Megoldások

Átvételi vizsga a 9c (spec. mat.) osztályba

Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium, 2022. január 14.

1. (5 pont) Ákos ebédelni megy egy étterembe. Az étterem kínálata az alábbi (a hús nélküli fogásokat v-vel jelöltük):

- Levesek: gyümölcsleves (v), paradicsomleves (v), marhahúsleves.
- Főételek: marhapörkölt, sertéscsülök, rántott sajt (v), rántott hús, mákos tészta (v).
- Desszertek: fagyikehely (v), gyümölcstorta (v).

Ákos egy levest, egy főételt és egy desszertet szeretne enni, de nem hisz a vegetáriánus étrendben, így mindenképpen szeretne húst is enni. Hányféleképpen rendelhet?

Megoldás. A következőképpen számoljuk össze a rendeléseket: kiszámoljuk, hányféleképpen rendelhet Ákos, majd kivonjuk azokat a választásokat, melyek csupa hús nélküli fogásból állnak.

Ákos összesen 3-féle levest, 5-féle főételt és 2-féle desszertet választhat, tehát összesen $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$-féleképpen rendelhet. Azonban 2 leves, 2 főétel és 2 desszert nem tartalmaz húst, ezekből $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olyan rendelés készíthető, melyek csupa hús nélküli ételekből állnak. Ezeket kivonva $30 - 8 = 22$ olyan rendelés van, amely tartalmaz húst. $\square$

2. (5 pont) Lili és Kata bélyeget gyűjtenek. Lilinek kezdetben másfélszer annyi bélyege volt, mint Katának. Egy év alatt Lili 20, Kata 100 új bélyeget gyűjtött, így már Katának lett másfélszer annyi bélyege, mint Lilinek. Hány bélyege volt kezdetben a két lánynak együtt?

Megoldás. Jelölje x, hogy hány bélyege volt Katának kezdetben. Ekkor Lilinek $\frac{3}{2}x$ bélyege volt ugyanekkor. Egy évvel később Lilinek $\frac{3}{2}x + 20$, míg Katának $x + 100$ bélyege lesz, ahol utóbbi $\frac{3}{2}$-szerese az előbbinek, tehát felírható az alábbi egyenlet:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}x + 20\right) = x + 100$$

A zárójelet felbontva

$$\frac{9}{4}x + 30 = x + 100,$$

azaz $\frac{5}{4}x = 70$, azaz $x = 70 \cdot \frac{4}{5} = 56$. Tehát Lilinek 56, és így Katának, $\frac{3}{2} \cdot 56 = 84$ bélyege volt. Azaz kettejüknek együtt $56 + 84 =$ **140 bélyegük volt** kezdetben. $\square$

3. (6 pont) Hány olyan négyzetszám van, amely nagyobb, mint 9^4, de kisebb, mint 4^9?

Megoldás. $9^4 = (9^2)^2 = 81^2$ és $4^9 = (2^2)^9 = 2^{18} = (2^9)^2 = 512^2$ maguk is négyzetszámok, tehát a közöttük levő négyzetszámok:

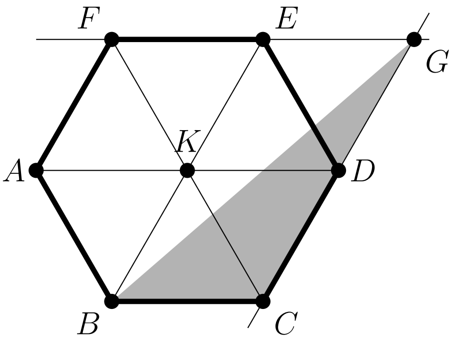
$$82^2, 83^2, \ldots, 511^2.$$

Ez összesen $511 - 82 + 1 =$ **430 darab négyzetszám**[1]. $\square$

[1] Az átvételi vizsga végén kiosztott verzióban ez helytelenül szerepelt, köszönjük Luo Hannak, hogy jelezte a hibát.

4. (8 pont) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög területe 60 egység. A CD és ez EF oldalak egyenesei a G pontban metszik egymást. Hány egység a BCG háromszög területe?

Megoldás. Ismert, hogy egy szabályos hatszög felbontható hat egybevágó szabályos háromszögre, ha K-val jelöljük a hatszög középpontját, akkor $ABK, BCK, CDK, DEK, EFK, FAK$ lesz ez a hat szabályos háromszög. Egy-egy ilyen szabályos háromszög területe 10 egység.



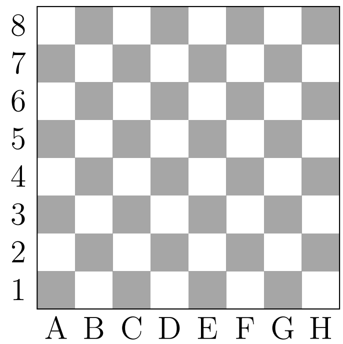
DGE is egy szabályos háromszög, mivel $EDG\sphericalangle$ és $GED\sphericalangle$ egyaránt a szabályos hatszög külső szögei, azaz 60 fokosak. Mivel DE egy közös oldala a DEK háromszöggel, ezért DGE is egybevágó a másik hat szabályos háromszöggel, területe ugyanúgy 10 egység.

A $BCDE$ paralelogramma négy ilyen szabályos háromszögből áll össze, tehát a területe 40 egység. A paralelogramma átlói felezik a területét, így a BG átló behúzása két, egyenként 20 egység területű háromszögre vágja szét a paralelogrammát. Ezen háromszögek egyike a keresett területű BCG háromszög.

Tehát **a BCG háromszög területe 20 egység**. $\square$

5. (8 pont) Egy sakktábla néhány mezőjére szeretnénk bástyát állítani úgy, hogy mind a 32 fehér mezőt fenyegesse legalább egy bástya. Legalább hány bástya szükséges ehhez?

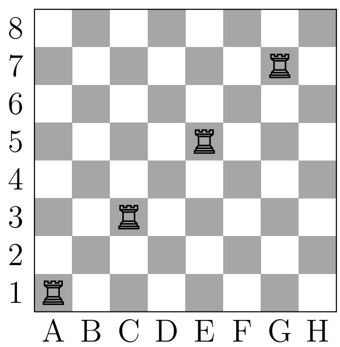
Egy bástya a sorában és az oszlopában levő mezőket fenyegeti (azt a mezőt is, amelyiken áll).



Megoldás. Minden sorban és minden oszlopban 4 mező van, ezért egy bástya $4 + 4 = 8$ mezőt fenyeget, amennyiben sötét mezőn áll; de csak 7-et, ha világos mezőn áll (hizsen ilyenkor a saját mezőjét a sorában és oszlopában is számoljuk).

Tehát 3 vagy kevesebb bástya nem lehet elég, hiszen ezek legfeljebb $8 \cdot 3 = 24$ világos mezőt tudnának fenyegetni a 32-ből.

4 bástya is csak akkor lehet elég, ha mindegyikük sötét mezőn áll, és az általuk fenyegetett világos mezők között nincs átfedés (azaz nincsen több bástya által is fenyegetett világos mező). Ez megvalósítható, például ha az A1, C3, E5 és G7 mezőkre helyezzük a bástyákat:



Tehát **legalább 4 bástya szükséges** az összes világos mező fenyegetéséhez. $\square$

6. (10 pont) Egy n pozitív egész számot *felfúvódó*nak nevezünk, ha n minden prímtényezőjét 1-gyel megnövelve, majd ezeket összeszorozva n egy többszörösét kapjuk. Például, a 12 felfúvódó, mivel a prímtényezős felbontása $2 \cdot 2 \cdot 3$, és $(2+1)(2+1)(3+1) = 36$ többszöröse 12-nek.
Add meg az összes háromjegyű felfúvódó számot.

Megoldás. A felfúvódó háromjegyű számok a következők: **144, 216, 432, 864**.
Ezek valóban felfúvódók, hiszen:

- $144 = 2^4 \cdot 3^2$, és $(2+1)^4 \cdot (3+1)^2 = 3^4 \cdot 2^4 = 3^2 \cdot 144$;
- $216 = 2^3 \cdot 3^3$, és $(2+1)^3 \cdot (3+1)^3 = 3^3 \cdot 2^6 = 2^3 \cdot 216$;
- $432 = 2^4 \cdot 3^3$, és $(2+1)^4 \cdot (3+1)^3 = 3^4 \cdot 2^6 = 2^2 \cdot 432$;
- $864 = 2^5 \cdot 3^3$, és $(2+1)^4 \cdot (3+1)^3 = 3^4 \cdot 2^6 = 2 \cdot 864$.

Belátjuk, hogy ezeken kívül más felfúvódó háromjegyű szám nincs. Legyen n egy (1-nél nagyobb) felfúvódó szám, és jelölje m azt a számot, amelyet a prímtényezők 1-gyel való növelésével kapunk (tehát m-et kell osztania n-nek a felfúvódó tulajdonság teljesüléséhez).

Először bebizonyítjuk, hogy n mindegyik prímtényezője 2 vagy 3. Tekintsük n legnagyobb prímosztóját, ezt jelölje p. Mivel n felfúvódó, m-ben is szerepelnie kell a p prímtényezőnek. $(p+1)$ biztosan nem lehet osztható p-vel (hiszen $p > 1$). Ha q egy kisebb prímtényezője n-nek, akkor még $q+1$ is szinte mindig kisebb, mint p, és így persze osztható sem lehet p-vel. Egyetlen kivételként csak az lehetséges, ha $p = q+1$. Ez két prímszámra csak akkor teljesülhet, ha $p = 3$ és $q = 2$.

Tehát ha n felfúvódó, akkor felírható $2^a \cdot 3^b$ alakban, ahol a és b nemnegatív egész számok. Ekkor:

$$m = (2+1)^a \cdot (3+1)^b = 3^a \cdot 4^b = 2^{2b} \cdot 3^a,$$

ami pontosan akkor osztható $2^a \cdot 3^b$-nel, ha $a \leq 2b$ és $b \leq a$.

Azaz egy szám pontosan akkor felfúvódó, ha $2^a \cdot 3^b$ alakú úgy, hogy $b \leq a \leq 2b$.
Az összes ilyen alakú, háromjegyű szám megtalálásához bontsunk esetekre b lehetséges értékei szerint:

1. Ha $b \leq 1$, akkor $a \leq 2$, de $2^2 \cdot 3$ még bőven kisebb, mint 100.
2. Ha $b = 2$, akkor a lehet 2, 3 vagy 4, de $2^3 \cdot 3^2 = 72$ még csak kétjegyű, $2^4 \cdot 3^2 = 144$ pedig éppen az egyik a keresett számok közül.
3. Ha $b = 3$, akkor a lehet 3, 4, 5 vagy 6. Az első három eset adja a $2^3 \cdot 3^3 = 216$, a $2^4 \cdot 3^3 = 432$ és a $2^3 \cdot 3^3 = 864$ eseteket, de $2^6 \cdot 3^3 = 1728$ már négyjegyű.
4. Ha $b \geq 4$, akkor $a \geq 4$, de már $2^4 \cdot 3^4 = 1296$ is több, mint 1000.

Tehát valóban nincs más háromjegyű felfúvódó szám. □

A feladatsort összeállította és a megoldásokat lejegyezte: Hujter Bálint (az 1. feladat megoldását változtatás nélkül került át 13. Dürer Verseny online fordulójának megoldókulcsából).