok.

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 8. osztály, országos döntő

15. $\dfrac{x}{y-6}=\dfrac{y}{z-8}=\dfrac{z}{x-10}=3.$ Mennyi $x+y+z$ értéke?

16. Tudjuk, hogy $x^2+y^2=1$. Mennyi $3x^4+2y^4+5x^2y^2+y^2$ értéke?

17. Tudjuk, hogy $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ és $ac+bd=1$. Mivel egyenlő $ad-bc$?

18. Mennyi x^3+y^3 értéke, ha $x+y=5,$ és $x+y+x^2y+xy^2=24$?

19. Ha $r^2 - 2015 \cdot r + 1 = 0$, akkor mennyi $r + \dfrac{1}{r}$ értéke?

20. Legyenek *x, y, z* három páronként különböző nem nulla valós szám! Határozzuk meg az *xyz* szorzat értékét, ha tudjuk, hogy $x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{z} = z + \dfrac{1}{x}$.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I. kategória, 3. forduló

21. Mutassa meg, ha $1 + a + ab \neq 0$, $abc = 1$, akkor $\dfrac{1}{1+a+ab} + \dfrac{1}{1+b+bc} + \dfrac{1}{1+c+ca} = 1$.

22. Az *x, y, z* egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, II-III. kategória, 3. forduló

23. Bizonyítsa be, ha $\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b} = 0$, akkor $\dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2} = 0$.

24. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{8+\sqrt{60}} - \sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{7-\sqrt{40}} - \sqrt{8-\sqrt{60}}$.

KöMaL, 1990. november, C.230.

25. Mennyi a $2 \cdot \sqrt{10^{20} - \left(10^{10} - 2 \cdot 10^{-10}\right)^2}$ kifejezés értéke egészre kerekítve?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2003; 9. osztályos, országos döntő

26. Mutassa meg, hogy

a) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}} + \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}} < 12$

b) $4 < \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}} < 5$, ahol mind a négyzetgyök, mind a köbgyökjelek száma 100.

KöMaL, 1988. január, Gy.2455.

c) $\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < 11$

KöMaL, 1994. október, F.3028.

27. Határozzuk meg az *A* szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}\,.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, II. kategória, 1. forduló

28. Az a és b nullától különböző valós számokra teljesül az alábbi összefüggés:

$$a^3 + (3a^2 + 1)b + (3b^2 + 1)a + b^3 = 0.$$

Mennyi lehet az $\frac{a}{b}$ hányados értéke?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 3. forduló

29. Mely x és y pozitív egész számokra igaz az $x^2 - y^2 + 2x - 6y - 25 = 0$ egyenlőség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; kezdők, I-II. kategória, 1. forduló

30. Hány olyan pozitív egész n érték van, amelyre $n^3 - n^2 + n - 1$ értéke prímszám?

31. Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyre $n^3 + 2n^2 + 9n + 8$ értéke köbszám?

32. Hány olyan n egész szám van, amelyre $n^4 + 6n < 6n^3 + n^2$ teljesül?

33. Mutassa meg, hogy $\frac{1}{5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} < \frac{1}{3}$.

34. **a)** $\sqrt[3]{999700029999} = ?$

b) $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{66\ldots6}_{n}} = ?$

c) $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89} - \underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}} = ?$

35. Milyen számjegyekből áll a $\underbrace{333\ldots33}_{2009 \text{ darab}} \cdot \underbrace{666\ldots66}_{2009 \text{ darab}}$ szorzat eredménye?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2009/2010; haladók, I. kategória, 1. forduló

36. Legyen $A = 1\underbrace{77\ldots7}_{2k+1 \text{ darab}}6$ és $B = 3\underbrace{55\ldots5}_{k \text{ darab}}2$ $2k+3$, illetve $k+2$ jegyű természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám, és határozzuk meg $\sqrt{A-B}$ jegyeinek számát.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; haladók, II. kategória, 1. forduló

37. Egy háromszög oldalai a, b és c, melyekre $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ teljesül. Mutassa meg, hogy a háromszög szabályos háromszög.

38. Egy háromszög a, b, c oldalaira $\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0$. Mit állíthatunk a háromszög szögeiről?

KöMaL, 1986. november, Gy.2370.

39. Egy háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel *a, b* és *c*, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a β kétszerese az α szögnek, és az oldalak között fennáll az $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ összefüggés?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; kezdők, I. kategória, 3. forduló

40. Mutassa meg, ha

a) $abc=1$ és $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, akkor az a,b,c számok valamelyike 1-gyel egyenlő.

b) $abc=1$ és $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, akkor az a,b,c számok egyike 1-nél nagyobb, a másik kettő pedig 1-nél kisebb.

41. a) $2015\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015}\right)=?$

b) $2015\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)=?$

c) $\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{11\cdot13}+\frac{1}{13\cdot15}=?$

d) $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}+\frac{1}{238}=?$

e) $\frac{1}{2\cdot9}+\frac{1}{3\cdot12}+\frac{1}{4\cdot15}+\frac{1}{5\cdot18}+\ldots+\frac{1}{31\cdot96}=?$

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 6. osztály, országos döntő

f) $\left(1+\frac{1}{1\cdot3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=?$

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 7. osztály, megyei forduló

g) Melyik nagyobb: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{9\cdot10}$ vagy $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}$?

Kalmár László Matematika Verseny 2009; 7. osztály, országos döntő

h) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}+\frac{6}{7!}+\frac{7}{8!}+\frac{8}{9!}=?$

i) $\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=?$

II. Megoldások

1. Bontsa fel két 10-nél nagyobb szám szorzatára a következő számokat:

a) 1111	**b)** 1122	**c)** 1212	**d)** 123123
e) 121212	**f)** 1221	**g)** 12221	**h)** 12321
i) 112211	**j)** 1112111	**k)** 111111111	

Megoldás: a) $1111 = 1100 + 11 = 11 \cdot (100 + 1) = 11 \cdot 101$

b) $1122 = 1100 + 22 = 11 \cdot (100 + 2) = 11 \cdot 102$

c) $1212 = 1200 + 12 = 12 \cdot (100 + 1) = 12 \cdot 101$

d) $123123 = 123000 + 123 = 123 \cdot (1000 + 1) = 123 \cdot 1001$

e) $121212 = 120000 + 1200 + 12 = 12 \cdot (10000 + 100 + 1) = 12 \cdot 10101$

f) $1221 = 1110 + 111 = 111 \cdot (10 + 1) = 111 \cdot 11$

g) $12221 = 11110 + 1111 = 1111 \cdot (10 + 1) = 1111 \cdot 11$

h) $12321 = 11100 + 1110 + 111 = 111 \cdot (100 + 10 + 1) = 111 \cdot 111$

i) $112211 = 111100 + 1111 = 1111 \cdot (100 + 1) = 1111 \cdot 101$

j) $1112111 = 1111000 + 1111 = 1111 \cdot (1000 + 1) = 1111 \cdot 1001$

k) $111111111 = 111000000 + 111000 + 111 = 111 \cdot (1000000 + 1000 + 1) = 111 \cdot 1001001$

2. Alakítsa alacsonyabb fokszámú polinomok szorzatává az alábbi polinomokat:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$	**i)** $x^4 + x^2y^2 + y^4$
b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$	**j)** $x^4 - 7x^2 + 1$
c) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$	**k)** $x^4 - 3x^2 + 1$
d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$	**l)** $x^4 - 10x^2 + 169$
e) $x^4 + x^2 + 1$	**m)** $x^5 + x^4 + 1$
f) $x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$	**n)** $x^5 + x + 1$
g) $x^4 + 4$	**o)** $8x^3 + x - 66$
h) $4x^4 + 1$	**p)** $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$

Megoldás:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) =$
$= (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + x^2) + (x^2 + x) + (x + 1) = x^2(x + 1) + x(x + 1) + (x + 1) =$
$= (x + 1)(x^2 + x + 1)$.

c) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^4 + x^3) + (x^3 + x^2) + (x^2 + x) + (x + 1) =$
$= x^3(x + 1) + x^2(x + 1) + x(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

d) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=\left(x^4+x^3+x^2\right)+\left(x^3+x^2+x\right)+\left(x^2+x+1\right)=$
$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)^2$.

e) $x^4+x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.

f) $x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=x^6\left(x^4+x^2+1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=\left(x^6+1\right)\left(x^4+x^2+1\right)=$
$=\left[\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\right]\left[\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\right]$.

g) $x^4+4=\left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$.

h) $4x^4+1=\left(4x^4+4x^2+1\right)-4x^2=\left(2x^2+1\right)^2-(2x)^2=\left(2x^2+2x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right)$.

i) $x^4+x^2y^2+y^4=\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=$
$=\left(x^2+xy+y^2\right)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)$.

j) $x^4-7x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-9x^2=\left(x^2+1\right)^2-(3x)^2=\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)$.

k) $x^4-3x^2+1=\left(x^4-2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2-1\right)^2-x^2=\left(x^2-x-1\right)\cdot\left(x^2+x-1\right)$

l) $x^4-10x^2+169=\left(x^4+26x^2+169\right)-36x^2=\left(x^2+13\right)^2-\left(6x^2\right)=$
$=\left(x^2-6x+13\right)\left(x^2+6x+13\right)$.

m) $x^5+x^4+1=\left(x^5+x^4+x^3\right)-\left(x^3-1\right)=x^3\left(x^2+x+1\right)-(x-1)\left(x^2+x+1\right)=$
$=\left(x^3-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

n) $x^5+x+1=\left(x^5-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)=$
$=x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$.

o) $8x^3+x-66=\left(8x^3-64\right)+(x-2)=8\left(x^3-8\right)+(x-2)=$
$=8(x-2)\left(x^2+2x+4\right)+(x-2)=(x-2)\left(8x^2+16x+33\right)$.

p) $x\left(y^2-z^2\right)+y\left(z^2-x^2\right)+z\left(x^2-y^2\right)=x(y+z)(y-z)+yz^2-yx^2+zx^2-zy^2=$
$=(y-z)(xy+xz)-yz(y-z)-x^2(y-z)=(y-z)\left(xy+xz-yz-x^2\right)=$
$=(y-z)(x(z-x)-y(z-x))=(y-z)(z-x)(x-y)$.

3. a) Ha $a+\dfrac{1}{a}=3$, akkor mennyi $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ értéke?

b) Tudjuk, hogy $x+\dfrac{1}{x}=5$. Mennyi $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ értéke?

Megoldás: a) Ha $a+\dfrac{1}{a}=3$, akkor $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=9$, $a^2+2\cdot a\cdot\dfrac{1}{a}+\left(\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\dfrac{1}{a^2}=9$, azaz $a^2+\dfrac{1}{a^2}=9-2=7$.

b) $125=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\cdot 5$, így $x^3+\dfrac{1}{x^3}=110$.

4. Az x számról tudjuk, hogy $x+\frac{1}{x}=4$. Számítsa ki $\frac{x^2}{x^4+1}+\frac{1}{x^2}+x^2$ értékét. (Olyan formában megadott érték számít teljes értékű megoldásnak, amiből kiderül, hogy a szám racionális-e vagy nem, és az is, hogy melyik a hozzá legközelebbi egész.)

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2007/2008; haladók, I. kategória, 1. forduló

Megoldás: $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14$, $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}$, így $\frac{x^2}{x^4+1}+\frac{1}{x^2}+x^2=14+\frac{1}{14}$.

5. $a^2+b^2+c^2=4$ és $ab+bc+ca=3$. Mennyi $(a+b+c)^2$ értéke?

Megoldás: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=4+2\cdot 3=10.$

6. a) Ha $\frac{a+2b}{a-2b}=3$, akkor mennyi $\frac{a+3b}{a-3b}$ értéke?

b) Ha $\frac{a-2b}{b}=3$, akkor mennyi $\frac{a^2-ab}{4b^2}$ értéke?

Megoldás: a) $\frac{a+2b}{a-2b}=3$, $a+2b=3(a-2b)$, $a+2b=3a-6b$, $8b=2a$, $a=4b$.

Ezért $\frac{a+3b}{a-3b}=\frac{4b+3b}{4b-3b}=\frac{7b}{b}=7.$

b) Ha $\frac{a-2b}{b}=3$, akkor $a=5b$, és $\frac{a^2-ab}{4b^2}=\frac{25b^2-5b^2}{4b^2}=5.$

7. a) Az *a, b* valós számokra $a+b=13$ és $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=7$ teljesül. Mennyi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ értéke?

b) Az *a, b, c* valós számokra $a+b+c=26$ és $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=28$.

Mennyi $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ értéke?

Megoldás: a) $(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ miatt $13\cdot 7=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, így $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=89.$

b) A megadott két egyenlőség szorzata egyenlő a keresett kifejezés és $\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}$ összegével.

Tehát a válasz: $26\cdot 28-3=728-3=725$.

8. Mennyi $a+b+c$ értéke, ha $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}$ és $abc=576$?

Megoldás: Legyen $x=\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}$, ekkor $a=3x,\ b=4x,\ c=6x.$ Helyettesítsük ezeket a kifejezéseket az $abc=576$ kifejezésbe: $576=(3x)\cdot(4x)\cdot(6x)=72x^3$, $x^3=8,\ x=2.$ Tehát $a=6,\ b=8,\ c=12,\ a+b+c=26.$

9. Ha $ac+ad+bc+bd=68$ és $c+d=4,$ akkor mennyi lesz $a+b+c+d$ értéke?

Megoldás: $ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)=4(a+b)=68,$ innen $a+b=17.$ Így $a+b+c+d=17+4=21.$

10. Az a, b, c, d pozitív egész számokra $ab+cd=38,\ ac+bd=34,\ ad+bc=43.$ Mennyi $a+b+c+d$ értéke?

Megoldás: A második és harmadik egyenlőség összege:
$a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)=77=7\cdot 11$, ezért $a+b$ és $c+d$ értékei 7 és 11.
$a+b+c+d=7+11=18.$

11. Az a, b, c valós számokra $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ és $a+b+c=9$. Mennyi az abc szorzat értéke?

Megoldás: $x^2\geq 0$ teljesül minden valós x számra. Ezért az első egyenlőségből $a=b=c$ következik. Figyelemmel az $a+b+c=9$ egyenlőségre, $a=b=c=3,\ abc=27.$

12. Mennyi $4(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)^2$ lehetséges legkisebb értéke, ha *a, b, c* és *d* négy különböző egész szám?

Megoldás: A $Q=4(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)^2$ kifejezés felírható kéttagú különbségek négyzetösszegeként: $Q=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$.

Tegyük fel, hogy $a>b>c>d$. Ekkor $(a-b)^2\geq 1$, $(b-c)^2\geq 1$, $(c-d)^2\geq 1$, továbbá $(a-c)^2\geq 2^2=4$, $(b-d)^2\geq 4$, és $(a-d)^2\geq 9$.

Tehát $Q\geq 1+1+1+4+4+9=20$. $Q=20$ teljesül, ha például a számok 4, 3, 2, 1.

13. Igazoljuk zsebszámológép használata nélkül, hogy $2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16$ négyzetszám.

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 8. osztály, megyei forduló

Megoldás: Írjuk fel számok helyett általánosan ezt a szorzatot, a párosítsuk ügyesen a tényezőket: $(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)+16 = \left(4k^2-9\right)\cdot\left(4k^2-1\right)+16 = 16k^4-40k^2+25$. Ez a kifejezés teljes négyzet: $=\left(4k^2-5\right)^2$. Ezzel általános esetben is igazoltuk, hogy egy ilyen műveletsor eredménye négyzetszám.

14. Igazoljuk, hogy $x^2+y^2+2x-4y+7 \geq 2$, ha x, y tetszőleges valós számok.

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 8. osztály, országos döntő

Megoldás: Alakítsunk ki a kifejezésben összeadandóként teljes négyzeteket:
$x^2+y^2+2x-4y+7 = \left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-4y+4\right)-4+7 = (x+1)^2+(y-2)^2+2 \geq 2$.

15. $\dfrac{x}{y-6} = \dfrac{y}{z-8} = \dfrac{z}{x-10} = 3.$ Mennyi $x+y+z$ értéke?

Megoldás: Ha $\dfrac{x}{y-6} = 3,$ akkor $x = 3y-18.$ Ugyanígy $y = 3z-24$ és $z = 3x-30.$ Ezek összege $x+y+z = 3(y+z+x)-72,$ azaz $2(x+y+z) = 72,$ $x+y+z = 36.$

16. Tudjuk, hogy $x^2+y^2=1$. Mennyi $3x^4+2y^4+5x^2y^2+y^2$ értéke?

Megoldás: $3x^4+2y^4+5x^2y^2+y^2 = \left(3x^4+3x^2y^2\right)+\left(2x^2y^2+2y^4\right)+y^2 =$
$= 3x^2\left(x^2+y^2\right)+2y^2\left(x^2+y^2\right)+y^2 = 3x^2+3y^2 = 3$.

17. Tudjuk, hogy $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ és $ac+bd=1$. Mivel egyenlő $ad-bc$?

Megoldás: Az $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ miatt $ad-bc=0$.

18. Mennyi x^3+y^3 értéke, ha $x+y=5,$ és $x+y+x^2y+xy^2=24$?

Megoldás: $x+y+x^2y+xy^2 = (x+y)\cdot(1+xy) = 24.$ Mivel $x+y=5,$ ezért $xy+1=4{,}8$, vagyis $xy=3{,}8.$ $x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = 125-3\cdot 3{,}8\cdot 5 = 125-57 = 68.$

19. Ha $r^2 - 2015 \cdot r + 1 = 0$, akkor mennyi $r + \frac{1}{r}$ értéke?

Megoldás: Ha $r^2 - 2015 \cdot r + 1 = 0$, akkor $r^2 + 1 = 2015 \cdot r$. Osszuk el az egyenlőség mindkét oldalát *r*-rel: $r + \frac{1}{r} = 2015$.

20. Legyenek *x, y, z* három páronként különböző nem nulla valós szám! Határozzuk meg az *xyz* szorzat értékét, ha tudjuk, hogy

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I. kategória, 3. forduló

Megoldás: $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$, $x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$, $x - y = \frac{y - z}{yz}$, $yz = \frac{y - z}{x - y}$, és az utóbbi osztás elvégezhető, hiszen *x, y, z* páronként különböző számok.

Ugyanígy kapjuk, hogy $zx = \frac{z - x}{y - z}$, $yx = \frac{y - x}{x - z}$.

$(xy) \cdot (yz) \cdot (zx) = \frac{y - x}{x - z} \cdot \frac{y - z}{x - y} \cdot \frac{z - x}{y - z} = 1$, $(xyz)^2 = 1$, így $xyz = 1$ vagy $xyz = -1$.

Mindkét eset előfordulhat: $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = -2$ esetén $xyz = 1$; $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 2$ esetén $xyz = -1$.

21. Mutassa meg, ha $1 + a + ab \neq 0$, $abc = 1$, akkor $\frac{1}{1 + a + ab} + \frac{1}{1 + b + bc} + \frac{1}{1 + c + ca} = 1$.

Megoldás: Ha $1 + a + ab \neq 0$, akkor a többi nevező sem lehet nulla.
$1 + c + ca \neq 0$, hiszen $1 + c + ca = abc + c + ca = c(1 + a + ab)$,
és $1 + b + bc \neq 0$, mert $1 + b + bc = abc + b + bc = b(1 + c + ca)$.

$$\frac{1}{1 + a + ab} + \frac{1}{1 + b + bc} + \frac{1}{1 + c + ca} =$$

$$= \frac{1}{1 + a + ab} + \frac{a}{a + ab + abc} + \frac{ab}{ab + abc + a^2bc} =$$

$$= \frac{1}{1 + a + ab} + \frac{a}{a + ab + 1} + \frac{ab}{ab + 1 + a} = \frac{1 + a + ab}{1 + a + ab} = 1.$$

22. Az *x, y, z* egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, II-III. kategória, 3. forduló

Megoldás: Mivel $x + y + z = 2$, így $z-1=1-x-y$.

Ez alapján $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $yz+x-1=(y-1)(z-1)$, $zx+y-1=(z-1)(x-1)$.

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}=$$
$$=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=$$
$$=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}.$$

Legyen a prímszám *q,* ekkor $(x-1)(y-1)(z-1)=-q$. Ez csak úgy lehetséges, ha a három tényezőből az egyik *q*, a másik kettő 1 és -1; vagy az egyik $-q$, a két másik szám 1; vagy az egyik $-q$, és a két másik szám -1.

Az *x, y, z* számok valamilyen sorrendben $q+1$, 2, 0; vagy $-q+1$, 2, 2; vagy $-q+1$, 0, 0. Az $x+y+z=2$ egyenlőségre tekintettel rendre $q=-1$, $q=3$ és ismét $q=-1$ adódik.

Tehát a keresett prímszám csak $q=3$ lehet, és ez megvalósul, ha $x=2$, $y=2$, $z=-2$.

23. Bizonyítsa be, ha $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, akkor $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$.

Megoldás: Elegendő belátni, hogy

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right).$$

Az egyenlőség valóban teljesül, mert

$$\frac{a}{b-c}\cdot\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ac-ab}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{b}{c-a}\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ab-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{c}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=\frac{bc-ac}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$ és ezek összege nulla.

24. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{8+\sqrt{60}}-\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{8-\sqrt{60}}$.

KöMaL, 1990. november, C.230.

Megoldás: A négyzetgyök alatti összegeket, különbségeket alakítsuk teljes négyzetté az $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ és az $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ azonosságokkal.

Például, ha $8+\sqrt{60}=a^2+b^2+2ab$ alakú, ahol $8=a^2+b^2$ és $\sqrt{60}=2ab$, akkor a legutóbbi egyenlőség ad fogódzót arra, hogy milyen értéket jelölhetnek az *a* és *b* betűk.

$\sqrt{60}=2\sqrt{15}=2ab$. Ennek egy megoldása $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}$. Ekkor $a^2+b^2=8$ is teljesül. Tehát $\sqrt{8+\sqrt{60}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Hasonlóan kapjuk a $\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ egyenlőséget. Az átalakítások során használtuk a $\sqrt{a^2}=|a|$ azonosságot is. $\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}=\left|\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Ezeket használva a $\sqrt{8+\sqrt{60}}-\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{8-\sqrt{60}}$ egyenlőség másképp írható: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$, és az innen a $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ azonos egyenlőséget kapjuk.

Azonos átalakításokat végeztünk, tehát igaz a feladatban szereplő egyenlőség.

25. Mennyi a $2\cdot\sqrt{10^{20}-\left(10^{10}-2\cdot10^{-10}\right)^2}$ kifejezés értéke egészre kerekítve?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Gordiusz Matematika Tesztverseny 2003; 9. osztályos, országos döntő

Megoldás: A helyes válasz: (E) 4.

$$2\cdot\sqrt{10^{20}-\left(10^{10}-2\cdot10^{-10}\right)^2}=2\cdot\sqrt{10^{20}-\left(10^{20}-4+4\cdot10^{-20}\right)}=2\cdot\sqrt{4-4\cdot10^{-20}}\approx2\cdot\sqrt{4}=4.$$

Megjegyzés: Gyakori tapasztalat, hogy sokan az elemi számolási feladatokhoz is számológépet használnak. Ha ezt a számolást számológéppel végzik el, a legtöbb gép a hibás 0 eredményt adja. Tanulságos lehet diákokkal megbeszélni ezt a feladatot.

26. Mutassa meg, hogy

a) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}<12$

b) $4<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}<5$, ahol mind a négyzetgyök, mind a köbgyökjelek száma 100.

KöMaL, 1988. január, Gy.2455.

c) $\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<11$

KöMaL, 1994. október, F.3028.

Megoldás: a) $\sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$, így $\sqrt{6+\sqrt{6}} < \sqrt{6+3} = 3$, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+3} = 3$, és láthatóan akárhány gyökjel esetén is teljesül a $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} < 3$ egyenlőtlenség.

$\sqrt{12} < \sqrt{16} = 4$, így $\sqrt{12+\sqrt{12}} < \sqrt{12+4} = 4$, $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}} < \sqrt{12+4} = 4$, és hasonlóan folytatva, akárhány gyökjel esetén teljesül a $\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}} < 4$ egyenlőtlenség.

$\sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$, így $\sqrt{20+\sqrt{20}} < \sqrt{20+5} = 5$, $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}} < \sqrt{20+5} = 5$, így folytatva, akárhány gyökjel esetén teljesül a $\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20}}} < 5$ egyenlőtlenség.

A $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}} + \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}$ háromtagú összeg tagjai rendre kisebbek,mint 3, 4, illetve 5. Tehát az összeg kisebb $3+4+5=12$ -nél.

b) Az előbb láttuk, hogy $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} < 3$.

$\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2$, így $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}} < \sqrt[3]{6+2} = 2$, $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}} < \sqrt[3]{6+2} = 2$, és ezt így folytatva akárhány gyökjel esetén is teljesül a $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}} < 2$ egyenlőtlenség.

Ezek miatt $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}} < 3+2=5$.

Másrészt $4 < \sqrt{6}+\sqrt[3]{6}$ és $\sqrt{6}+\sqrt[3]{6} < \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}$, ezért $4 < \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}$.

c) $\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{110+\sqrt{110+\sqrt{110+\ldots+\sqrt{110+\sqrt{121}}}}} = 11$.

27. Határozzuk meg az A szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1+2011\cdot\sqrt{1+2012\cdot\sqrt{1+2013\cdot\sqrt{1+2014\cdot 2016}}}}.$$

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; haladók, II. kategória, 1. forduló

Megoldás: Használjuk az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosságot:

$\sqrt{1+2014\cdot 2016} = \sqrt{1+(2015-1)\cdot(2015+1)} = \sqrt{1+\left(2015^2-1\right)} = \sqrt{2015^2} = 2015$, emiatt

$A = \sqrt{1+2011\cdot\sqrt{1+2012\cdot\sqrt{1+2013\cdot 2015}}}$.

Az előbbi gondolatmenet szerint $\sqrt{1+2013\cdot 2015} = \sqrt{1+\left(2014^2-1\right)} = 2014$.

Ezért $A = \sqrt{1+2011\cdot\sqrt{1+2012\cdot 2014}}$.

$\sqrt{1+2012\cdot 2014} = 2013$, így $A = \sqrt{1+2011\cdot 2013} = \sqrt{1+\left(2012^2-1\right)} = 2012 = 2^2\cdot 503$.

Az A szám osztóinak száma $(2+1)\cdot(1+1) = 6$.

28. Az a és b nullától különböző valós számokra teljesül az alábbi összefüggés:

$$a^3 + (3a^2 + 1)b + (3b^2 + 1)a + b^3 = 0.$$

Mennyi lehet az $\frac{a}{b}$ hányados értéke?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/2013; kezdők, I-II. kategória, 3. forduló

Megoldás: Rendezve és szorzattá alakítva:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a + b = 0,$$

$$(a+b)^3 + a + b = 0,$$

$$(a+b)\left((a+b)^2 + 1\right) = 0.$$

Mivel a második tényező pozitív, csak $a + b = 0$ esetén lehet a szorzat nulla. Innen pedig a keresett hányados -1.

29. Mely x és y pozitív egész számokra igaz az $x^2 - y^2 + 2x - 6y - 25 = 0$ egyenlőség?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; kezdők, I-II. kategória, 1. forduló

Megoldás: Alakítsuk át a kifejezést: $(x+1)^2 - (y+3)^2 = 17$.
Használjuk az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot: $(x - y - 2)(x + y + 4) = 17$. Mindkét tényező egész szám, $(x + y + 4)$ biztosan pozitív és nagyobb a másik tényezőnél. Így a 17-nek csak egyetlen szorzattá bontása jön szóba: $x + y + 4 = 17$ és $x - y - 2 = 1$. Ezt az egyenletrendszert megoldva $x = 8$ és $y = 5$ a feladat megoldása.

30. Hány olyan pozitív egész n érték van, amelyre $n^3 - n^2 + n - 1$ értéke prímszám?

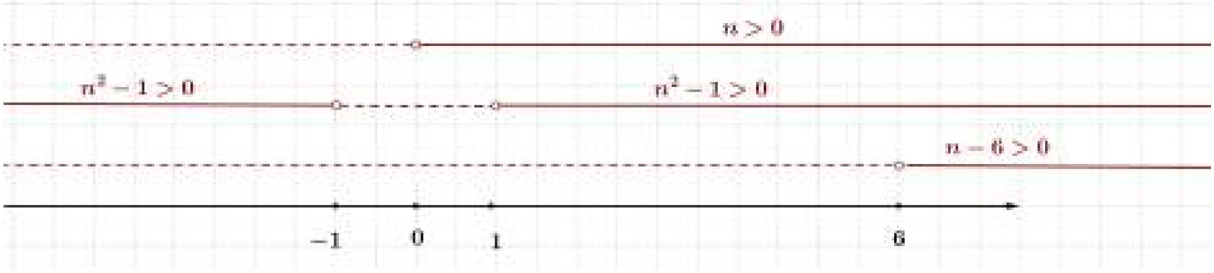
Megoldás: $n^3 - n^2 + n - 1 = n^2(n-1) + (n-1) = (n^2+1)(n-1)$. Ha ez a szorzat prímszám, akkor a két tényezőből a kisebbik értéke 1. Tehát $n = 2$, ekkor $n^3 - n^2 + n - 1$ értéke valóban prímszám, ez az érték 5.

31. Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyre $n^3 + 2n^2 + 9n + 8$ értéke köbszám?

Megoldás: Mivel $n^3 < n^3 + 2n^2 + 9n + 8 < (n+2)^3$, így $n^3 + 2n^2 + 9n + 8 = (n+1)^3$ kell legyen. $n^2 = 6n + 7$, azaz $n = 7$.

32. Hány olyan n egész szám van, amelyre $n^4 + 6n < 6n^3 + n^2$ teljesül?

Megoldás: Az $n^4 + 6n < 6n^3 + n^2$ egyenlőtlenség átrendezés után: $n^4 - 6n^3 - n^2 + 6n < 0$, azaz $n^3(n-6) - n(n-6) < 0$, $n(n^2-1)(n-6) < 0$. Az ábrán a számegyenes mellett jelöltük az egyes tényezők előjelét.



Egy szorzat akkor negatív, ha a negatív tényezők száma páratlan. Így az egyenlőtlenség megoldása: $-1 < n < 0$ vagy $1 < n < 6$. A megoldást az egész számok között keressük, ezért $n = 2$, 3, 4, 5 lehet.

33. Mutassa meg, hogy $\frac{1}{5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} < \frac{1}{3}$.

Megoldás: Olyan bizonyítást keresünk, amely akár 100-tényezős szorzat esetén is működik. Vegyünk a szorzat tényezői helyett nagyobbakat, illetve kisebbeket, és tekintsük ezek szorzatát: $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10}$, $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11}$, $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}$, ezekre $C < A < B$ teljesül. (A tényezők között páronként teljesülnek a megfelelő egyenlőtlenségek. Például $A < B$, mert $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, … mivel $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, …, mert a bal oldalon az egészből több hiányzik, mint a jobb oldalon.)

$$A \cdot B = \frac{1}{11} \text{ és } A^2 < A \cdot B = \frac{1}{11} < \frac{1}{9}, \text{ tehát } A < \frac{1}{3}.$$

$$A \cdot C = \frac{1}{20} \text{ és } A^2 > A \cdot C = \frac{1}{20} > \frac{1}{25}, \text{ tehát } A > \frac{1}{5}.$$

34. a) $\sqrt[3]{999700029999} = ?$

b) $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{66\ldots6}_{n}} = ?$

c) $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89} - \underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}} = ?$

Megoldás: a) $\sqrt[3]{999700029999} = \sqrt[3]{999 \cdot 10^9 + 7 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^4 + 9999} =$

$= \sqrt[3]{(10^3 - 1) \cdot 10^9 + 7 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^4 + 10^4 - 1} = \sqrt[3]{10^{12} - 3 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^4 - 1} =$

$= \sqrt[3]{(10^4 - 1)^3} = 10^4 - 1 = 999$.

b) $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n}+\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n+1}-\frac{6}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}}=$

$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{4\cdot\left(10^{2n}-1\right)+\left(10^{n+1}-1\right)-6\cdot\left(10^{n}-1\right)}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{4\cdot10^{2n}+4\cdot10^{n}+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot10^{n}+1\right)=$

$=\frac{1}{3}\cdot2\underbrace{000\ldots00}_{n-1}1=\underbrace{666\ldots66}_{n-1}7$.

c) $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89}-\underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}}=\sqrt[3]{37\cdot\left(10^{87}+10^{84}+\ldots+10^{0}\right)-\underbrace{11\ldots1}_{30}\cdot10^{30}}=$

$=\sqrt[3]{37\cdot\frac{10^{90}-1}{10^{3}-1}-\frac{1}{9}\left(10^{30}-1\right)\cdot10^{30}}=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27}-\frac{10^{60}-10^{30}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-3\cdot10^{60}+3\cdot10^{30}-1}{27}}=$

$=\sqrt[3]{\left(\frac{10^{30}-1}{3}\right)^{3}}=\frac{10^{30}-1}{3}=\underbrace{33\ldots3}_{30}$.

35. Milyen számjegyekből áll a $\underbrace{333\ldots33}_{2009\text{ darab}}\cdot\underbrace{666\ldots66}_{2009\text{ darab}}$ szorzat eredménye?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2009/2010; haladók, I. kategória, 1. forduló

Megoldás: $\underbrace{333\ldots33}_{2009\text{ darab}}=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{999\ldots99}_{2009\text{ darab}}=\frac{10^{2009}-1}{3}$, és $\underbrace{666\ldots66}_{2009\text{ darab}}=\frac{2\cdot\left(10^{2009}-1\right)}{3}$.

A szorzat $\frac{10^{2009}-1}{3}\cdot\frac{2\cdot\left(10^{2009}-1\right)}{3}=\frac{2\cdot10^{4018}-4\cdot10^{2009}+2}{9}$. Elvégezve az összevonást a számlálóban: $\frac{2\cdot10^{4018}-4\cdot10^{2009}+2}{9}=\frac{2\overbrace{000\ldots00}^{4017\text{ darab}}2-4\overbrace{000\ldots00}^{2009\text{ darab}}}{9}=\frac{1\overbrace{999\ldots99}^{2008\text{ darab}}6\overbrace{000\ldots00}^{2008\text{ darab}}8}{9}$.

Az osztás eredménye, mivel a maradéka hatosig, illetve az utolsó helyiértéken álló kettesig ismétlődik: $\frac{1\overbrace{999\ldots99}^{2008\text{ darab}}6\overbrace{000\ldots00}^{2008\text{ darab}}8}{9}=\overbrace{222\ldots22}^{2008\text{ darab}}1\overbrace{777\ldots77}^{2008\text{ darab}}8$.

Tehát a szorzat az 1, 2, 7, 8 számjegyeket tartalmazza.

36. Legyen $A=1\underbrace{77\ldots7}_{2k+1\text{ darab}}6$ és $B=3\underbrace{55\ldots5}_{k\text{ darab}}2$ $2k+3$, illetve $k+2$ jegyű természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám, és határozzuk meg $\sqrt{A-B}$ jegyeinek számát.

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; haladók, II. kategória, 1. forduló

Megoldás: $A=10^{2k+2}+7\cdot\underbrace{111\ldots11}_{2k+1\text{ darab}}\cdot10+6=10^{2k+2}+\frac{7}{9}\cdot\underbrace{999\ldots99}_{2k+1\text{ darab}}\cdot10+6$, azaz

$A=10^{2k+2}+\frac{7}{9}\cdot\left(10^{2k+1}-1\right)\cdot10+6=\frac{16}{9}\cdot\left(10^{2k+2}-1\right)$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $B=\frac{32}{9}\cdot\left(10^{k+1}-1\right)$.

$A-B=\frac{16}{9}\cdot\left(10^{2k+2}-1\right)-\frac{32}{9}\cdot\left(10^{k+1}-1\right)=\frac{16}{9}\cdot\left(10^{2k+2}-2\cdot10^{k+1}+1\right)=\left(\frac{4}{3}\cdot\left(10^{k+1}-1\right)\right)^2$, ezért

$\sqrt{A-B}=\frac{4}{3}\cdot\left(10^{k+1}-1\right)=\frac{4}{3}\cdot\underbrace{999\ldots99}_{k+1\text{ darab}}=4\cdot\underbrace{333\ldots33}_{k+1\text{ darab}}=1\underbrace{333\ldots33}_{k\text{ darab}}2$, ami $k+2$ jegyű szám.

37. Egy háromszög oldalai a, b és c, melyekre $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ teljesül. Mutassa meg, hogy a háromszög szabályos háromszög.

Megoldás: Miből következik, hogy a, b és c egymással egyenlők? Ez következik például az $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ egyenlőségből. Jó volna ehhez eljutni.

Az $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ egyenlőséget szorozzuk 2-vel, hogy közelebb kerüljünk a teljes négyzetekhez: $2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca$. Átrendezések után: $\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)=0$, azaz $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

Mivel $x^2\geq0$, így az előbbi összeg csak úgy lehet nulla, ha $a-b=b-c=c-a=0$, azaz $a=b=c$, azaz a háromszög egyenlő oldalú háromszög.

38. Egy háromszög a, b, c oldalaira $\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0$. Mit állíthatunk a háromszög szögeiről?

KöMaL, 1986. november, Gy.2370.

Megoldás: $\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0$, azaz $cb(c-b)+ac(a-c)+ba(b-a)=0$. Alakítsuk ezt szorzattá!

$bc^2-b^2c+a^2c-ac^2+ba(b-a)=0$,

$c^2(b-a)+c\left(a^2-b^2\right)+ba(b-a)=0$,

$(b-a)\left(c^2-c(a+b)+ba\right)=0$,

$(b-a)\left(c^2-ca-cb+ba\right)=0$,

$(b-a)\left(c(c-a)-b(c-a)\right)=0$,

$(b-a)(c-a)(c-b)=0$.

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamely tényezője nulla, vagyis az $a=b$, $b=c$, $c=a$ egyenlőségek közül legalább egy teljesül, azaz a háromszög egyenlő szárú.

39. Egy háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel *a, b* és *c*, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a β kétszerese az α szögnek, és az oldalak között fennáll az $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ összefüggés?

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/2012; kezdők, I. kategória, 3. forduló

Megoldás: Átrendezés után az előző feladatból megismert $\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0$ összefüggést kapjuk. Beláttuk, ez azt jelenti, hogy a háromszög egyenlő szárú. A szögekre kirótt feltétel miatt a háromszög szögei α, α, 2α; vagy 2α, 2α, α. A szögek összege $180°$, így a három szögeinek nagysága $45°$, $45°$, $90°$; vagy $36°$, $72°$, $72°$.

40. Mutassa meg, ha

a) $abc=1$ és $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, akkor az a,b,c számok valamelyike 1-gyel egyenlő.

b) $abc=1$ és $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, akkor az a,b,c számok egyike 1-nél nagyobb, a másik kettő pedig 1-nél kisebb.

Megoldás: **a)** Az a,b,c számok valamelyike 1-gyel egyenlő állítás következik az $(a-1)(b-1)(c-1)=0$ egyenlőségből. Jó volna ehhez eljutni.

Mivel $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, így $abc(a+b+c)=ab+bc+ca$.

Az $abc=1$ feltétel miatt $a+b+c=ab+bc+ca$, illetve $a+b+c+abc=ab+bc+ca+1$, azaz $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0$, tehát $(a-1)(b-1)(c-1)=0$.

b) $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, azaz $a+b+c>ab+bc+ca$ (hiszen $abc=1$), ezért $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1>0$, tehát $(a-1)(b-1)(c-1)>0$.

Itt vagy mind a három tényező pozitív (ami $abc=1$ miatt nem lehet), vagy egy tényező pozitív, a másik kettő negatív. Ez utóbbi teljesül, azaz az a,b,c számok egyike 1-nél nagyobb, a másik kettő pedig 1-nél kisebb.

41. a) $2015\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015}\right)=?$

b) $2015\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)=?$

c) $\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{11\cdot13}+\frac{1}{13\cdot15}=?$

d) $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}+\frac{1}{238}=?$

e) $\frac{1}{2\cdot9}+\frac{1}{3\cdot12}+\frac{1}{4\cdot15}+\frac{1}{5\cdot18}+\ldots+\frac{1}{31\cdot96}=?$

Kalmár László Matematika Verseny 2012; 6. osztály, országos döntő

f) $\left(1+\frac{1}{1\cdot3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=?$

Kalmár László Matematika Verseny 2011; 7. osztály, megyei forduló

g) Melyik nagyobb: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}$ vagy $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}$?

Kalmár László Matematika Verseny 2009; 7. osztály, országos döntő

h) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}+\frac{6}{7!}+\frac{7}{8!}+\frac{8}{9!}=?$

i) $\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=?$

Megoldás: a) Végezzük el a kivonásokat a zárójelekben, ezután a szorzat $2015\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}$ alakban írható. Látunk egy teleszkopikus szorzatot (ha a kézenfekvő egyszerűsítéseket elvégezzük, a soktényezős szorzat mint egy teleszkóp, összetolható): $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}=\frac{1}{2015}$. Így a vizsgált szorzat értéke: $2015\cdot\frac{1}{2015}=1$.

b) $2015\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)=$

$$=2015\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2015}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2015}\right)\right]=$$

$$=2015\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2015}{2014}\right)\cdot\left(\frac{2014}{2015}\cdot\frac{2016}{2015}\right)=$$

$$=2015\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2015}{2014}\cdot\frac{2014}{2015}\right)\cdot\frac{2016}{2015}=2015\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2016}{2015}=1008.$$

c) Vegyük a nevezőkben levő tényezők reciprokának különbségét!

Például: $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{7-5}{5\cdot 7}=\frac{2}{5\cdot 7}$. Így az összeg értéke:

$$\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 15}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right]=\frac{1}{15}.$$

d) $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}+\frac{1}{238}=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{14\cdot 17}=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)\right]==\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right]=\frac{5}{34}.$$

e) Emeljünk ki az összeg mindegyik tagjából $\frac{1}{3}$-ot:

$$\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{5\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{31\cdot 96}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{31\cdot 32}\right).$$

Az $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ felbontást használva átalakítjuk a zárójelben szereplő összeget:

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{31\cdot 32}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{32}.$$

Így a kérdezett összeg értéke: $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{32}=\frac{5}{32}$.

f) $1+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$. Ezt használva a szorzat átalakítható: $\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. Láthatjuk, hogy a számlálóban minden négyzetszám 3^2-től n^2-ig kiesik, hiszen a két szomszédos nevező tartalmazza a megfelelő tényezőt. A 2^2 és $(n+1)^2$ esetén csak egy szomszéd van, így egyszerűsítés után ezekből megmarad egy-egy tényező, vagyis a számláló $2(n+1)$ lesz. Így viszont a nevezőben is szinte minden eltűnik, kivéve a két szélső tényezőt. Ezért a szorzat egyszerűbb alakja: $\frac{2(n+1)}{n+2}$.

g) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$. Tehát az első összeg kisebb, mint 1. Belátjuk, hogy a második összeg nagyobb 1-nél, és ezzel megtaláltuk a választ.

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{20}>10\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\ldots+\frac{1}{30}>10\cdot\frac{1}{30}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{40}>10\cdot\frac{1}{40}=\frac{1}{4},\text{ így}$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1.$$

h) $\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}=\frac{2-1}{2!}=\frac{1}{2!}$, $\quad\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{3-1}{3!}=\frac{2}{3!}$, $\quad\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=\frac{4-1}{4!}=\frac{3}{4!}$, $\quad\ldots$ miatt

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{8}{9!}=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}\right)=1-\frac{1}{9!}.$$

i) Szorozzunk $\left(2-\frac{1}{2}\right)$-del és használjuk az $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ azonosságot.

$$\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=$$

$$=\left[\left(2^2-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\right]\cdot\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=$$

$$=\left[\left(2^4-\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\right]\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=$$

$$=\left[\left(2^8-\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\right]\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=\left(2^{16}-\frac{1}{2^{16}}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=2^{32}-\frac{1}{2^{32}}.$$

Ezt az eredményt $\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$-del való szorzás után kaptuk, így

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(2^{32}-\frac{1}{2^{32}}\right).$$