Középiskolás fokon

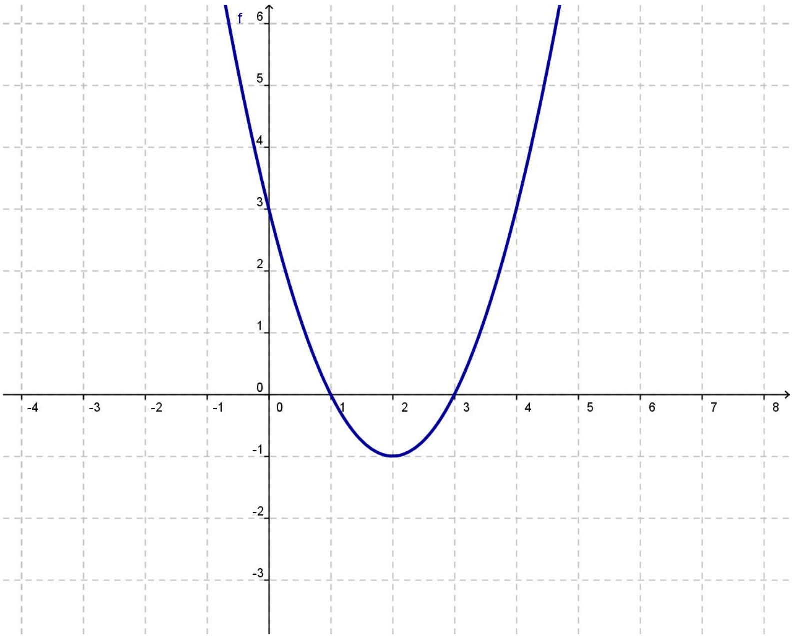
Az előadás címét József Attilától vettem, meglehetősen elferdített formában persze, hiszen az Ars poetica című versében egy tagadószó is szerepel az idézett kifejezés előtt.

A **cél** az, hogy egy tetszőleges, valós számokon értelmezett, egyváltozós, harmadfokú függvény helyi szélsőértékeit megadhassuk **differenciálszámítás alkalmazása nélkül**. A munkamódszer a középiskolában szokásos lesz. A konkrétból haladunk az általános felé.

A függvényeket a Geogebra programmal ábrázoltuk. Ez a program a ingyenes, szabadon letölthető az http://www.geogebra.org/cms/ weboldalról.

1. példa

Keressük meg az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény helyi szélsőértékét!



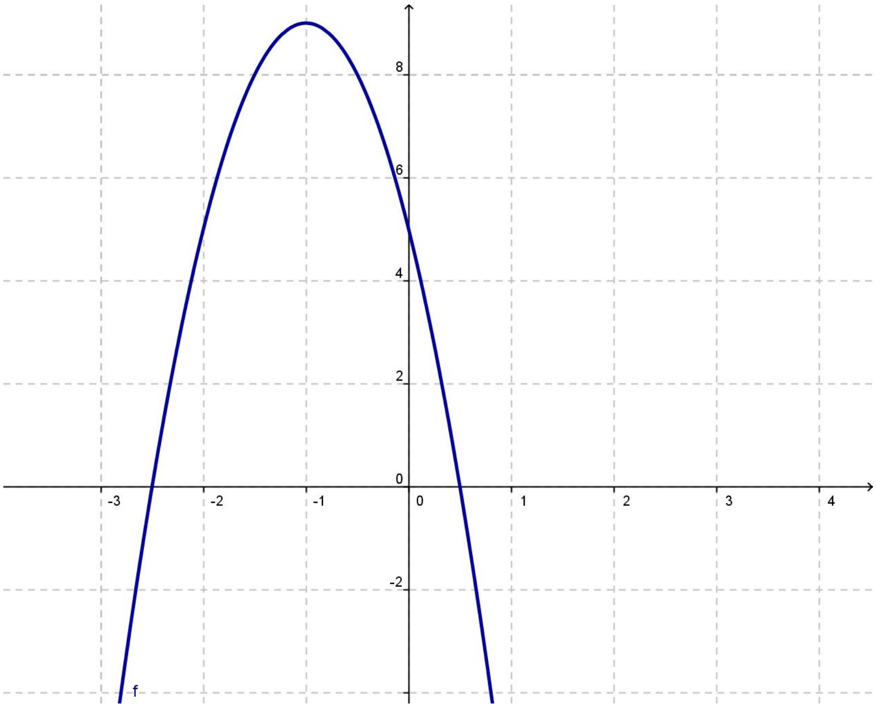
Ez a függvény ugyan másodfokú, de az egyszerűsége miatt tanulóink számára az eljárás könnyen érthető lesz.
Tekintsük a
$g(x) = x^2 - 4x = x(x-4)$
függvényt! (A konstansnak a szélsőérték helye szempontjából nincs jelentősége.) Ha $x \geq 4$ vagy $x \leq 0$ akkor $g(x)$ szigorú monoton. Legyen ugyanis x_2 és x_1 ezen tartományok egyikében és az $x_1 < x_2$ feltétel mellett vizsgáljuk az

$$\Delta = g(x_2) - g(x_1) = (x_2^2 - 4x_2) - (x_1^2 - 4x_1) = \\ = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4)$$

differencia előjelét! A szorzat alakból látható, hogy ez az $x \geq 4$ tartományon mindig pozitív, míg az $x \leq 0$ esetben mindig negatív lesz. Tehát monotonitás váltásra, azaz szélsőértékre csak a nullánál nagyobb és a négynél kisebb számok közt számíthatunk.
Vegyük most a $-g(x) = x(4-x)$ függvényt. Látható, hogy a vizsgálandó tartományban e függvény mindig pozitív. Így alkalmazható **a számtani és mértani közép** közti jól ismert kapcsolat, azaz $\sqrt{x(4-x)} \leq \dfrac{x + (4-x)}{2} = 2$. Tehát $-g(x) \leq 4$, ami azt jelenti, hogy az eredeti $f(x)$ függvény legkisebb értéke (- 1) lesz, amely a tagok egyenlőségénél, azaz $x = 2$ - nél meg is valósul.

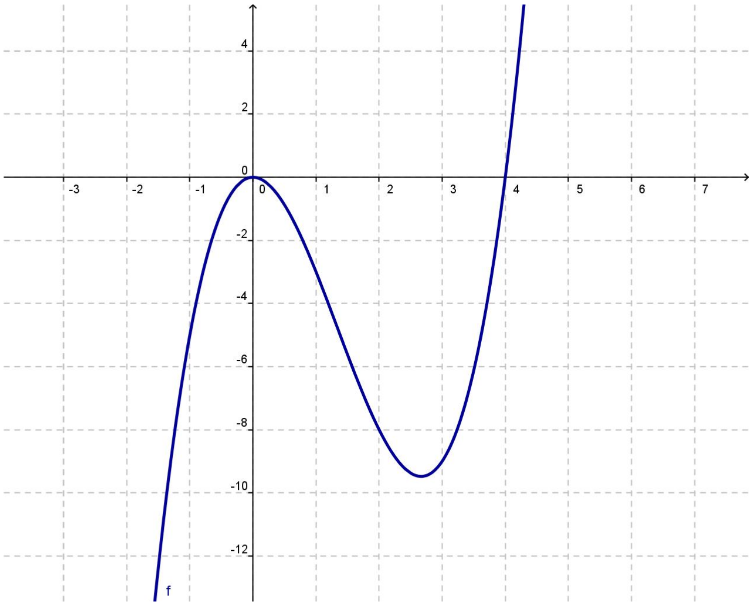
2. példa
Állapítsuk meg az $f(x) = -4x^2 - 8x + 5$ függvény helyi szélsőértékét!

Ha vizsgáljuk a $-4x(x+2)$ függvényt, akkor az előző példához hasonlóan a nullánál nagyobb és a (-2) – nél kisebb tartományokban kimutatható a szigorú monotonitás, tehát szélsőértékre csak a fenti két érték közt számíthatunk. Alkalmazva a számtani és mértani közép összefüggését, adódik $\sqrt{(-x)(x+2)} \leq \frac{(-x)+(x+2)}{2} = 1$. Azaz az eredeti függvényünknek *x* = -1- nél helyi maximuma van, és a maximum értéke 9.



Általában, az $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú függvénynek mindig van helyi (mely egyben nyilván totális is) szélsőértéke, és azt megtalálhatjuk a számtani és mértani közép közti összefüggés alkalmazásával a fenti két példához teljesen hasonló módon. A szélsőérték $x = -\frac{b}{2a}$ - nál lesz és értéke $y = -\frac{b^2}{4a} + c$.

3.példa
Állapítsuk meg az $f(x)=x^3-4x^2$ függvény helyi szélsőértékeit!



$f(x)=x^2(x-4)$. Látható, hogy 4 – nél nagyobb értékek esetén a függvény mindig pozitív, 0 - nál kisebb értékek esetén pedig mindig negatív. Könnyen belátható, hogy ezekben a tartományokban a függvény szigorúan monoton növekvő. A differencia ugyanis

$$\Delta = f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2^3-4x_2^2\right)-\left(x_1^3-4x_1^2\right)=(x_2-x_1)[x_2(x_2-4)+x_1(x_1-4)+x_1x_2],$$

ez pedig $x_1<x_2\le 0$ és $4\le x_1<x_2$ esetén is pozitív, így valóban a függvény szigorú monoton növekvő. Tehát helyi szélsőértékre csak a $0\le x\le 4$ esetben számíthatunk.
Függvényünk szorzat alakja mutatja, hogy $x=0$ bármely ε sugarú környezetében a függvény értékei negatívak, ezért $f(x)=0$ helyi maximum lesz. A minimum megkereséséhez alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést.

$$-f(x)=x^2(4-x)=4\frac{x}{2}\frac{x}{2}(4-x)$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{2}\frac{x}{2}(4-x)}\le\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(4-x)}{3}=\frac{4}{3}$$

Ez azt jelenti, hogy $-f(x)\le\frac{256}{27}$ és ez a tagok egyenlősége esetén, azaz $x=\frac{8}{3}$ nál meg is valósul. Összefoglalva: a függvénynek $x=0$ nál maximuma van $f_{\max}=0$, $x=\frac{8}{3}$ nál pedig minimuma van $f_{\min}=-\frac{256}{27}$

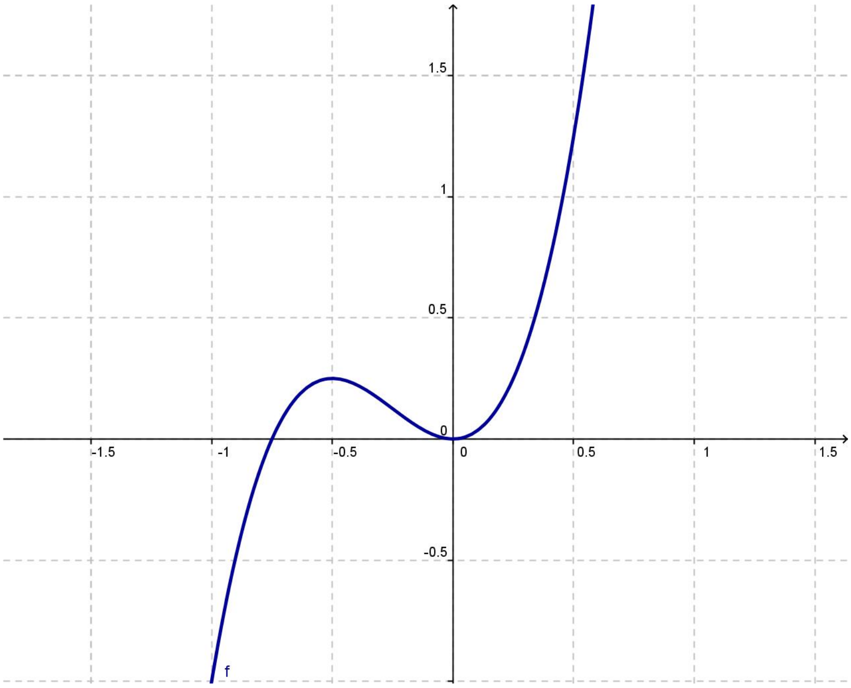
Még vizsgálni kell a $0\le x\le 4$ tartományban a monotonitás viszonyokat is, hiszen a megszorított értelmezési tartományban a megtalált szélsőérték totális is, tehát a tartományon belül további helyi szélsőértékek is lehetnének. De ez nincs így. Az alábbi átalakítás mutatja, hogy ha $0 \le x \le \frac{8}{3}$, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő ha pedig $\frac{8}{3} \le x \le 4$, akkor szigorúan monoton növekvő.

$$\Delta = (x_2 - x_1)[(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 - 4) + x_1(3x_2 - 8)],$$

$$\Delta = (x_2 - x_1)[(x_2 - x_1)^2 + x_2(3x_1 - 8) + 4(x_2 - x_1)].$$

4.példa

Keressük meg az $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ függvény helyi szélsőértékeit!



$f(x) = x^2(4x + 3)$ Látható, hogy ha $x \ge -\frac{3}{4}$ akkor a függvény mindig pozitív és szigorúan monoton növekvő, ha $x \le 0$, mindig negatív és szintén szigorúan monoton növekvő. A szigorú monotonitás a

$$\Delta = f(x_2) - f(x_1) = (4x_2^3 + 3x_2^2) - (4x_1^3 + 3x_1^2) = (x_2 - x_1)[x_2(4x_2 + 3) + x_1(4x_1 + 3) + 4x_1x_2]$$

differencia szorzat előjeléből, a szorzat alak $x_2 \ge x_1$ feltétel melletti vizsgálatával igazolható. Szélsőérték tehát csak $-\frac{3}{4} \le x \le 0$ intervallumban lehet. A 0 hasonlóan az előzőhöz megint szélsőérték hely, most minimum $f_{\min} = 0$. A maximum keresése is úgy megy, mint előbb,

$$\sqrt[3]{(-2x)(-2x)(4x+3)} \le \frac{(-2x) + (-2x) + (4x+3)}{3}$$

Köbre emelés és szorzás után adódik, hogy $f_{\max} = \frac{1}{4}$ és ez $x = -\frac{1}{2}$ nél meg is valósul

Általánosan, az $f(x) = ax^3 + bx^2 = x^2(ax + b)$ függvénynek $x = 0$ nál mindig helyi szélsőértéke van, mégpedig *b* előjelétől függően. Ha *b* negatív, akkor maximum, ha pedig pozitív, akkor minimum.(Ha *b* esetleg 0, akkor szélsőérték nyilván nincs, mert a függvény ilyen esetben triviálisan szigorúan monoton az egész értelmezési tartományon) A másik szélsőérték pedig nyilván a $0 \le x \le -\frac{b}{a}$ illetve ($-\frac{b}{a} \le x \le 0$) keresendő, hiszen máshol a konkrét példához hasonlóan látható, hogy a függvény szigorú monoton.

A szélsőérték megtalálása a számtani és mértani közép összehasonlításával két formában lehet.

$$\text{vagy } f(x) = \frac{4}{a^2}\left(-\frac{ax}{2}\right)\left(-\frac{ax}{2}\right)(ax+b) \text{ alakkal}$$
$$\text{vagy a} - f(x) = -\frac{4}{a^2}\left(\frac{ax}{2}\right)\left(\frac{ax}{2}\right)(-ax-b) \text{ alakkal}$$

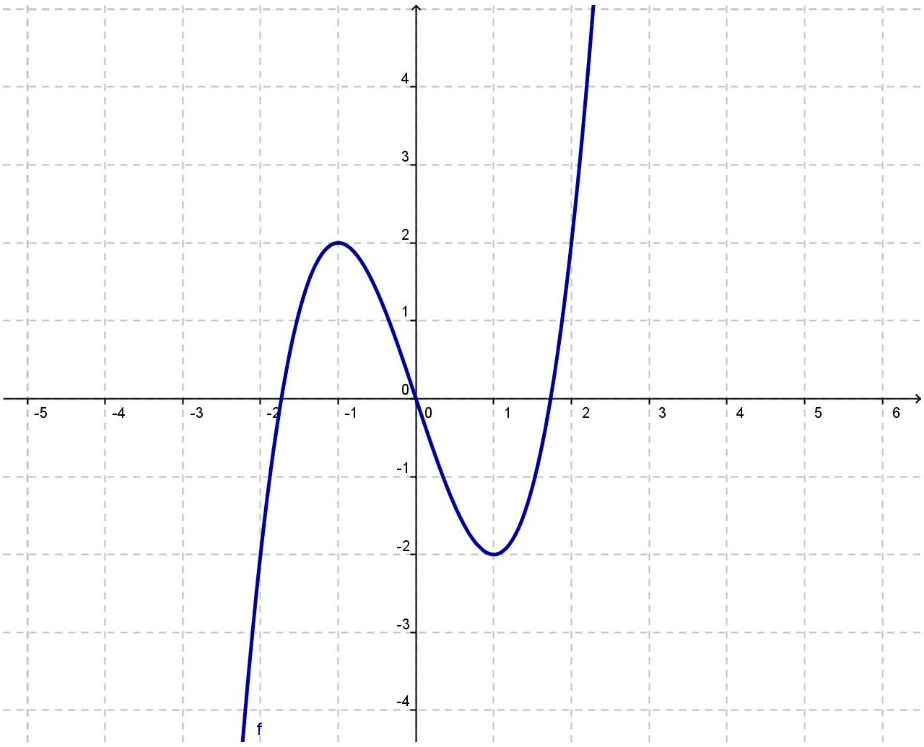
számolva és használva mindig eredményre jutunk. A szélsőérték az alakoktól függetlenül $x = -\frac{2b}{3a}$ nál lesz és értéke pedig $f(x) = \frac{4b^3}{27a^2}$.

Általában az $f(x) = ax^3 + bx$ alakú függvények szigorú monotonok, ha az *a, b* együtthatók előjele megegyezik, . Ilyen esetben tehát szélsőérték nincs. Az *f* függvény valóban monoton, ugyanis a

$$\Delta = f(x_2) - f(x_1) = \left(ax_2^3 + bx_2\right) - \left(ax_1^3 + bx_1\right) = (x_2 - x_1)\left[a\left(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2\right) + b\right]$$

differencia előjele vagy mindig pozitív vagy mindig negatív, feltéve, hogy $(x_2 - x_1)$ pozitív.

5. példa
Állapítsuk meg az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény helyi szélsőértékeit!



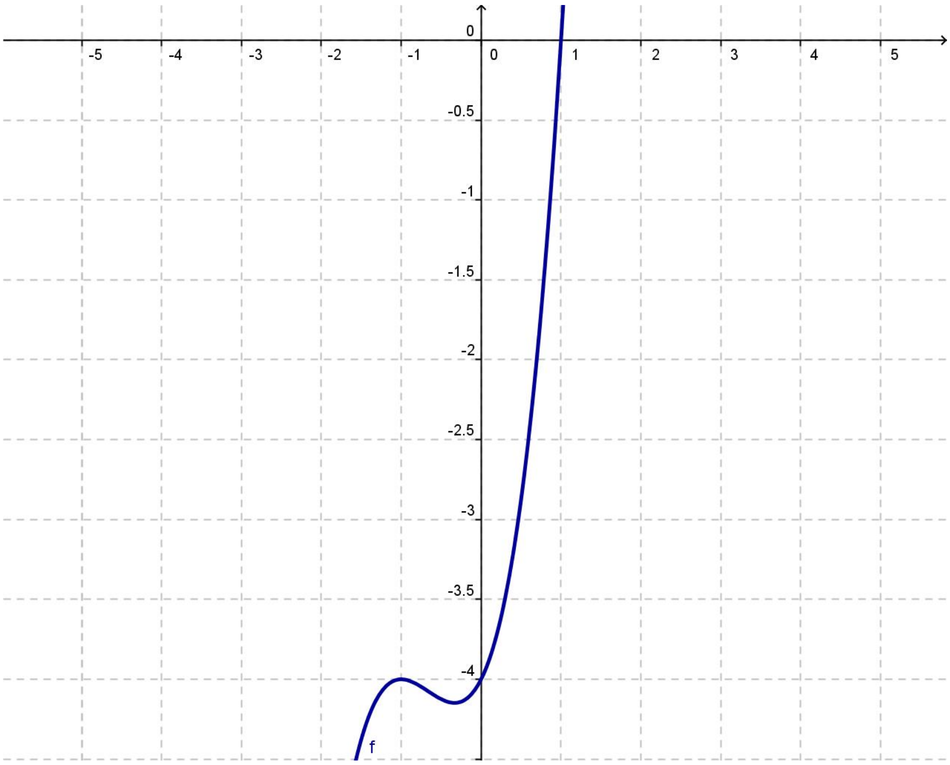
Megfelelő helyettesítéssel a függvényt átalakítjuk az előző esetek valamelyikére. Alkalmazzuk $x = t + 1$ helyettesítést! Ekkor $f(t) = t^3 + 3t^2 - 2$ adódik. Az ilyen típusú függvény szélsőértékeit már ismerjük.

Adódik, hogy t = 0 – nál, azaz x = 1 – nél helyi minimum lesz, melynek értéke $f(t) = -2$ Illetve $f(x) = -2$. A számtani és mértani közép közti kapcsolat használatát most meg is lehet spórolni, mert a függvényünk páratlan, és így a maximum x = -1 nél $f(x) = 2$

Általában, ha a és b ellenkező előjelűek, akkor az $f(x) = ax^3 + bx$ alakú függvények esetében az $x = t + \sqrt{\frac{-b}{3a}}$ helyettesítéssel visszavezethetők egy olyan harmadfokú függvény vizsgálatára, amelyben elsőfokú tag már nincs.

6. példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$ függvényt helyi szélsőértékei szempontjából!



Vezessük be a $x = t - 1$ helyettesítést!

Ekkor $f(t) = t^3 - t^2 - 4$ Ezzel a helyettesítéssel megint csak egy már ismert alakot hoztunk létre. Ennek szélsőértékei t = 0 , azaz x = (-1) nél, illetve a közepek alkalmazása révén $t = \frac{2}{3}$ - nál illetve $x = -\frac{1}{3}$ - nál vannak. A megfelelő szélsőértékek pedig $f_{max} = -4$ $f_{min} = -\frac{112}{27}$

Általában, az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvény szélsőértékeit úgy keressük meg, hogy alkalmazzuk azt az $x = t + k$ helyettesítést, amelynél az első fokú tag kiesik.

$$f(t) = a(t+k)^3 + b(t+k)^2 + c(t+k) + d = at^3 + (3ka + b)t^2 + (3ak^2 + 2bk + c)t + (ak^3 + bk^2 + ck + d)$$

Nyilván a szóban forgó helyettesítés akkor eredményes, ha *t* együtthatója lehet egyenlő 0 – val. Ami azt jelenti, hogy a *k* – ra nézve másodfokú egyenletnek van megoldása. Ez az egyenlet $D = 4b^2 - 12ac$ diszkriminánsán múlik. Ha ez nemnegatív, akkor a kérdéses helyettesítés megvalósítható. Tehát a diszkrimináns előjelétől függően 3 eset lehetséges.

Ha *D* pozitív, akkor a helyettesítésre két lehetőség is van, és mindkét esetben olyan *k* adódik, amikor a fenti példához hasonló módon olyan függvény keletkezik, melyben már csak harmad- és másodfokú tagok szerepelnek, tehát szélsőérték létezik és meg is határozható elemi úton.

Ha *D* = 0, akkor a helyettesítés után olyan alak adódik, melyből még a másodfokú tag is kiesik.

$f(t) = at^3 - \frac{b^2 - 3ac}{3a} t^2 +$ konstans, ami azt jelenti, hogy $f(t)$ és vele $f(x)$ is az egész értelmezési tartományon triviálisan szigorúan monoton lesz.

Ha *D* negatív, akkor helyettesíteni nem lehet. Ilyenkor is megmutatható, hogy $f(x)$ szigorúan monoton. Ugyanis, ha $x_2 > x_1$, akkor

$\Delta = f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\left[a\left(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2\right) + b(x_2 + x_1) + c\right]$ második tényezője mindig azonos előjelű. Ha rögzítjük az egyik változót, akkor a másik változóra nézve másodfokú kifejezés diszkriminánsa a következő:

$$D' = -3a^2 x_1^2 - 2abx_1 + b^2 - 4ac.$$

Ha ez mindig negatív, akkor a készen vagyunk. Ez viszont az ő diszkriminánsától függ, amely

$$D'' = 16a^2\left(b^2 - 3ac\right).$$

Az összehasonlítás kedvéért vizsgáljuk most *f(x)* derivált függvényét, és nézzük meg zérushelyeit.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy e függvénynek létezzenek zérushelyei.
A diszkrimináns ugyanaz lesz, mint az előbb, ami a differenciálszámításból adódó és az elemi átalakításból következő megoldások teljes algebrai ekvivalenciáját jelenti.

Feladatok

1. Helyes-e az alábbi állítás és indoklás?
   Vizsgáljuk az $f(x)=2x-2x^3$ függvényt! Vegyük észre, hogy ha $0 \le x \le 1$, akkor alább f szorzat alakjának tényezői nemnegatívak, így alkalmazható a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség:
   $$f(x) = x \cdot (x+1) \cdot (2-2x) \le \left(\frac{x+(x+1)+(2-2x)}{3} \right)^3 = 1^3 = 1,$$
   tehát f lokális maximuma a [0;1] intervallumban 1.

2. Legyen egy egyenes körkúp magasságának és alapköre átmérőjének összege 10 egység. E kúpok közül melyik a maximális térfogatú?

3. Az $f(x) = -x^2 + 4$ függvény görbéjéhez rajzoljunk olyan téglalapot, melynek 2 csúcsa az x-tengelyen van, másik két csúcsa pedig a görbén helyezkedik el. E téglalapok közül melyik a maximális területű?

4. Az egységnyi testátlójú négyzetes oszlopok közül melyik a maximális területű?

5. Egy 100 négyzetegység területű négyzet alakú kartonpapírból dobozt hajtogatunk úgy, hogy a sarkoknál egybevágó kis négyzeteket vágunk le belőle, és a maradék részeket merőlegesen felhajlítjuk. E felül nyitott, téglatest alakú dobozok közül melyik lesz maximális térfogatú?

6. Mozogjon egy **P** pont az egységnégyzet egyik átlóján. A **P** pont tetszőleges helyzetében húzzunk a **P** ponton át a négyzet oldalaival párhuzamosokat. Így két négyzet és két téglalap keletkezik. Emeljünk a négyzetek fölé kockát, a téglalapok fölé pedig valamelyik négyzet oldalával megegyező magasságú téglatestet. A **P** pont mely helyzetében lesz a testek térfogatösszege minimális?

7. Vannak – e az alábbi függvényeknek helyi szélsőértékei?

$$f(x) = \frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1}{x^3}$$

$$f(x) = \sin^3 x - 2\sin^2 x + 1$$