A végtelen leszállás módszerének alkalmazása a matematika különböző területein

A végtelen leszállás (infinite descent) egy indirekt bizonyítási módszer, ami azon alapul, hogy a természetes számok minden részhalmazának van legkisebb eleme. A módszert Pierre de Fermat (1601-1665) fejlesztette ki, és sok eredményéhez ezzel a módszerrel jutott el. A nagy Fermat-tétel $n = 4$ -hez tartozó speciális esete is belátható ezzel az eljárással.

Fermat végtelen leszállás módszere a következőképpen formalizálható:

Legyen $P(n)$ egy a természetes számok halmazán vizsgált tulajdonság, k pedig egy pozitív egész szám!

Ha abból a feltételezésből, hogy $P(m)$ igaz egy tetszőleges $m > k$ egész esetén, az adódik, hogy létezik egy olyan j $(k < j < m)$ egész, amire $P(j)$ igaz, akkor ebből az következik, hogy $P(n)$ hamis minden $n > k$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ esetén.

Hiszen ha lenne olyan n, amire $P(n)$ igaz lenne, akkor k és m között létezne természetes számokból álló szigorúan monoton csökkenő végtelen sorozat. A végtelen leszállás módszerét leggyakrabban a diofantoszi egyenletek megoldásánál használjuk az alábbi két speciális formában:

VLM1: Nincs olyan természetes számokból álló sorozat, amelyre $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots$

Néhány esetben ezt a változatot az alábbi formában szoktuk alkalmazni:

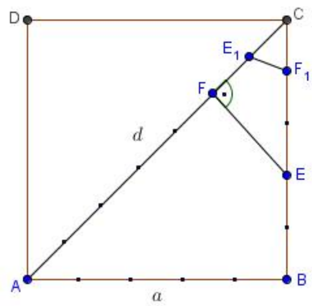
Ha n_0 a legkisebb pozitív egész szám, melyre $P(n)$ igaz, akkor $P(n)$ hamis minden $n < n_0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ esetén.

VLM2: Ha a természetes számok egy sorozatára $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \cdots$, akkor létezik egy olyan i_0 index, melyre $n_{i_0} = n_{i_0+1} = n_{i_0+2} = \cdots$

A végtelen leszállás módszere sokszor eredményesen felhasználható olyan matematikai versenyfeladatok megoldásánál, ahol esetleg más módszerek nem alkalmazhatóak. Az elkövetkező feladatok azt mutatják be, melyek lehetnek azok a területek, amelyeknél jelentős sikereket érhetünk el ezen eljárás segítségével.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám!

Megoldás:



Geometriai modellt alkalmazunk.

Legyen az *ABCD* négyzet oldala a, átlója pedig d hosszúságú. Az *ABC* egyenlőszárú derékszögű háromszögre a Pitagorasz tételt alkalmazva:

$$d^2 = 2a^2$$

$$\frac{d}{a} = \sqrt{2}$$

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, vagyis léteznek olyan m és n pozitív egész számok, melyekre:

$$\sqrt{2} = \frac{d}{a} = \frac{m}{n}$$
$$\frac{d}{m} = \frac{a}{n} = x$$
$$d = mx \text{ és } a = nx \quad (m > n)$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy létezik olyan x hosszúságú szakasz, mely segítségével a négyzet átlói és oldala is feloszthatók egész számú részre. Vegyünk fel az AC átlón egy F, a BC oldalon pedig egy E pontot úgy, hogy az $AF = AB$, és $BE = CF$ egyenlőségek teljesüljenek.
A *CFE* és *ABC* háromszögekben a *C* csúcsnál levő szög megegyezik.
Másrészt a *CFE* háromszögben:

$$CF = AC - AF = d - a = (m - n)x$$
$$CE = CB - BE = CB - CF = a - (d - a) = 2a - d = (2n - m)x$$
$$\frac{CF^2}{CE^2} = \frac{(d-a)^2}{(2a-d)^2} = \frac{a^2 - 2ad + d^2}{4a^2 - 4ad + d^2} = \frac{3a^2 - 2ad}{6a^2 - 4ad} = \frac{1}{2}$$

Az *ABC* háromszögben:

$$\frac{CB^2}{CA^2} = \frac{a^2}{d^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$
$$\text{Így } \frac{CB^2}{CA^2} = \frac{CF^2}{CE^2}, \text{ vagyis } \frac{CB}{CA} = \frac{CF}{CE}$$

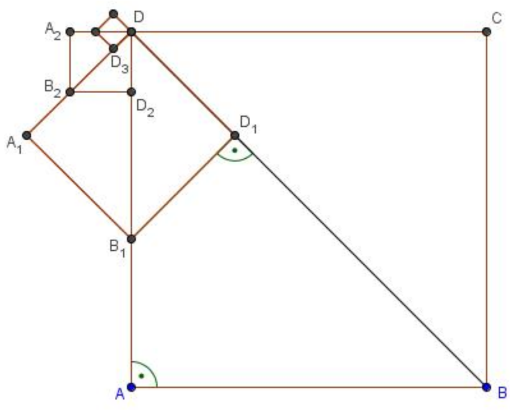
Az említett két háromszög tehát hasonló, vagyis a *CFE* is egyenlőszárú derékszögű háromszög, és az *E*, *F* pontok a *CA*, *CB* szakaszok x hosszúságú részekre bontásakor keletkező osztópontok egyikével esnek egybe. Az *ABC*-hez hasonlóan a *CFE* háromszögben is végrehajthatjuk az előző eljárást:
az *EC* oldalon kijelölünk egy F_1 pontot úgy, hogy $EF_1 = EF$, a *CF* oldalon pedig egy olyan E_1 pontot, hogy $CF_1 = FE_1$. Ekkor CE_1F_1 is egyenlőszárú derékszögű háromszög és

$$CF_1 = CE - EF_1 = (2a - d) - (d - a) = 3a - 2d = (3n - 2m)x$$
$$CE_1 = CF - FE_1 = (d - a) - (3a - 2d) = 3d - 4a = (3m - 4n)x$$

Az eljárást folytatva olyan egyre kisebb CE_iF_i $(i \in \mathbb{N}^+)$ háromszögekből álló végtelen sorozathoz jutunk, ahol az E_i, F_i csúcsok a *CB*, *CA* szakaszok x hosszúságú részekre történő bontásakor keletkező osztópontok egyikével esnek egybe.
Mivel ezen osztópontok száma véges, ezért ellentmondáshoz jutottunk. Tehát feltevésünk nem volt igaz, vagyis a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

2. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet átlójának és oldalának aránya nem racionális szám.

Megoldás:



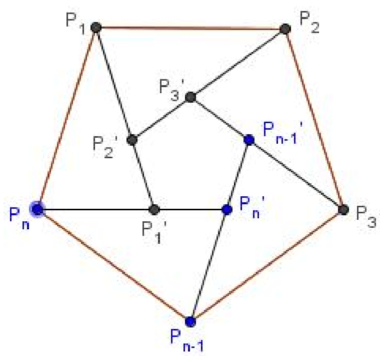
A BD átlón vegyünk fel olyan BD_1 szakaszt, hogy $BD_1 = BA$. Állítsunk a BD_1 szakaszra a D_1 pontban merőlegest, és legyen ennek az AD oldallal alkotott metszéspontja B_1.
Tekintsük az ABB_1 és BD_1B_1 háromszögeket. BB_1 oldaluk közös, $BA=BD_1$ és $B_1AB\sphericalangle = B_1\,D_1B\sphericalangle =$ 90° alapján a két háromszög egybevágó, és így $AB_1 = B_1D_1$.
Vizsgáljuk ezután a DB_1D_1 háromszöget! Mivel BD a négyzet átlója, ezért $D_1DB_1\sphericalangle = 45°$. Másrészt van 90°-os szöge is, vagyis a háromszög egyenlőszárú derékszögű. Így $DD_1 = B_1D_1 = AB_1$, ami alapján $DD_1 < DC$.
A B_1D_1D háromszöget egészítsük ki $A_1B_1D_1D$ négyzetté! Ennek átlója a DB_1 szakasz. A DB_1 átlón is kijelölhetünk egy olyan D_2 pontot, melyre $B_1D_2 = B_1A_1$, erre pedig újabb $A_2B_2D_2D$ négyzetet építhetünk ki az ábra szerint.
Így a négyzetek szerkesztésének folyamata akárhányszor megismételhető. Ezzel egy olyan végtelen (DD_n) $n \in \mathbb{N}^+$ szakasz sorozathoz juthatunk, melyre $DD_1 > DD_2 > DD_3 > \ldots$
Ezen szakaszok hossza egyszerűen kifejezhető az alábbiak szerint:

$$DD_1 = DB - DA$$
$$DD_2 = DB_1 - DD_1$$
$$DD_3 = DB_2 - DD_2$$

Tegyük fel, hogy a négyzet átlójának és oldalának aránya racionális szám! Ekkor létezik olyan $ABCD$ négyzet, mely átlójának és oldalának hossza is pozitív egész mérőszámmal rendelkezik. Ekkor $DD_1 = DB - DA$ alapján a DD_1 szakasz hosszának mérőszáma is pozitív egész szám, $DB_1 = DA - DD_1$ alapján a DB_1 szakasz hosszának mérőszáma is pozitív egész szám, $DD_2 = DB_1 - DD_1$ alapján a DD_2 szakasz hosszának mérőszáma is pozitív egész szám. A számolást folytatva kiderül, hogy a (DD_n) $n \in \mathbb{N}^+$ szakaszok hosszának mérőszámai egy természetes számokból álló szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak, ami a végtelen leszállás módszere alapján nem lehetséges. Tehát a négyzet átlójának és oldalának hányadosa nem racionális szám.

3. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 3$ és $n \neq 4$, akkor nem létezik szabályos rács n-szög!

Megoldás:

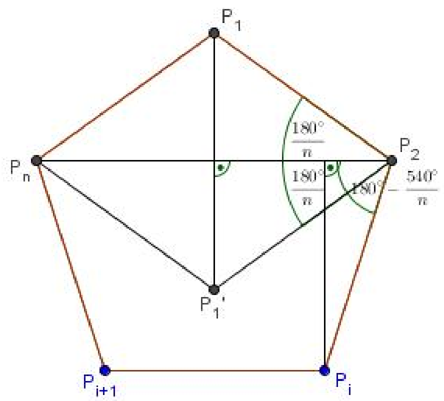


Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert és legyenek ebben a szabályos rácssokszög csúcsai a $P_i(x_i;\ y_i)$ ($x_i,\ y_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}^+$) pontok! A sokszög oldalának hosszát jelöljük a-val! Először azt fogjuk megmutatni, hogy nem létezik szabályos rácsháromszög.
Indirekt úton tegyük fel, hogy mégis létezik ilyen sokszög! Ekkor a két pont távolságára vonatkozó képlet alapján

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \in \mathbb{N}^+$$

Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ és $a^2 \in \mathbb{N}^+$, ezért a háromszög területének mérőszáma irracionális szám. Viszont minden rácssokszög területének mérőszáma

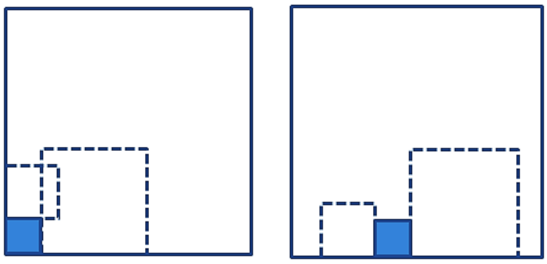
racionális szám, így feltevésünkkel ellentmondásba kerültünk. Tehát szabályos rácsháromszög nem létezik.
Ez viszont azt eredményezi, hogy szabályos rácshatszög sem létezik, mert ha lenne ilyen, akkor annak minden második csúcsa egy szabályos rácsháromszöget alkotna.
Ezért a továbbiakban legyen $n \geq 5$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \neq 6$) és tegyük fel, hogy ennek a feltételnek már van eleget tevő szabályos rács n-szög.
Rajzoljuk meg a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokból rendre a $\overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \ldots, \overrightarrow{P_nP_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektorokat!
Mivel $\overrightarrow{P_iP_j}(x_j - x_i;\ y_j - y_i)$ vektorok koordinátái egész számok és a vektorok kezdőpontja is egész koordinátájú pont, ezért a P_i' végpontok is rácspontok lesznek. Ezen pontok az eredeti szabályos n-szög belsejében helyezkednek el. Például P_1' esetén ez az alábbiak szerint igazolható.
A $P_1P_nP_1'P_2'$ négyszög $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_nP_1'}$ és $P_1P_2 = P_1P_n$ miatt rombusz, és P_1' a sokszög P_1-re illeszkedő szimmetriatengelyén helyezkedik el.



A 2. ábra alapján a P_1' pontnak a P_2P_n átlótól való t_1 távolsága:
$$t_1 = a \cdot \sin\frac{180°}{n}$$
A sokszög P_1-gyel átellenes csúcsának, vagy oldalának P_2P_n-től való t_2 távolsága
$$t_2 = a \cdot \sin(180° - \frac{540°}{n}) = a \cdot \sin\frac{540°}{n}$$
$n = 5$ esetén $t_1 = a \cdot \sin 36° < a \cdot \sin 108° = t_2$
$n \geq 7$ esetén a $\frac{180°}{n}$ és $\frac{540°}{n}$ szögek is hegyesszögek és
$$\sin\frac{180°}{n} < \sin\frac{540°}{n} \text{ miatt } t_2 > t_1$$
Másrészt mivel a sokszög P_2 és P_n-nél levő szöge $n \geq 5$ esetén tompaszög, viszont a $P_1P_nP_1'P_2$ rombusz P_2 és P_n-nél levő szöge hegyesszög, így P_1' valóban a sokszög belsejében található.
Az eredeti sokszög csúcsaival végrehajtott transzformáció szimmetria tulajdonságait figyelembe véve a kapott rácssokszög is szabályos lesz, és mivel az eredeti belsejében helyezkedik el, ezért oldalai kisebbek lesznek.
Az eljárást végtelen sokszor megismételve olyan végtelen szabályos rácssokszög-sorozatot kapunk, amelyek oldalainak négyzete minden esetben pozitív egész szám. Ez a szám nem csökkenhet végtelen sokszor, tehát a kapott ellentmondás alapján a feltételezett alakzat nem létezik.

4. Fel lehet-e osztani egy egész oldalhosszúságú kockát páronként különböző méretű egész oldalhosszúságú kis kockákra?

Megoldás:



Az 1. és 2. ábra alapján nyilvánvaló, hogy ha egy négyzetet fel tudunk bontani véges sok különböző négyzetre, akkor közülük a legkisebbnek az oldala nem illeszkedhet az eredeti négyzet oldalára.
Ezt felhasználva tegyük fel, hogy az eredeti a ($a \in \mathbb{N}^+$) oldalú K kockát sikerült felosztani különböző a_i ($a_i \in \mathbb{N}^+$, $i \in \mathbb{N}^+$) élű K_i kis kockákra. Tekintsük ezután K egyik L lapját! Az L-re illeszkedő kis kockák ezt a lapot különböző méretű négyzetekre bontják. Legyen ezek közül a legkisebb N_1, a hozzá tartozó kis kocka pedig K_1. Ekkor N_1 egyik oldala sem illeszkedik L határoló vonalára, így az nagyobb méretű négyzetekkel van körülvéve. Az ezekhez tartozó kis kockák olyan üreget formálnak, amelyben helyezkedik el K_1. Legyen K_1-nek N_1-gyel szemközti lapja L_1. Ekkor az L_1-re illeszkedő kis kockák lapjai is felosztják N_1-et kisebb négyzetekre, melyek közül a legkisebb méretűt jelöljük N_2-vel. Ennek oldalára teljesül, hogy $a_2 < a_1$ ($a_2 \in \mathbb{N}^+$) ,és N_2 N_1 belsejében helyezkedik el. Az N_2-t közrefogó nagyobb négyzetekhez tartozó kockák ismét egy üreget formálnak, amiben elhelyezkedik K_2. Az eljárás az N_2-vel szemben levő L_2 lappal folytatva olyan (K_n) sorozatot hozhatunk létre, melyek (a_n) él-sorozatára $a > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ ($a_i \in \mathbb{N}^+$, $i \in \mathbb{N}^+$). Ez pedig a végtelen leszállás módszere alapján nem lehetséges. Így a kívánt kocka-feldarabolás nem végezhető el.

5. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\boldsymbol{x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0}$$

Megoldás:
Az (x; y; z)=(0; 0; 0) számhármas egy lehetséges megoldása az egyenletnek. Meg fogjuk mutatni, hogy más megoldása nincs.
Legyen az (x_1; y_1; z_1) számhármas egy nem triviális megoldás. Ha x_1, y_1, z_1 ismeretlenek közül valamelyik nullával egyenlő, akkor mivel $\sqrt[3]{3}$ és $\sqrt[3]{9}$ irracionális számok, ezért a másik kettőnek is nullának kell lennie. Ezért feltételezhetjük, hogy x_1, y_1, z_1 pozitív egész számok. Ekkor az eredeti egyenlőségből adódik, hogy

$$3|x_1, \text{ azaz } x_1 = 3x_2 \ (x_2 \in \mathbb{N}^+, \ x_2 < x_1)$$

Ezt felhasználva:

$$9x_2^3 + y_1^3 + 3z_1^3 - 3x_2y_1z_1 = 0$$

és emiatt

$$3|y_1, \text{ azaz } y_1 = 3y_2 \ (y_2 \in \mathbb{N}^+, \ y_2 < y_1)$$

Ezt is figyelembe véve

$$3x_2^3 + 9y_2^3 + z_1^3 - 3x_2y_2z_1 = 0$$

és így

$$3|z_1, \text{ azaz } z_1 = 3z_2 \ (z_2 \in \mathbb{N}^+, \ z_2 < z_1)$$

A helyettesítést újra elvégezve:

$$x_2^3 + 3y_2^3 + 9z_2^3 - 3x_2y_2z_2 = 0$$

Tehát kaptunk egy olyan új (x_2; y_2; z_2) pozitív egészekből álló számhármast, ami megoldása az egyenletnek, és $x_2 < x_1$, $y_2 < y_1$, $z_2 < z_1$.

Az eljárást folytatva olyan pozitív egészekből álló számhármasokat kapunk, amelyekből képzett (x_n), (y_n), (z_n) $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatok szigorúan monoton csökkenőek. Ez pedig a VLM1 alapján nem lehetséges. Így az egyetlen megoldás: $x = y = z = 0$.

6. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\boldsymbol{x^4 + y^4 + z^4 = 9u^4}$$

Megoldás:

Ha $u = 0$, akkor mivel x^4, y^4, z^4 nemnegatív számok szükségszerűen $x = y = z = 0$.
A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy nincs más megoldása az egyenletnek.
Tegyük fel, hogy az x, y, z egész számok $u \neq 0$ esetén igazzá teszik az egyenlőséget, és legyen $u^4 = d \in \mathbb{N}^+$.
Ha u 5-tel nem osztható egész szám, akkor a kis Fermat tétel alapján:

$$u^4 \equiv 1 \pmod 5$$

Az egyenlet szerint pedig:

$$x^4 + y^4 + z^4 \equiv 4 \pmod 5 \quad (1)$$

Mivel $x^4, y^4, z^4 \equiv 0$ vagy $1 \pmod 5$, ezért az (1)-es egyenlőség nem állhat fenn, vagyis $5|u$, azaz $u = 5u_1$ $(u_1 \in \mathbb{Z})$ és

$$x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0 \pmod 5$$

Ez utóbbi feltétel pedig megköveteli, hogy az x, y, z ismeretlenek mindegyike 5-tel osztható egész szám legyen, azaz $x = 5x_1,\ y = 5y_1,\ z = 5z_1$ $(x_1,\ y_1,\ z_1 \in \mathbb{Z})$
A helyettesítéseket elvégezve és 5^4-nel leosztva:

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = 9u_1^4$$

Tehát x_1, y_1, z_1, u_1 is kielégíti az egyenletet és

$$u_1^4 = \frac{u^4}{5^4} < u^4 = d \in \mathbb{N}^+$$

Az eljárást folytatva egy olyan pozitív egészekből álló, a megoldásokkal kapcsolatos (u_n^4) $n \in \mathbb{N}^+$ sorozatot kapunk, melyre

$$u_1^4 > u_2^4 > u_3^4 > \cdots$$

Ez viszont ellentmondás a VLM1 alapján.
Így az egyenlet egyetlen megoldása: $x = y = z = u = 0$.

7. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\boldsymbol{2^x - 1 = xy}$$

Megoldás:

Könnyen látható, hogy az $(x; y)=(1; 1)$ és az $(x; y)=(0; k)$ $(k \in \mathbb{N})$ típusú számpárok megoldásai az egyenletnek. A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy más megoldás nincsen.
Legyen $x \geq 2$ $(x \in \mathbb{N}^+)$ és használjuk fel x prímtényezős felbontását! Legyen p_1 x egy prímosztója és q_1 pedig a legkisebb olyan pozitív egész szám, melyre

$$p_1 |\ 2^{q_1} - 1$$

Ekkor az eredeti egyenlet baloldalán páratlan szám áll, és így x és p_1 is ilyen paritású.
A kis Fermat tétel alapján

$$p_1 |\ 2^{p_1 - 1} - 1$$

és így a q_1-re tett feltétel alapján

$$q_1 \leq p_1 - 1 < p_1$$

Be fogjuk látni, hogy ekkor $q_1 | x$. Ha az előbbi feltétel nem teljesülne, akkor $x = kq_1 + r$, ahol k és r egész számok és $0 < r < q_1$. Ekkor

$$2^x - 1 = 2^{kq_1} \cdot 2^r - 1 = (2^{q_1})^k \cdot 2^r - 1 =$$
$$= (2^{q_1} - 1 + 1)^k \cdot 2^r - 1 \equiv 2^r - 1 \pmod{p_1}$$

Az egyenlet alapján: $x | 2^x - 1$, és $p_1 | x$ figyelembe vételével $p_1 | 2^x - 1$.
$p_1 | 2^x - 1$ miatt és az előző levezetés alapján $p_1 | 2^r - 1$, ami ellentmond q minimális kiválasztásának. Tehát $q_1 | x$ és $1 < q_1 < p_1$.
Ezután legyen p_2 q_1 egy prímosztója. Az előző eljárást megismételve adódik, hogy ekkor $p_2 | x$ és $p_2 < p_1$.
Az eljárást folytatva x prímosztóinak olyan végtelen (p_n) $n \in \mathbb{N}^+$ sorozatát kapjuk, melyre $p_1 > p_2 > \cdots$, ami a VLM1 alapján lehetetlen. Tehát az egyenletnek csak a korábban említett megoldásai vannak.

8. Határozzuk meg az $\boldsymbol{m^2 + n^2}$ kifejezés maximális értékét, ha $\boldsymbol{m, n}$ Î {1, 2, …, 1981} és $\boldsymbol{(n^2 - nm - m^2)^2 = 1}$.

Megoldás:
Először m és n egymáshoz viszonyított nagyságrendjét vizsgáljuk meg.
$n < m$ nem lehetséges, mivel ekkor $n^2 - m^2 < -1, -nm < -1$, így $n^2 - nm - m^2 < -2$ és $(n^2 - nm - m^2)^2 > 4$
Ha $n = m$, akkor az egyetlen lehetőség az (1; 1) számpár.
Ha $1 < m < n$ és az (m; n) számpár teljesíti az előírt feltételt, akkor $m < n \leq 2m$.
[$n > 2m$ esetén $n^2 - nm - m^2 = n(n-m) - m^2 > 2m^2 - m^2 = m^2 \geq 4$ és $(n^2 - nm - m^2)^2 > 16$ lenne.]
Ekkor

$$(n^2 - nm - m^2)^2 = [(n-m)^2 + nm - 2m^2]^2 =$$
$$= [(n-m)^2 + m(n-m) - m^2]^2 = [m^2 - m(n-m) - (n-m)^2]^2$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az $(m;\ n-m)$ számpár is teljesíti a feltételt, és $0 < n - m \leq m$
A VLM2 alapján az $(n;\ m) \mapsto (m;\ n-m)$ transzformáció sorozatnak véges sok lépés után véget kell érnie az $n = m = 1$ esettel. Ezért a megadott összefüggést minden olyan számpár teljesíti, amely az (1; 1)-ből kiindulva az $(n;\ m) \mapsto (n+m;\ n)$ inverz transzformációval megkapható:
Az előállítható számpárok sorozata:

$$(1;\ 1) \mapsto (2;\ 1) \mapsto (3;\ 2) \mapsto (5;\ 3) \mapsto \cdots$$

A számpárokban előforduló értékek az

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}^+,\ n \geq 2)$$

rekurzióval értelmezett Fibonacci sorozat elemei, vagyis az alábbi számpárok:

$$(F_1;\ F_0) \mapsto (F_2;\ F_1) \mapsto (F_3;\ F_2) \mapsto \cdots \mapsto (F_n;\ F_{n-1})$$

A legnagyobb Fibonacci szám, ami még nem haladja meg az 1981-et, az $F_{16} = 1597$. Így a keresett maximális érték:

$$(n^2 + m^2)_{\max} = F_{16}^2 + F_{15}^2 = 1597^2 + 987^2 = 3\,524\,578$$

9. Az (x_n), (y_n) $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokat az alábbi rekurziós képletekkel adhatjuk meg:

$$\boldsymbol{x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n}$$
$$\boldsymbol{y_0 = 1,\ y_1 = 2,\ y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n}$$

***a*) Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra:**

$$\boldsymbol{x_n^2 - 5y_n^2 = -4}$$

***b*) Tegyük fel, hogy *a* és *b* két olyan pozitív egész szám, melyekre**

$$\boldsymbol{a^2 - 5b^2 = -4}$$

Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan *k* természetes szám, melyre

$$\boldsymbol{x_k = a} \text{ és } \boldsymbol{y_k = b}$$

Megoldás:

Először n $(n \in \mathbb{N})$ szerinti teljes indukcióval igazolni fogjuk, hogy

$$(x_{n+1};\ y_{n+1}) = \left(\frac{3x_n + 5y_n}{2};\ \frac{x_n + 3y_n}{2}\right)$$

$n = 0$ esetén

$$(4;\ 2) = \left(\frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2};\ \frac{1 + 3 \cdot 1}{2}\right)$$

$n = 1$ esetén

$$x_3 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$$
$$y_3 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$
$$(11;\ 5) = \left(\frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{2};\ \frac{4 + 3 \cdot 2}{2}\right)$$

alapján az állítás teljesül.

Tegyük fel, hogy a megadott képlet $n = k$ és $n = k - 1 - re$ is érvényes.

Ekkor $n = k + 1$ esetén a rekurzív képleteket és az indukciós feltevést is felhasználva:

$$(x_{k+2};\ y_{k+2}) = (3x_{k+1} - x_k;\ 3y_{k+1} - y_k) =$$
$$= \left(3 \cdot \frac{3x_k + 5y_k}{2} - \frac{3x_{k-1} + 5y_{k-1}}{2};\ 3 \cdot \frac{x_k + 3y_k}{2} - \frac{x_{k-1} + 3y_{k-1}}{2}\right) =$$
$$= \left(3 \cdot \frac{3x_k - x_{k-1}}{2} + 5 \cdot \frac{3y_k - y_{k-1}}{2};\ \frac{3x_k - x_{k-1}}{2} + 3 \cdot \frac{3y_k - y_{k-1}}{2}\right) =$$
$$= \frac{3x_{k+1} + 5y_{k+1}}{2};\ \frac{x_{k+1} + 3y_{k+1}}{2})$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

a) Korábbi eredményeinket felhasználva n $(n \in \mathbb{N})$ szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$x_n^2 - 5y_n^2 = -4$$

$n = 0$ esetén $x_0^2 - 5y_0^2 = 1 - 5 = -4$ alapján az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás $n = k - ra$ $(k \in \mathbb{N})$ is teljesül. Ekkor $n = k + 1$ esetén:

$$x_{k+1}^2 - 5y_{k+1}^2 = \left(\frac{3x_k + 5y_k}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x_k + 3y_k}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{4x_k^2 - 20y_k^2}{4} = x_k^2 - 5y_k^2 = -4$$

b) Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy a_1, b_1 olyan pozitív egész számok, melyekre $a_1^2 - 5b_1^2 = -4$, de nem létezik olyan $(k \in \mathbb{N})$ szám, hogy $(x_k; y_k)=(a_1; b_1)$.

Legyen $(a_2;\ b_2) = \left(\frac{3a_1 - 5b_1}{2};\ \frac{3b_1 - a_1}{2}\right)$.

Először megmutatjuk, hogy a_2, b_2 pozitív egész számok. Ez akkor teljesül, ha a_1 és b_1 azonos paritásúak, $a_1 < 3b_1$ és $3a_1 > 5b_1$.

$$0 = a_1^2 - 5b_1^2 + 4 = a_1^2 - b_1^2 + 4(1 - b_1^2) \equiv a_1 - b_1 \pmod 2$$

alapján a_1 és b_1 azonos paritású, és

$$a_1^2 = 5b_1^2 - 4 < 9b_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 < 3b_1$$

Másrészt, ha a_1 nem 1, illetve 2, akkor

$$a_1^2 > 5 \text{ és } 0 = 5a_1^2 - 25b_1^2 + 20 < 5a_1^2 - 25b_1^2 + 4a_1^2$$

Ebből

$$9a_1^2 > 25b_1^2$$
$$3a_1 > 5b_1$$

[$a_1 = 2$ esetén nincs olyan $b_1 \in \mathbb{N}^+$, mely teljesíti az előírt egyenlőséget, $a_1 = b_1 = 1$ esetén pedig $(a_1; b_1)=(x_0; y_0)$]
Az $a_1^2 - 5b_1^2 = -4$ feltételt felhasználva egyszerű számítással adódik, hogy

$$a_2^2 - 5b_2^2 = \left(\frac{3a_1 - 5b_1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3b_1 - a_1}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{4a_1^2 - 20b_1^2}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

Másrészt:

$$a_2 + b_2 = \frac{3a_1 - 5b_1}{2} + \frac{3b_1 - a_1}{2} = a_1 - b_1 < a_1 + b_1$$

és $(a_2; b_2) \neq (x_j; y_j)$ bármely $j \in \mathbb{N}$ index esetén.
Az eljárást folytatva olyan $(a_n; b_n)$ $n \in \mathbb{N}^+$ számpár sorozathoz jutunk, melynek tagjai pozitív egészekből állnak, kielégítik az előírt egyenlőtlenséget és $a_1 + b_1 > a_2 + b_2 > a_3 + b_3 > \cdots$
Ez viszont a VLM1 miatt nem lehetséges.

10.Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = 2xyz}$$

Megoldás:
Tegyük fel, hogy az x, y, z pozitív egész számok kielégítik az egyenletet, és legyen $d = xy$.
Ha $d = 1$, akkor $x = y = 1$ és az egyenlet alapján $z = 0$, ami az alaphalmaz alapján nem lehetséges. Tehát $d > 1$ és legyen d egy prímosztója p. Ekkor

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 2xyz \equiv 0 \pmod{p}$$
$$x \equiv y \pmod{p} \quad \text{vagy} \quad x \equiv -y \pmod{p}$$

Tekintettel arra, hogy $p|xy$ x vagy $y \equiv 0 \pmod{p}$
és a korábbiak figyelembe vételével $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$
Legyen $x_1 = \frac{x}{p}$ és $y_1 = \frac{y}{p}$
Ekkor x_1 és y_1 pozitív egész számok, és

$$(px_1)^2 - (py_1)^2 = 2(px_1)(py_1) \cdot z$$
$$x_1^2 - y_1^2 = 2x_1y_1z$$

Ez azt jelenti, hogy az $(x_1; y_1; z)$ számhármas is megoldása az egyenletnek.
Másrészt

$$d_1 = x_1y_1 = \frac{x}{p} \cdot \frac{y}{p} = \frac{d}{p^2} < d$$

Az eljárást folytatva a megoldásokat szolgáltató x és y értékekből olyan pozitív egész számokból álló (d_n) $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat képezhető, melyre $d > d_1 > d_2 > \ldots$
Ez viszont a VLM1 miatt nem lehetséges.

11. Legyen f a pozitív egész számokat önmagára leképező bijektív függvény. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan a és d pozitív egész számok, hogy

$$\boldsymbol{f(a)} < f(a + d) < f(a + 2\boldsymbol{d})$$

Megoldás:

Tegyük fel, hogy nem léteznek a megadott egyenlőtlenségnek megfelelő számok! Rögzítsünk egy tetszőleges *a* pozitív egész számot! Mivel *f* bijektív függvény, ezért csak véges sok olyan $t \in \mathbb{N}^+$ szám létezik, melyre

$$f(a+t) < f(a) \qquad (1)$$

Keressük meg *t* legnagyobb olyan értékét,, melyre az (1)-es feltétel még teljesül, és legyen *k* olyan pozitív egész szám, melyre $k > t$. Ekkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$f(a+mk) > f(a)$$

Indirekt feltevésünket és *f* bijektív tulajdonságát felhasználva *m* értékét folyamatosan növelve:

$$f(a+k) > f(a+2k)$$
$$f(a+2k) > f(a+2^2k)$$
$$\vdots$$
$$f(a+2^nk) > f(a+2^{n+1}k)$$

Így létrehoztuk a pozitív egész számoknak egy szigorúan monoton csökkenő $f(a+2^nk)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ végtelen sorozatát, ami a végtelen leszállás módszere alapján nem lehetséges. Így biztosan létezik olyan n_0 pozitív egész szám, melyre

$$f(a+2^{n_0}k) < f(a+2^{n_0+1}k)$$

Ekkor *d* értékét $2^{n_0}k$-nak választva teljesül az

$$f(a) < f(a+d) < f(a+2d)$$

egyenlőtlenség.

12. Keressük meg azokat a pozitív egészekből álló (*a*; *b*) számpárokat, amelyekre $ab + a + b$ osztója $(a^2 + b^2 + 1)$-nek.

Megoldás:

A megadott oszthatósági feltétel alapján létezik olyan *k* pozitív egész szám, melyre

$$a^2 + b^2 + 1 = k(ab + a + b) \qquad (1)$$

Az (1)-es alapján $k = 1$ esetén

$$a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$$
$$2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b = 0$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

Ez utóbbi alakból az $a = b = 1$ megoldás adódik.

$k = 2$ esetén:

$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab + 2a + 2b$$
$$a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a$$
$$(b-a-1)^2 = 4a$$

A kapott egyenlőség alapján *a*-nak négyzetszámnak kell lennie, azaz létezik olyan $d \in \mathbb{N}^+$ szám, melyre $a = d^2$. Ekkor

$$b - d^2 - 1 = \pm 2d$$
$$b = (d \pm 1)^2$$

Tehát *a* és *b* szomszédos négyzetszámok.

$k \geq 3$ esetén mivel a megadott kifejezések *a*-ra és *b*-re szimmetrikusak, ezért keressük meg először azokat a pozitív egész *a* és *b* értékeket, melyekre $a \leq b$.

Ekkor az (1)-es egyenletet *b* fokszáma szerint rendezve

$$b^2 - k(a+1)b + (a^2 - ka + 1) = 0$$

Mivel az egyenlet gyökeinek összege $k(a+1) \in \mathbb{N}^+$, ezért ha az egyik gyök egész, akkor a másik is az.

Jelöljük az egyenlet nem nagyobbik gyökét *r*-rel. Meg fogjuk mutatni, hogy $1 < r < a$.

Először indirekt úton azt fogjuk igazolni, hogy $0 < r$. Mivel $b \cdot r = a^2 - ka + 1$, ezért tegyük fel, hogy $a^2 - ka + 1 \leq 0$.
Az egyenlőség nem állhat fenn, mivel ekkor az $a(k-a) = 1$ egyenlet nem teljesül semmilyen $k \geq 3$, $(k \in \mathbb{N}^+)$ érték esetén.
Ha $a^2 - ka + 1 < 0$, akkor az (1)-es alapján:

$$b(b - ak - k) = ak - a^2 - 1 > 0 \quad (2)$$

Ezért

$$b - ak - k > 0$$
$$b > ak + k$$

És így

$$b(b - ak - k) > (ak + k) \cdot 1 > ak - a^2 - 1 \quad (3)$$

Mivel a (2)-es, (3)-as feltételek egymásnak ellentmondanak, ezért feltevésünk nem volt igaz, azaz $r > 0$.
Másrészt $b \cdot r = a^2 - ka + 1 < a^2$ alapján $b \geq a > 0$ miatt $r < a$.
Ez viszont azt jelenti, hogy a változók szimmetriáját is felhasználva, hogy az $(a_1; b_1)=(a; b)$ megoldásból előállítható egy $(a_2; b_2)=(r; a)$ megoldás is. Mivel $r \in \mathbb{N}^+$ és $r < a$, a korábban említett módszerrel ebből újabb $(a_3; b_3)$ megoldás készíthető egy másodfokú egyenlet megoldásával és egy változócserével, és erre is érvényes az $a_3 < b_3$ reláció.
A lépéseket végtelen sokszor ismételgetve olyan pozitív természetes számokból álló $(a_n; b_n)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ végtelen sorozathoz jutunk, melyre $a_i \leq b_i$ és $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$
Ez pedig a végtelen leszállás módszere alapján nem lehetséges. Tehát a megadott oszthatósági feltétel csak a korábban megadott két lehetőség szerint teljesülhet.