Inverzió

1. Adott egy kör a középpontjával, és még egy további pont. Szerkeszd meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét!

2. Adott egy kör a középpontjával, és még egy további pont. Szerkeszd meg az adott pont adott körre vonatkozó inverz képét csak körzővel!

3. Adott két pont. Szerkeszd meg a

a) felezőpontjukat;

b) harmadolópontjaikat

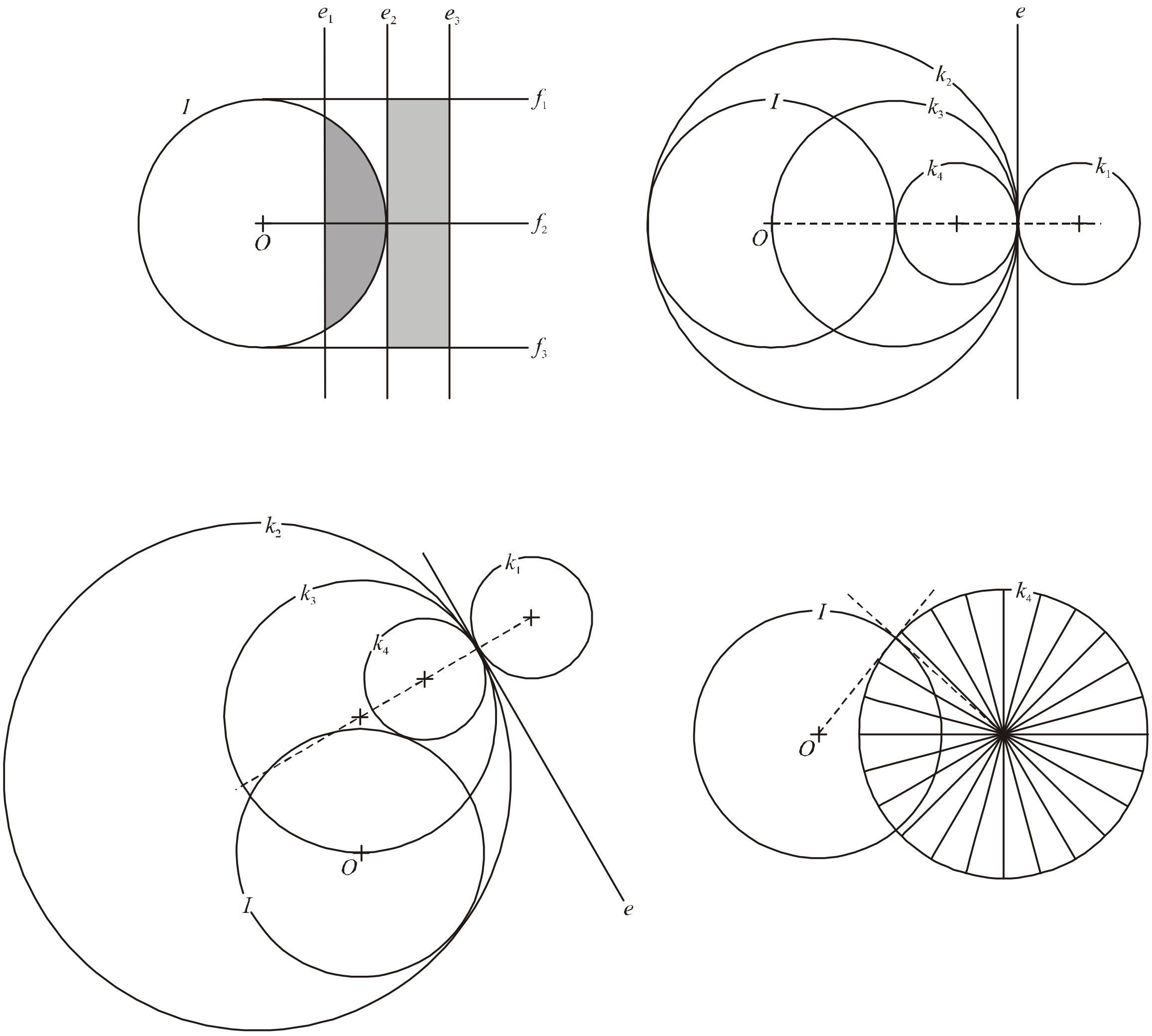
csak körzővel!

4. a) Adott egy kör a középpontjával, és adott még egy egyenes is. Szerkeszd meg az egyenes körre vonatkozó inverz képét csak körzővel! Oldd meg a feladatot abban az esetben is, amikor az egyenes csak két pontjával van megadva (és nem megy át az inverzió centrumán).

b) Adott két egyenes két-két pontjával. Szerkeszd meg a metszéspontjukat csak körzővel!

c) Bizonyítsd be, hogy bármely szerkesztés, ami körzővel és vonalzóval elvégezhető, az elvégezhető csak körzővel is!

5. Készíts vázlatot az alábbi ábrák *I* körre vonatkozó inverz képéről!



6. Adott a K és az L kör. Bizonyítsd be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek (*körök merőlegessége*)!

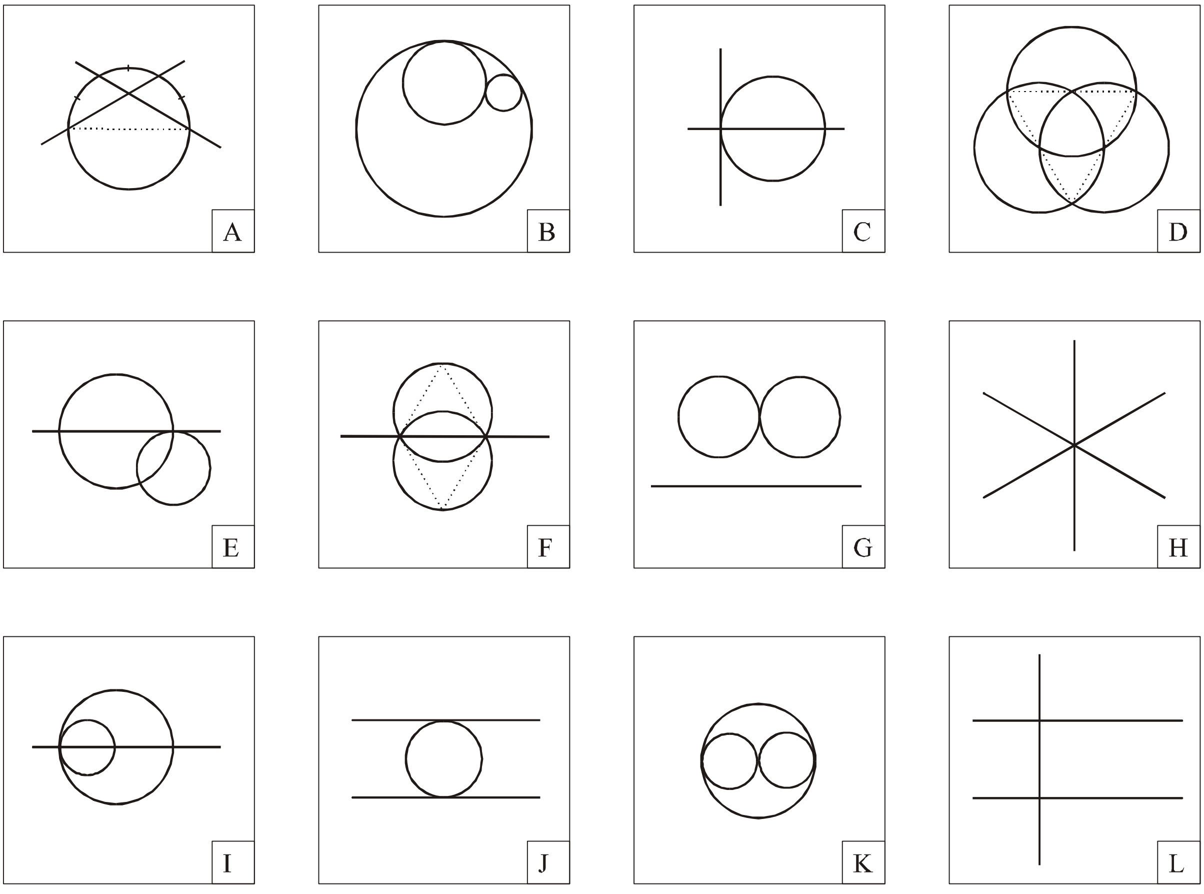
A) K és L metszi egymást, és bármelyik metszéspontban a körök érintői merőlegesek egymásra.
B) K középpontjából az L-hez húzott érintő érintési pontja a K körön van.
B') L középpontjából a K-hoz húzott érintő érintési pontja az L körön van.
C) A körök R_K, R_L sugaraira és középpontjaik d távolságára $R_K^{\,2} + R_L^{\,2} - d^{\,2} = 0$.
D) A K-ra vonatkozó inverziónál L fix.
D') Az L-re vonatkozó inverziónál K fix.
E) L-nek van két olyan (egymástól különböző) pontja, amelyek a K-ra vonatkozó inverziónál kicserélődnek.
E') K-nak van két olyan (egymástól különböző) pontja, amelyek az L-re vonatkozó inverziónál kicserélődnek.

7. Adott három kör. Szerkessz olyan kört, amelyik mind a háromra merőleges!

8. a) Bizonyítsd be, hogy két egyenes szöge megegyezik az inverziónál származtató képeik szögével!
b)Bizonyítsd be, hogy az inverzió szögtartó (azaz bármely két kör vagy egyenes szöge megegyezik képeik szögével)!

9. Adott a síkon három különböző pont: A, A' és B. Határozd meg a sík összes olyan B' pontját, amelyhez van olyan inverzió, amely A-t A'-be, B-t pedig B'-be viszi.

10. Kösd össze azokat az ábrákat, amelyek megkaphatók egymásból egy inverzió és egy egybevágóság alkalmazásával! (A pöttyözött vonalak csak segédvonalak)



11. a) Adott egy pont és két kör (a körök bármelyike, akár mindkettő lehet egyenes is). Szerkessz kört, amely átmegy a ponton és érinti a két adott alakzatot!

b) Adott három kör (a körök bármelyike, akár mindhárom lehet egyenes is). Szerkessz kört, amely érinti mindhárom adott alakzatot!

12. Az $AB=d$ átmérőjű L félkörbe írt $r = d/4$ sugarú K kör érinti a félkörívet és az AB átmérőt is. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely érinti a félkörívet, az átmérőt és a K kört is!

13. A K_1, K_2, K_3, K_4 körök ciklikus sorrendben érintik egymást: K_1 és K_2 érintési pontja P_{12}, K_2-é és K_3-é P_{23}, K_3-é és K_4-é P_{34}, végül K_4 és K_1 érintési pontja P_{41}. Bizonyítsd be, hogy a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} érintési pontok egy körön vannak!

14. Egy r sugarú kört invertálunk egy R sugarú körre. A két középpont távolsága d. Határozd meg a kör képének sugarát és középpontjának távolságát az inverzió centrumától!

15. Bizonyítsd be, hogy ha egy érintőnégyszög csúcsait invertáljuk a beírt körre, akkor az érintési pontok alkotta sokszög oldalfelezőpontjait kapjuk!

16. a) Bizonyítsd be, hogy bármely háromszögben

$$R^2 - d^2 = 2\cdot R\cdot r,$$

ahol R a körülírt kör, r a beírt kör sugarát, d pedig a középpontok távolságát jelöli!

b) Írj fel hasonló összefüggést a háromszög körülírt, az egyik oldalához hozzáírt körének sugara és középpontjaik távolsága között!

c)*. Hasonló összefüggés állítható fel azoknál a négyszögeknél, amelyek egyszerre húr- és érintő-négyszögek is. Keresd meg az összefüggést és igazold is!

17. Adott egy pont és véges sok a pontra illeszkedő különböző sugarú kör. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor van olyan kör, amely az összes előre adott kört érinti, ha az előre adott körök külső hasonlósági pontjai egy egyenesre illeszkednek!

18. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. A beírt kör az oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti, középpontja O_1. $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja M_1. Igazoljuk, hogy az O, O_1, M_1 pontok egy egyenesen vannak. (Kürschák verseny, 1997)

19. Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján. (Kürschák verseny, 2000)

20. Legyen adva a K kör és az A, B pontpár. Az f transzformáció a K kör AB egyenesre nem illeszkedő pontjainak halmazát képezi le önmagára a következőképpen: ha $P \in K \setminus AB$ és az AP egyenes és K másik metszéspontja P^*, akkor a P^*B egyenes és K másik metszéspontja $f(P)$. Bizonyítsd be, hogy ha valamely n pozitív egész számra f^n-nek van fixpontja, akkor f^n identikus!

21. Adott egy kör és három pont. Szerkessz olyan kört, amelynek körülírt köre az adott kör, oldalegyenesei pedig az adott pontokon mennek át! Általánosítsd a problémát n pontra és húr-n-szögre!

22. a) Legyen A és A' egy pont és a képe a K körre vonatkozó inverziónál. Bizonyítsd be, hogy az inverzió alapkörén ($M \in K$) az $AM/A'M$ arány értéke állandó!

b) Bizonyítsd be, hogy az A, B pontpár Apollóniusz-körei pontosan azok a körök, amelyekre vonatkozó inverziók A-t és B-t egymásra képezik!

23. Adott egy kör és rajta az A és a B pont. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, amelyek egyike A-ban, másika B-ben érinti az adott kört, egymást pedig (egy előre nem adott) M pontban érintik. Határozd meg az így adódó M pontok mértani helyét!

24. a) Adott két érintkező kör. Egy harmadik kör az egyik adott kört az A pontban , a másik adott kört a B pontban érinti. Bizonyítsd be, hogy az így adódó AB egyenesek mind átmennek egy bizonyos ponton, vagy mind párhuzamosak!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör érinti egymást?

25. A K és az L kör egyik metszéspontja A. A két kör e és f közös érintőin az érintési pontok E_K és F_K, illetve E_L és F_L. Bizonyítsd be, hogy az E_KF_KA és az E_LF_LA háromszög körülírt köre érinti egymást!

26. Adott az A pont és a K kör. Mutasd meg, hogy mindazok a körök, amelyek átmennek A-n és K-t egy átmérő két végpontjában metszik tartalmaznak még egy közös pontot!

27. a) Adott két egymást metsző kör. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, amelyek mindkét kört érintik és egymást is érintik (egy előre nem adott) M pontban. Határozd meg az így adódó M pontok mértani helyét!

b) Lényeges-e, hogy a két adott kör metszi egymást?

28. Az I, K, K' körök és az A, B, A', B' pontok elrendezése olyan, hogy az I körre vonatkozó inverziónál K képe K', A képe A', míg B képe B', a K-ra vonatkozó inverzió pedig A-t B-nek felelteti meg. Igaz-e, hogy a K'-re vonatkozó inverziónál A' és B' egymás képei?

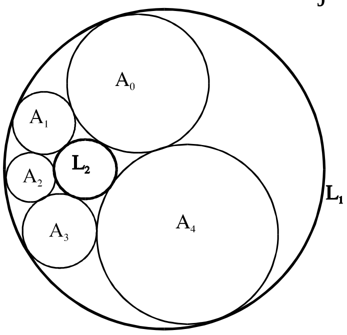
29. Adott két kör. Szerkessz két olyan pontot, amelyek mindkét pontra vonatkozó inverziónál kicserélődnek!

30. Adott a síkon a k kör és egy P pont. Felveszünk egy G_x gömböt, amely (felületén) tartalmazza a k kört és a P pontból érintőkúpot rajzolunk G_x-hez. A kúp egy k_x körvonalon érinti G_x-et. Jelölje k_x középpontját P_x. Képzeljük el G_x összes lehetséges helyzetét és határozzuk meg P_x mértani helyét a térben!

31. Adottak az egymást metsző nem azonos sugarú K, L körök a síkon (K és L egyike lehet egyenes is). Tekintsük a K és L által határolt négy síkbeli tartomány egyikében az összes olyan kört, amely érinti K-t és L-t. Mutassuk meg, hogy a síkon van olyan pont, amelynek e körök bármelyikére (nem K-ra és L-re!) vonatkozó hatványa egyenlő!

32. Bizonyítsd be, hogy bármely két közös pont nélküli kör koncentrikus körökbe invertálható!

33. Steiner Poriszmája néven ismeretes az alábbi tétel:



Adott két kör L_1 és L_2, amelyek nem érintik egymást. Egy L_1-t is L_2-et is érintő A körből kiindulva képezhető köröknek egy sorozata:

—A_0 legyen maga A;

—az A_1 kör érintse L_1-t is L_2-t is és A_0-t is;

—általában A_{k+1} érintse L_1-t, L_2-et és A_k-t.

Állítjuk, hogy ha valamely n-re $A_n = A_0$ -azaz visszaérünk-, akkor bármely A körből kiindulva n lépésben visszaérünk.

34. Adott két koncentrikus kör, k_1 és k_2, sugaraik R_1 és R_2. Tekintsünk az összes lehetséges módon két olyan kört, l_1-et és l_2-t, amelyek mindkét előre adott kört érintik, egymást is érintik (egy előre nem adott) M pontban, és a két adott kör közti körgyűrűben helyezkednek el. Láttuk, hogy az így adódó M pontok mértani helye egy m kör.
a) Bizonyítsd be, hogy az m-re vonatkozó inverzió egymásba képezi k_1-et és k_2-t!
b) Határozd meg m sugarát!

35. Bizonyítsd be, hogy Steiner Poriszmájában az A_i körök középpontjai egy ellipszisen, az A_i, A_{i+1} körök érintési pontjai egy k körön helyezkednek el, és az A_i, A_{i+1} körök középpontjait összekötő egyenes érinti k-t!

36. Tekintsük azt a három kört, amelyek érintik egy háromszög három hozzáírt körét, méghozzá egyet önmagukon belül, kettőt pedig kívül. Bizonyítsd be, hogy ennek a három körnek van közös pontja!

37. Határozd meg az $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ egyenletű alakzat $x^2 + y^2 - 1 = 0$ körre vonatkozó inverz képének egyenletét! Ennek alapján újra igazold, hogy az inverzió önmagára képezi a körök és egyenesek halmazát!

38. Állítsd elő a tengelye tükrözést inverziók kompozíciójaként!

39. Ha adott a sík tetszőleges A_1 és A_1' pontja, akkor létezik olyan egybevágósági transzformáció, amely A_1-et A_1' -re képezi. Nem nehéz megadni olyan A_1, A_2 és A_1', A_2' pontpárokat, amelyekhez nincs olyan egybevágóság, amely A_1-et A_1' -re, és egyúttal A_2-t A_2' -re képezi.
Bárhogy is adottak a síkon az A_1, A_2, A_1', A_2' pontok, mindig van olyan hasonlósági transzformáció, amely A_1-et A_1' -re, és egyúttal A_2-t A_2' -re képezi. Nem nehéz megadni olyan A_1, A_2, A_3 és A_1', A_2', A_3' ponthármasokat, amelyekhez nincs olyan egybevágóság, amely A_1-et A_1' -re, A_2-t A_2' -re és egyúttal A_3-at A_3' -ra képezi.
Határozd meg azt a maximális n pozitív egészt, amelyre bárhogyan is adottak a síkon az A_1, A_2, ..., A_n, A_1', A_2', ..., A_n' pontok, mindig van inverzióknak olyan kompozíciója, amely A_1-et A_1' -re, A_2-t A_2' -re, ..., és egyúttal A_n-et A_n' -re képezi!

40. A sík egybevágóságai megőrzik az A és a B pont közötti AB távolságot. A hasonlóságok megőrzik az A, B, C ponthármas $(ABC) = AC/CB$ osztóviszonyát és az $ACB\angle$ nagyságát. Komplex számokkal ez a két mennyiség egyszerre is leírható. Ha a három pontnak megfelelő három komplex szám z_1, z_2 és z_3, akkor hasonlósági transzformációnál megmaradó mennyiség az

$$\left(z_1, z_2, z_3\right) = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$$

komplex osztóviszony. Hogyan kell a sík négy pontjához olyan mértéket rendelni, amely invariáns az inverziókra?

41. a) Mutasd meg, hogy három komplex szám osztóviszonya (lásd az előző feladatot) pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre illeszkednek!

b) A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok *kettősviszonya* a

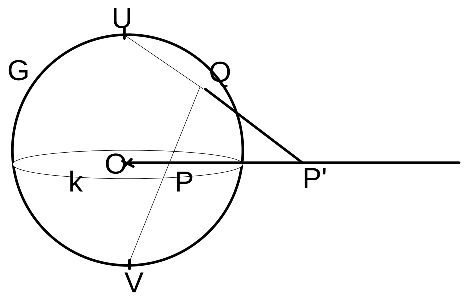
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

komplex szám. Bizonyítsd be, hogy a kettősviszony a hasonlósági transzformációkra és az inverzióra nézve is invariáns! Mutasd meg, hogy négy komplex szám kettősviszony pontosan akkor valós, ha a komplex számsíkon egy egyenesre vagy körre illeszkednek!

42. Ha adott a síkon az A_1, A_2 és az A_1', A_2' pontpár úgy, hogy $A_1A_2 = A_1'A_2' \neq 0$, akkor pontosan két olyan egybevágósági transzformáció van, amely A_1-et A_1' -re, és egyúttal A_2-t A_2' -re képezi. Ezek egyike irányítástartó, a másik megfordítja az irányítást.
Ha adottak a síkon az A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3' pontok úgy, hogy $(A_1A_2A_3) = (A_1'A_2'A_3') \notin \{0, \infty\}$ és $A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle$, akkor mindig van olyan hasonlósági transzformáció, amely A_1-et A_1' -re, A_2-t A_2' -re és egyúttal A_3-at A_3' -ra képezi. Ha $A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle \notin \{0, \pi\}$, akkor pontosan egy, ha $A_1A_2A_3\angle = A_1'A_2'A_3'\angle \in \{0, \pi\}$, akkor pontosan két ilyen transzformáció van: a kettő egyike irányítástartó, a másik megfordítja az irányítást.
Dolgozz ki hasonló elméletet inverziók kompozíciójával kapcsolatban!

43. Bizonyítsd be, hogy a z komplex szám képe az origó középpontú egységsugarú körre az $1/\bar{z}$ komplex szám! Add meg a ξ középpontú (ξ tetszőleges komplex szám) R sugarú körre vonatkozó inverzió képletét!

44. Bizonyítsd be, hogy az inverzió a sztereografikus vetítésből az alábbi módon származtatható: Tekintsük azt a G gömböt, amelynek k a főköre, legyen ennek a gömbnek a két k-tól legtávolabbi pontja V és U. Vetítsük síkunkat először V-n át G-re, majd G-t az U ponton át vissza a síkra. E két leképezés kompozíciója a síkot önmagára képezi és éppen a k-ra vonatkozó inverziót adja.



45. Legyen adva az I tetszőleges kör vagy egyenes, továbbá az A és a B pont. Vegyünk fel egy tetszőleges olyan K kört vagy egyenest, amely merőleges I-re. Jelölje K és I metszéspontjait (amelyek közül az egyik lehet a "végtelen távoli" pont) X és Y. Bizonyítsuk be, hogy A és B pontosan akkor egymás képei az I-re vonatkozó inverziónál, ha $(XYAB) = -1$!

46. Értelmezzük a gömbön az inverziót az előző feladat állítása alapján! Azaz az S gömb A és B pontja akkor legyen egymás képe az S gömbre illeszkedő k körre vonatkozólag, ha az AB főkör merőleges k-ra, és X, Y metszéspontjaikkal $(XYAB) = -1$.
Legyen az S gömb két tetszőleges átellenes pontja U és V, felezőmerőleges síkjuk Σ. Jelölje k, A és B képét az S-t Σ-ra képező U centrumú sztereografikus projekciónál k', A' és B'. Bizonyítsd be, hogy A és B pontosan akkor egymás képei a k-ra vonatkozó gömbi inverziónál, ha A' és B' egymás képei a k'-re vonatkozó inverziónál (tükrözésnél)!

47. (Hubai Tamás problémája) Milyen felületet kell az egységkörre építeni ahhoz, hogy magasról ránézve épp a kör külsejének inverz képét lássuk rajta?

Az euklideszi és hiperbolikus geometria axiomatikus tárgyalása után ajánlott:

A Poincaré-féle körmodell

Tekintsünk egy *K* kört. Modellünk pontjai e körlap belső pontjai (ezek nevezzük ezentúl a hiperbolikus sík pontjainak). Modellünk egyenesei (a hiperbolikus egyenesek) a *K* körre merőleges körök és egyeneseknek a körlapon belüli részei. A hiperbolikus egyenesekre való hiperbolikus tengelyes tükrözések a hiperbolikus egyenesnek megfelelő körre (egyenesre) vonatkozó inverzió (ill. szokásos tengelyes tükrözés).

48. Mutassuk meg, hogy a hiperbolikus tükrözés valóban önmagára képezi a modell ponthalmazát!

49. Mutassuk meg, hogy bármely két hiperbolikus ponton át pontosan egy hiperbolikus egyenes húzható. Adjunk szerkesztési eljárást is! Igazoljuk az állítást arra az esetre is, amikor a két pont bármelyike, akár mind a kettő, *K* határvonalán van!

50. Mutassuk meg, hogy bármely ponton át, bármely azt nem tartalmazó egyeneshez több (a hiperbolikus síkon) diszjunkt hiperbolikus egyenes is húzható! Mutassuk meg, hogy mindig két "elpattanó" hiperbolikus egyenes van, azaz olyan hiperbolikus egyenes, amely átmegy az adott ponton és csak *K* határvonalán van közös pontja az adott hiperbolikus egyenessel!

51. Adott két közös pont nélküli hiperbolikus egyenes. Szerkessz olyan hiperbolikus egyenest, amelyre való tengelyes tükrözésnél mindkét adott egyenes fix (közös merőleges)!

52. Adott két hiperbolikus egyenes. Szerkessz olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó tükrözés egymásra képezi a két egyenest (*szögfelező*)!

53. Adott két hiperbolikus pont. Szerkessz olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó hiperbolikus tükrözés felcseréli a két pontot (*felezőmerőleges*)!

54. Adott egy pont és egy hiperbolikus egyenes. Szerkessz az adott ponton át olyan hiperbolikus egyenest, amelyre vonatkozó tükrözésre az adott egyenes fix (*magasságvonal*)!

55. Szerkessz hiperbolikus háromszöget, amelynek szögei 60°, 45°, 45°! Parkettázd ki a modell jelentős részét ilyen háromszögekkel! Ábrádat vesd össze M.C. Escher "Angyalok és ördögök II." (Kreislimit IV.) rajzával!

56. Adott a *K* kört az *A* és *B* pontban metsző *L* kör, továbbá az *A* és *B* pontokon átmenő *K*-ra merőleges *H* kör. Mutasd meg, hogy bármely olyan hiperbolikus tengelyes tükrözés, amely egymásra képezi *L* két pontját, az önmagára képezi *L*-et is és *H*-t is (tehát *L* pontjainak a *H* egyenestől való távolsága állandó, azaz *L* ***ekvidisztáns*** görbe)!

57. Adott a *K* kört az *A* pontban belülről érintő *L* kör és legyen *H* tetszőleges olyan hiperbolikus egyenes, amelynek egyik határpontja *A*. Mutassuk meg, hogy a *H*-ra vonatkozó hiperbolikus tükrözésnél *L* fix (tehát *L* ***paraciklus***, azaz egymáshoz elpattanó egyenessereg minden egyes elemén kijelölt egy-egy pont halmaza, amelyek az egyenessereg tagjaira vonatkozó tükrözésekkor egymásba mennek át.)

58. Adott a *K* kör belsejében egy *L* kör. Mutasd meg, hogy *L* belsejében van egy olyan *O* pont, amelyen átmenő bármely hiperbolikus egyenesre vonatkozó hiperbolikus tükrözésnél *L* önmagára képződik! Igazold, hogy *L* bármely két pontjának hiperbolikus felezőmerőlegese átmegy O-*n*! Lásd be, hogy *O* a *K* és *L* körök generálta körsor pontköre! (Azaz *L* hiperbolikus kör, melynek középpontja *O*)

59. Adott két hiperbolikus kör (a hiperbolikus középpontjuk nélkül). Szerkesztendő a hiperbolikus centrális.

60. Bizonyítsd be, hogy bármely hiperbolikus háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át!

61. Bizonyítsd be, hogy bármely hiperbolikus háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át!

62. Értelmezzük a modellben a távolságot és a szöget a következőképpen. Két hiperbolikus egyenes szöge legyen a valóságos szögük. Az *A* és *B* pontok távolságának definiálásához vegyük fel az *AB* hiperbolikus egyenes *X, Y* határpontjait és legyen

$$k \cdot ln|(X, Y, A, B)|$$

A és *B* hiperbolikus távolsága (*k* egy tetszőleges, de előre rögzített pozitív valós szám). Bizonyítsuk be, hogy a Poincaré-féle körmodell ezzel a szög és távolságfogalommal kielégíti a hiperbolikus sík axiómáit!

63. Tekintsük a modellt a komplex egységkörlapnak. Adjuk meg azokat a komplex függvényeket, amelyek a modell irányítástartó egybevágóságainak felelnek meg!

Inverziós feladatok a Kömalban

1. Adott a síkon egy *c* egyenes az egyik oldalán (nem rajta) az *A* és *B* pontok, továbbá egy ϕ szög. Szerkesztendő olyan *ABCD* húrnégyszög, amelynek *C* és *D* csúcsa *c*-n vannak, és amelyre a *DAC* szög egyenlő ϕ-vel.

Kömal F. 1783 (1971/9)

2. Az *AB* szakasz felezőpontja *C*, az *AB* egyenes egyik oldalán az *AC* és *BC* szakaszokra, mint átmérőkre félkört rajzolunk, továbbá *A* és *B* körül *AB* sugárral körívet húzunk, az utóbbiak metszéspontja *D*. Szerkesszünk érintő kört az *ABCD* ívnégyszögbe!

Kömal 768. gyakorlat (1962/4)

3. Bebizonyítandó, hogy a gömbön való tükrözés műveletének sztereografikus képe a síkon körre való tükrözés (inverzió).

199. feladat (Kárteszi Ferenc cikkében, 1950/5)

4. Adjunk meg a síkon végtelen sok pontot úgy, hogy közülük bármely kettőnek a távolsága (egy előre megadott egységhez viszonyítva) racionális legyen, és a pontok ne legyenek mind egy egyenesen!
Megadhatók-e a pontok úgy hogy ne legyen olyan egyenes, amelyik közülük hármon megy át?

Kömal P. 70 (1971/2)

5. Adott (a síkon) egy *e* egyenes és az *A*, *B* pontok. Szerkesszük meg *e*-nek azt a *P* pontját, amelyre a *PA*/*PB* arány értéke maximális, illetve amelyre minimális.

Kömal P. 80 (1972/2)

6. Adott a síkban három kör. Megválasztható-e az inverzió alapköre úgy, hogy ezek képei is körök legyenek és a körök középpontjai egy egyenesre essenek?
Elérhető-e emellet az is, hogy a képek közül kettőnek a sugara egyenlő legyen?

Kömal P. 84 (1972/4)

7. Egy $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú, oldalait jelöljük a_1, a_2, a_3-mal (a_i fekszik A_i-vel szemben). Minden i-re ($i = 1, 2, 3$) M_i az a_i oldal felezőpontja. T_i az a pont, amelyben a beírt kör érinti a_i-t és S_i a T_i pont tükörképe az A_i-hez tartozó belső szögfelezőre nézve. Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek át.

Az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata (Kömal 1984/1)

8. Egy szabályos háromszög csúcsai köré egyenlő sugárral k_1, k_2, k_3 kört írunk. Egy P pont inverz képe k_1-re P_1, P_1 inverz képe k_2-re P_2, míg P_2 képe k_3-ra P_3. Szerkesszünk olyan P pontot, amelyre P_3 egybeesik P-vel.

Kömal P. 44 (1970/4)

9. Adott a *P* pont, az *e*, *f* egyenesek és az ε, ϕ szögek. Szerkesztendők azok a körök, amelyek átmennek *P*-n és *e*-t ε, *f*-et ϕ szögben metszik. (Kör és egyenes szögén a kör metszéspontbeli érintőjének az egyenessel bezárt szögét értjük.)

Kömal P. 28 (1969/12)

Felhasznált irodalom:

- F. Scharygin: Problems in plane geometry, Science for everyone, Mir Publishers Moscow
- Reiman I. : Fejezetek az elemi geometriából
- A geometria alapjai, Hajós György előadásai alapján írta: Strohmajer János, ELTE TTK egyetemi jegyzet.
- Hajós György: Bevezetés a geometriába
- H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai
- H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: Az újra felfedezett geometria
- Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan, ELTE TTK egyetemi jegyzet.