Szélsőérték feladatok megoldása elemi geometriai eszközökkel

I. Bevezető, egyszerű feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint ugyanezen oldal bármely pontjának a másik két oldaltól mért távolságösszege!

2. Az *O* középpontú körnek *O*-tól különböző belső pontja a *P*. A körvonal mely *K* pontjára lesz az *OKP* szög a legnagyobb ?

3. Egy negyedkörbe téglalapot írunk, melynek egyik csúcsa körívre, egy-egy csúcsa a határoló sugarakra, a negyedik csúcsa kör középpontjába illeszkedik. Az ilyen téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

4. Azt tudjuk a Pitagorasz-tételből és annak megfordításából, hogy az *ABC* háromszög g szöge akkor és csak akkor derékszög, ha az oldalaira fennáll, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.
   a) Bizonyítsuk be, hogy g akkor és csak akkor hegyesszög, ha $a^2 + b^2 > c^2$!
   b) Bizonyítsuk be, hogy g akkor és csak akkor tompaszög, ha $a^2 + b^2 < c^2$!

5. Adott egy *e* egyenes és egyik az egyik oldalán két különböző pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen azt a P pontot, mely esetén az APB törött vonal hossza minimális. (Héron problémája)

II. Geometriai transzformációk, kerületi, középponti szögek

6. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek területe 12 területegység, egyik oldala 6 egység. Mekkora ezen háromszögek közül a legkisebb kerülete?

7. Legalább mekkora egy olyan trapéznak a kerülete, melynek alapjai 10 cm és 20 cm hosszúak, magassága 12 cm?

8. Határozzuk meg az alábbi függvények minimum helyét!
   a) g: $R \to R$, g(x)= $\sqrt{x^2 - 8x + 41} + \sqrt{x^2 - 2x + 37}$
   b) f: $R \to R$, f(x)=$\sqrt{2x^2 - 2x + 13} + \sqrt{2x^2 - 10x + 17}$
   c) h: $R \to R$, h(x)= $\sqrt{2x^2 + 2x + 13} + \sqrt{2x^2 - 24x + 80}$

9. Egy 3 dm magas egyenes henger alakú üvegedény tengelyének *O* felezőpontjára szimmetrikusan helyezkedik el egy hangya (*H*) és egy mézcsepp (*M*), méghozzá a hangya kívül a mézcsepp belül. A hangyának át kell másznia az edény peremén, hogy a mézcseppet elérje. Számítsuk ki a legrövidebb utat a hangya számára, ha a hangya 0,5 dm-re van az edény alapkörétől, melynek kerülete 6 dm!

10. Egy katonának meg kell győződnie arról, hogy valamely egyenlő oldalú háromszög alakú terep –határvonalát is beleértve- aknamentes-e. Észlelő berendezésének hatósugara egyenlő a háromszög magasságának a felével. Milyen utat kell választania, hogy a terepet a legrövidebb úton haladva vizsgálhassa át?

11. Adott egy kocka élén egy, a csúcsoktól különböző pont. Tekintsük azokat a síkokat, amelyek átmennek az adott ponton és hatszögben metszik a kockát. Melyik sík esetén lesz ez a metszethatszög a legkisebb kerületű? Mekkora ez a kerület, ha a kocka éle 1 egység?

12. Egy téglalap oldalai 12cm illetve 9cm hosszúak. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapba írható négyszögek kerülete legalább 30cm!

13. a) Adott az *ABCD* húrnégyszög. Szerkesszünk olyan négyszöget, amelynek csúcsai az *ABCD* négyszög oldalain vannak és kerülete minimális!
    b) Lehet-e ez a négyszög érintőnégyszög?

14. Adott a síkon egy konvex szögtartomány és a belsejében egy pont. Szerkesszük meg azt az egyenest, amely átmegy a ponton és a legkisebb területű háromszöget vágja le a szögtartományból!

15. Az *ABC* háromszög beírt körének középpontja legyen *O*! Vegyünk fel az *O*-n keresztül olyan e egyenest, mely a *BC* oldalt *D*, az *AC* oldalt *E* belső pontban metszi! Bizonyítsuk be, hogy $T_{DCE} \geq 2r^2$, ahol T_{DCE} a *DCE* háromszög területe, *r* az *ABC* háromszög beírt körének sugara!

16. Adott a síkon egy konvex szögtartomány, a belsejében pedig a *P* pont. Legyen *e* egy olyan egyenes, mely keresztül megy a *P* ponton és a két szöszárat *B*, ill. *C* pontban metszi! Az e egyenes milyen helyzete esetén lesz az $\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}$ összeg maximális?

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög egyik középvonala egyenlő a végpontjaira nem illeszkedő oldalak számtani közepével, akkor a négyszög trapéz!

18. Bizonyítsuk be, hogy ha az *ABCD* négyszög területére fennáll, hogy $T=\frac{AB+CD}{2}\cdot\frac{AD+BC}{2}$, akkor a négyszög téglalap!

19. Egy paralelogramma kerülete *K*, az oldalak felezőpontja által meghatározott négyszög kerülete *k*. Legalább mekkora a $\frac{k}{K}$ hányados, ha a paralelogramma hegyesszöge 60°?

20. Azon háromszögek közül, amelyek egyik szöge a, a vele szemközti oldala a, szerkesszük meg a legnagyobb kerületűt!

21. Egy egységsugarú körbe írt *n* oldalú konvex sokszög tartalmazza a kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy a kerülete legalább 4!

22. Állítsunk az *ABC* háromszög *AB* oldalára kifelé négyzetet, amelynek középpontja legyen *O*. Legyen *M*, illetve *N*, a *BC* és az *AC* oldalak felezési pontja. Jelölje *a* illetve *b* az oldalak hosszát! Adott *a* és *b* esetén mely háromszögre teljesül, hogy *OM*+*ON* a legnagyobb?

23. Adott a síkon egy konvex szög, melynek szárai *e*, illetve *f*, csúcsa *O* . Adott a szögtartományban egy *P* pont. Határozzuk meg az *e* szögszár azon *A*, illetve az *f* szögszár azon *B* pontját, melyre teljesül, hogy $OA=OB$ és $PA+PB$ minimális!

24. Legyen *ABC* egyenlő oldalú háromszög, *M* pedig a síkjában egy pont. Bizonyítsuk be, hogy $MA \leq MB+MC$! Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *M* rajta van az *ABC* háromszög köré írt körének A-t nem tartalmazó BC ívén! (Pompeiu-tétel)

25. A sík mely pontjaira teljesül, hogy azokat összekötve egy, a síkon lévő szabályos háromszög csúcsaival, a kapott szakaszokból háromszög szerkeszthető?

26. Az *ABC* háromszög minden szöge kisebb 120°-nál. A síkjának mely pontjára teljesül, hogy a csúcsoktól mért távolságainak az összege minimális?

27. Mi a válasz az előző kérdésre, ha a háromszög egyik szöge 120°, ill. ha nagyobb 120°-nál?

28. Legyen *ABC* egy adott k körbe írt hegyesszögű háromszög, *P* a háromszög síkjának azon pontja, amelyre $PA+PB+PC$ összeg minimális. Jelölje ezt a minimumot m! Mely háromszög esetén lesz ez az összeg maximális?

29. Két, egymást metsző kör egyik metszéspontján át egyeneseket húzunk. Határozzuk meg azt az egyenest, amelyből kimetszett húrok hosszának az összege maximális!

30. Adott egy *ABC* hegyesszögű háromszög. Szerkesszük meg azt a szabályos háromszöget, amelynek egy-egy oldala illeszkedik az *A*, *B* és *C* pontokra és a területe a lehető legnagyobb!

31. Legyenek egy konvex négyszög oldalai ebben rendre *a*, *b*, *c* és *d*, átlói *e*, *f* ! Bizonyítsuk be, hogy $ef \leq ac+bd$!

32. Legyenek egy konvex négyszög oldalai ebben rendre *a*, *b*, *c* és *d*, valamint területe *T*. Bizonyítsuk be, hogy $2T \leq ac+bd$!