Egyenletek megoldása az analízis elemeinek felhasználásával

I. Az injektivitás alkalmazása az egyenletek megoldásában

Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $\left(x^2+x-2\right)^3+x^2-2=x^3$ b) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2-4x+4}=x^2-5x+4$

c) $l\,og_2(x-1)-\log_2(x^2-2x)=x^4-4x^3+3x^2+2x-1$

d) $9^{\sin x\cdot\cos x}-3^{\sin x}\cdot\left(\sqrt[9]{9}\right)^{tgx}=\left(\frac{2}{9}tgx+\sin x\right)^3-\left(\sin 2x\right)^3$

e) $x^2-x-1=2^x-\log_2\left(x^2+2^x\right)$ (x>0) f) $\sqrt[5]{x^3+2x}=\sqrt[3]{x^5-2x}$

II. Konvex, konkáv tulajdonság szerepe a megoldásban

Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $6\cdot 2^x-10=7x$

b) b) $9^x-8x\cdot 3^x+2\cdot 3^x+12x^2-3=0$

c) $13\cdot\sqrt[4]{5x+1}=13x^2-246x+647$

d) $2^{x+1}-1=\log_3(13x+14)$

e) $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-1}}}=2^{x-1}-1$

f) $\left(2^x-1\right)^2=\log_2\left(\sqrt{x}+1\right)$

III. A monotonitás szerepe a megoldásban

Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $3^{x+1}+5^{x+1}=8$

b) b) $25^x+(x-9)5^x+18-3x=0$

c) c) $6^x+5^x+4^x=7^x+8^x$

d) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}=\log_2(6-x)$

e) $\sqrt{x+12}-\sqrt{x+5}=10^{2x-7}-9$

f) $2^x+3^x+6^x=x^2$

IV. Inverz függvény használata az egyenlet megoldásában

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x}-2=\sqrt[3]{x-8}$

b) b) $\left(5^x-21\right)^{\log_2 5}=2^x+21$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$a)$ $\sqrt{x+5}=x^2-5$

$b)$ $\sqrt{2x+7}=\dfrac{x^2-7}{2}$

$c)$ $x^2+6x+7=\sqrt{x+5}$

$d)$ $\left(2+x\right)^{\log_2 3}-(3+x)^{\log_3 2}=1\ x\in\ ]-2;\infty[$ ($Dan\ Negulescu$, $Matematikai$ Olimpia, $Braila$ 2001.)

$e)$ $\left(3^{\frac{x}{4}}-1\right)^2=\log_{\sqrt[4]{3}}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$f)$ $\left(x^3-6\right)^3=6+\sqrt[3]{x+6}$

$g)$ $x=\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4x}}}$